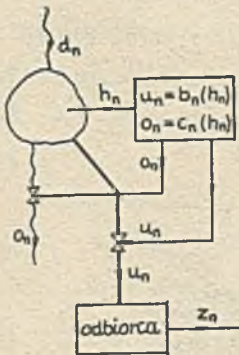


MARIAN BŁACHUTA  
 ZYGMUNT CIEŚLAK  
 ZDZISŁAW DUDA  
 Instytut Automatyki  
 Politechnika Śląska

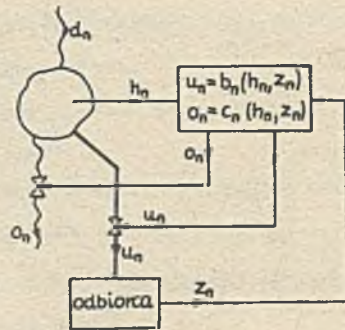
STEROWANIE STOCHASTYCZNIE OPTIMALNE PRZY RÓŻNYM SPOSOBIE WYKORZYSTANIA  
 INFORMACJI POMIAROWEJ W PROSTYM SYSTEMIE WODNO-GOSPODARCZYM

Streszczenie. W referacie prezentuje się rozwiązania trzech problemów sterowania stochastycznie optymalnego dla układu składającego się ze zbiornika retencyjnego i odbiorcy. Problemy te różnią się sposobem wykorzystania informacji pomiarowej o zapotrzebowaniu odbiorcy.

Problemy rozpatrywane w pracy prowadzą do struktur systemów sterowania przedstawionych na rys.1-3.



Rys. 1.



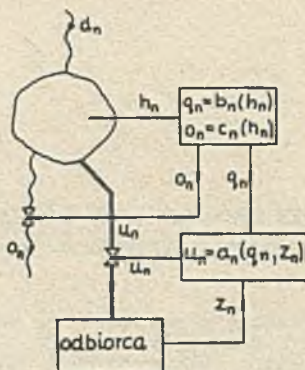
Rys. 2.

Rozwiązania są otrzymywane na drodze numerycznej i z tego powodu wszystkie zmienne mają charakter dyskretny.

Dopływ  $d_n$  tworzy periodyczny proces stochastyczny, o zmiennych dyskretnych, niezależnych, określony przez podanie  $NP$  dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa. Cykliczność procesu jest określona następująco:

$$pd_n^i = pd_{n+mNP}^i, \quad n=1, 2, \dots, NP, m=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

gdzie:  $d_n^1$  oznacza  $i$ -tą wartość zmiennej losowej,  $d_n$ ,  $pd_n$  - prawdopodobieństwo jej wystąpienia,  $n$  - dyskretną chwilę czasu, zaś NP okres.



rys.3.

Zmienna losowa  $d_n$  może przyjmować wartości ze zbioru:

$$\{d_n^{\min}, d_n^{\min} + \Delta, \dots, d_n^{\max}\} \quad (2)$$

Zapotrzebowanie odbiorcy  $z_n$  jest również procesem stochastycznym o własnościach analogicznych do  $d_n$ . Na ilość wody w zbiorniku  $h_n$  oraz na przepływy kontrolowane  $o_n$  i  $u_n$  są nałożone ograniczenia postaci:

$$h_{\min} \leq h_n \leq h_{\max} \quad (3)$$

$$o_{\min} \leq o_n \leq o_{\max} \quad (4)$$

$$u_{\min} \leq u_n \leq u_{\max} \quad (5)$$

Bilans wody w zbiorniku daje równanie:

$$h_{n+1} = h_n + d_n - u_n - o_n \quad (6)$$

Informację pomiarową stanowi wektor  $\bar{y}_n^1$  o postaci:

$$\bar{y}_n^1 = [h_1, h_2, \dots, h_n, z_1, z_2, \dots, z_n] \quad (7)$$

lub wektor:

$$\bar{y}_n = [h_1, h_2, \dots, h_n] \quad (8)$$

Decyzje sterujące  $o_n$  i  $u_n$  wypracowane na podstawie informacji pomiarowej  $\bar{y}_n$  lub  $\bar{y}_n^1$  powinny minimalizować wskaźnik jakości:

$$J = E \sum_{n=1}^N (u_n - z_n)^2 \quad (9)$$

przy spełnieniu ograniczeń (3), (4), (5).

$N \gg NP$  oznacza chwilę końcową sterowania.

Obecnie sformalizujemy zadania dla prostych układów jednopoziomowych.

Przyjmując, że do wyznaczenia sterowań  $o_n$  i  $u_n$  będzie wykorzystana

jedynie informacja o stanie napełnienia zbiornika, możemy napisać:

$$u_n = b_n(\bar{y}_n) \quad (10)$$

$$o_n = c_n(\bar{y}_n) \quad (11)$$

$$\bar{y} = E \sum_{n=1}^N [b_n(\bar{y}_n) - z_n]^2 \quad (12)$$

przy czym na podstawie (2), (3), (4), (5), (6) wartości  $o_n$  i  $u_n$  powinny spełniać ograniczenia:

$$h_n + a_n^{\max} - h_{\max} \leq u_n + o_n \leq h_n + a_n^{\min} - h_{\min} \quad (13)$$

Do rozwiązania powyższego problemu można wykorzystać metodę programowania dynamicznego.

Równanie Bellmana przyjmuje postać:

$$S_n(h_n) = \min_{u_n, o_n} E_{h_n} [(u_n - z_n)^2 + S_{n+1}(h_{n+1})] \quad (14)$$

dla  $n=N, N-1, \dots, 1$  z warunkiem końcowym  $S_{N+1}=0$ .

Sterowanie optymalne wynikające z rozwiązania zagadnienia minimalizacji prawej strony równania (14) przy ograniczeniach (3), (4), (5), (6), (13) ma postać tablic, określających funkcje:

$$u_n = b_n^0(h_n), \quad o_n = c_n^0(h_n) \quad (15)$$

Minimalizacji we wzorze (14) dokonuje się metodą przeglądu zupełnego dla wszystkich par  $u_n$  i  $o_n$ , spełniających ograniczenia.

Rozwiązaniu temu odpowiada struktura układu sterowania przedstawiona na rys.1.

Jeśli w skład informacji pomiarowej wejdzie również informacja o zapotrzebowaniu odbiorcy  $z_n$  wówczas równanie Bellmana przyjmie postać:

$$S_n(h_n, z_n) = \min_{u_n, o_n} E_{h_n, z_n} [(u_n - z_n)^2 + S_{n+1}(h_{n+1}, z_{n+1})] \quad (16)$$

dla  $n=N, N-1, \dots, 1$  z warunkiem końcowym  $S_{N+1}=0$ .

Minimalizacja przeprowadzona przy ograniczeniach (3), (4), (5), (6), (13) daje algorytm sterowania optymalnego w postaci tablic:

$$u_n = b_n^0(h_n, z_n), \quad o_n = c_n^0(h_n, z_n), \quad (17)$$

prowadzący do struktury układu sterowania przedstawionej na rys.2.

W końcu wprowadza się koncepcję struktury hierarchicznej układu sterowania, w której dolny poziom podejmuje decyzje w oparciu o wytyczne opracowane na górnym poziomie oraz informację o zapotrzebowaniu odbiorcy. Górny poziom podejmuje decyzje jedynie w oparciu o stan zbiornika.

W przypadku tej struktury oprócz ograniczeń (3), (4), (6) przyjmuje się dodatkowe ograniczenia w postaci:

$$q_n = E \bar{y}_n u_n \quad (18)$$

$$q_{\min} \leq q_n \leq q_{\max} \quad (19)$$

gdzie:  $q_n$  jest oceną wielkości  $u_n$  przy wykorzystaniu informacji pomiarowej  $\bar{y}_n$ .

Do rozwiązania problemu poszukiwania sterowania stochastycznie optymalnego wykorzystuje się metodę programowania dynamicznego oraz metodę mnożników Lagrange'a celem uwzględnienia zależności (18).

Dla kroku  $N$  mamy:

$$J_N = \underset{b_N(\bar{y}_N, a_N(\bar{y}_N))}{\text{Min}} E [b_N(\bar{y}_N, a_N(\bar{y}_N)) - z_N]^2 \quad (20)$$

Można udowodnić, że minimalizację prawej strony wyrażenia (20) można przeprowadzić następująco:

$$J_N = E \underset{q_N}{\text{Min}} \underset{b_N(\bar{y}_N, q_N)}{\text{Min}} E | \bar{y}_N [b_N(\bar{y}_N, q_N) - z_N]^2 \quad (21)$$

Dalej:

$$J_N = E \underset{q_N}{\text{Min}} E | \bar{y}_N \underset{u_N}{\text{Min}} E | \bar{y}_N [u_N - z_N]^2 \quad (22)$$

Sterowanie optymalne  $u_N$  powinno zatem minimalizować wyrażenie:

$$S_N(\bar{y}_N) = \underset{u_N}{\text{Min}} E | \bar{y}_N [u_N - z_N]^2 \quad (23)$$

przy ograniczeniu (18).

Korzystając z metody mnożników Lagrange'a można pokazać, że sterowanie optymalne wyraża się wzorem:

$$u_N^0 = z_N - E z_N + q_N \quad (24)$$

Aby wyznaczyć  $q_N^0$  należy zminimalizować wyrażenie:

$$J_N = E \underset{b_N(\bar{y}_N)}{\text{Min}} [b_N(\bar{y}_N) - E z_N]^2 \quad (25)$$

przy ograniczeniach (3), (4), (6), (19).

Postępując podobnie dla kroków  $n=N-1, N-2, \dots, 1$  można pokazać, że sterowanie optymalne przyjmuje postać:

$$u_n^0 = z_n - E z_n + q_n \quad (26)$$

Funkcje  $q_n = a_n(\bar{y}_n)$ , oraz  $o_n = c_n(\bar{y}_n)$  można wyznaczyć z następującego równania Bellmana:

$$\bar{S}_n(\bar{y}_n) = \min_{q_n, o_n} E | \bar{y}_n [ (q_n - E z_n)^2 + \bar{S}_{n+1}(h_{n+1}) ] \quad (27)$$

dla  $n=N, N-1, \dots, 1$  z warunkiem końcowym  $\bar{S}_{N+1} = 0$ , przy ograniczeniu (4), (19) oraz zmodyfikowanym (3).

Bilans wody w zbiorniku daje równanie:

$$h_{n+1} = h_n + d_n - u_n - o_n \quad (28)$$

Ponieważ  $u_n^0 = z_n - E z_n + q_n$  więc (28) można zapisać jako:

$$h_{n+1} = h_n + d_n - z_n + E z_n - q_n - o_n \quad (29)$$

Zatem ograniczenie (3) przyjmuje postać:

$$h_{\min} \leq h_n + d_n - z_n + E z_n - q_n - o_n \leq h_{\max} \quad (30)$$

Ze względu na konieczność wykonania operacji uśredniania w (27) zależność (30) powinna być spełniona dla każdego  $z_n$  i  $d_n$ .

Wykonując operacje uśredniania oraz minimalizacji prawej strony równania (27) otrzymuje się tablice w postaci:

$$q_n = a_n^0(h_n) \quad , \quad o_n = c_n^0(h_n) \quad (31)$$

Założmy obecnie, że chwila końcowa  $N$  jest bardzo odległa. Wówczas konsekwencją okresowości dopływów i zapotrzebowań będzie począwszy od pewnego etapu obliczeń okresowe powtarzanie się tablic stanowiących algorytmy sterowania, np. dla układu z rys. 1 będzie zachodzić począwszy od pewnego  $n$ :

$$\begin{aligned} b_n(h_n) &= b_{n-NP}(h_n) = \dots \\ c_n(h_n) &= c_{n-NP}(h_n) = \dots \end{aligned} \quad (32)$$

W dalszym ciągu za rozwiązanie optymalne przyjmujemy rozwiązanie okresowe. Dzięki temu ilość tablic zmniejsza się do NP zestawów zamiast  $N$ . Jakość układu przy optymalnym sterowaniu okresowym może być określona przez wartość średnią za okres:

$$EJ = E \sum_{n=1}^{NP} (u_n - z_n)^2 \quad (33)$$

Wartość tą może być wyznaczona np. na drodze symulacji.

Dla rozpatrywanych układów dokonano obliczeń optymalnych okresowych algorytmów sterowania oraz symulacji ich pracy dla konkretnych danych liczbowych.

Tablice 1 i 2 zawierają wartości zmiennych losowych  $d_n$  i  $z_n$ , oraz odpowiadających im prawdopodobieństw. Przyjęto  $NP=12$ .

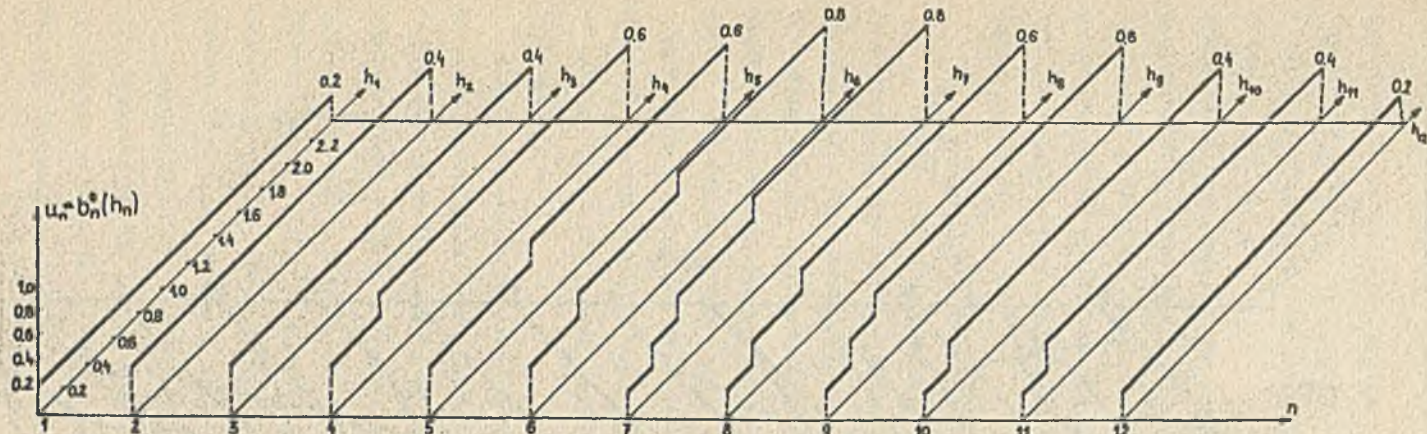
Tablica 1

$\begin{matrix} a_n \\ n \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	$Ed_n$
1	0	0,5	0,5	0	0	0,50
2	0	0,3	0,6	0,1	0	0,56
3	0	0	0,2	0,6	0,2	0,80
4	0	0	0,1	0,1	0,8	0,94
5	0	0	0	0,5	0,5	0,90
6	0	0,2	0,6	0,2	0	0,60
7	0,4	0,6	0	0	0	0,32
8	0,8	0,2	0	0	0	0,24
9	0,4	0,6	0	0	0	0,32
10	0,9	0,1	0	0	0	0,22
11	0,5	0,5	0	0	0	0,30
12	0,5	0,5	0	0	0	0,30

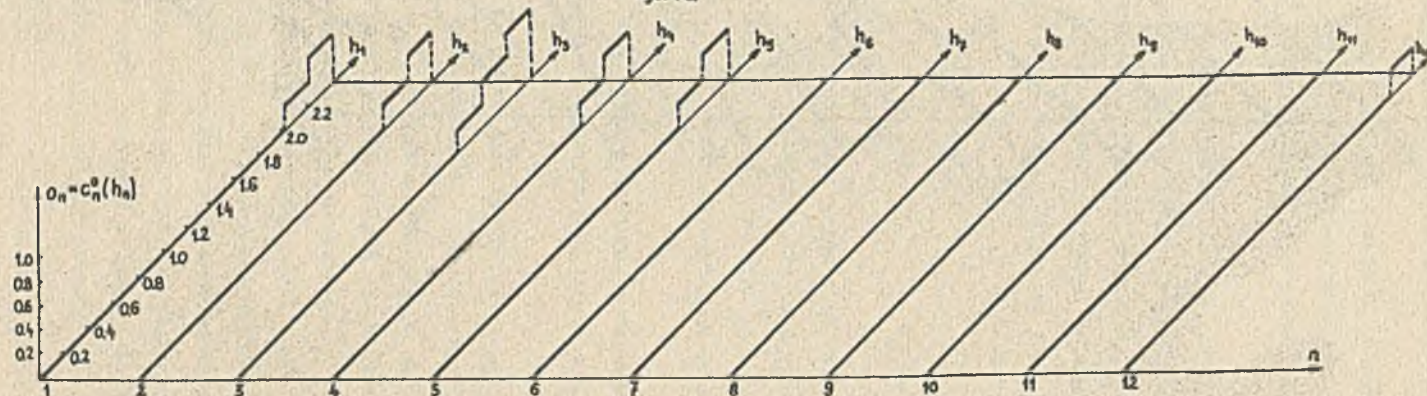
Tablica 2

$\begin{matrix} z_n \\ n \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	$Ez_n$
1	1	0	0	0	0	0,20
2	0	1	0	0	0	0,4
3	0,2	0,6	0,2	0	0	0,4
4	0	0,2	0,6	0,2	0	0,6
5	0	0,2	0,6	0,2	0	0,6
6	0	0	0,2	0,6	0,2	0,80
7	0	0	0,2	0,6	0,2	0,80
8	0	0,2	0,6	0,2	0	0,60
9	0	0,2	0,6	0,2	0	0,60
10	0,2	0,6	0,2	0	0	0,40
11	0	1	0	0	0	0,40
12	1	0	0	0	0	0,20

Przepływy  $o_n, q_n, u_n$  mogą przyjmować wartości dyskretne 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 i 1,0. Symulację pracy wszystkich stanów przeprowadzono przez 5 000 okresów (60 000 kroków). Przykładowe wyniki obliczeń dla układu z rys. 1. przedstawione są na rys. 4. Wartości przydziałów wody  $u_n$  dostarczanej odbiorcy, rys. 4a, są dla wyższych stanów napełnień równe wartościom średnim zapotrzebowań  $u_n = Ez_n$ . Przy niższych stanach napełnień dostawy są limitowane.

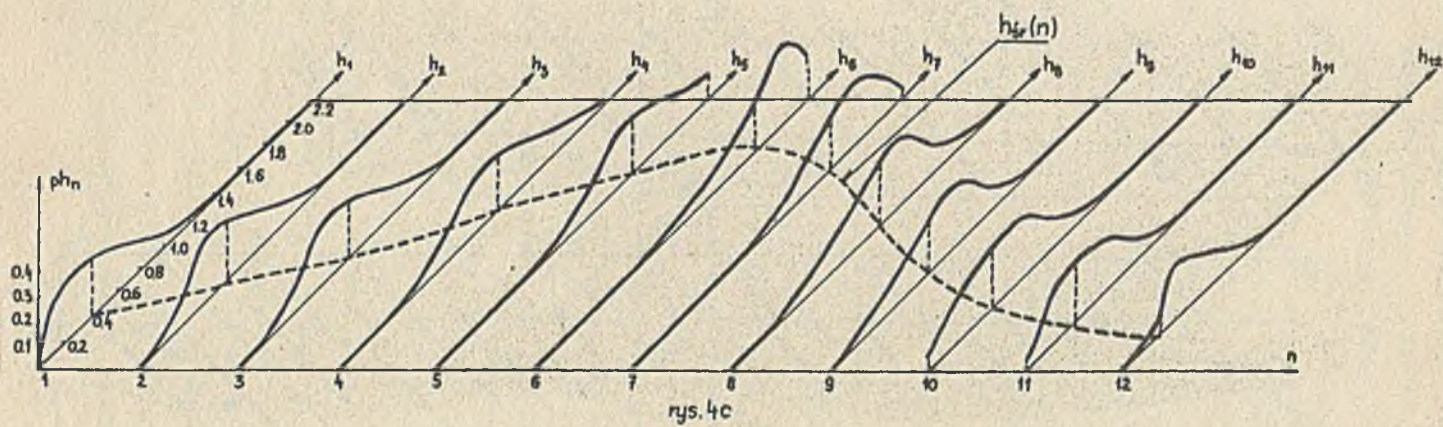


rys. 4a



rys. 4b

Rys. 4 a,b. Stany napięcia zbiornika w układzie wg rysunków 1 i 2



Rys.4c. Stany napeżnienia zbiornika w układzie wg rys.3.



Ograniczenie przydziałów wynika z ograniczenia nałożonego na dopuszczalny poziom zbiornika  $h \geq h_{\min} = 0$ , lub też dla nieco wyższych stanów napełnień, z postaci przyjętego wskaźnika jakości i rozkładów prawdopodobieństwa  $d_n$  i  $z_n$ .

Można to interpretować w ten sposób, że algorytm sterowania decyduje się na poniesienie strat wynikłych z niezaspokojenia potrzeb w danej chwili, aby zapobiec większym stratom w przyszłości. Optymalne wartości  $o_n$ , przedstawione na rys. 4b, okazują się najmniejszymi odpływami zapewniającymi nieprzekroczenie ograniczenia na górny poziom zbiornika i spełniającymi równanie:

$$o_n = \begin{cases} h_n - h_{\max} + d_n^{\max} - Ez_n, & \text{dla } h_n \text{ takich, że } o_n > 0 \\ 0, & \text{dla pozostałych } h_n \end{cases} \quad (34)$$

Interpretacja tego wyniku jest następująca.

Wskutek tego, że w rozważanym przykładzie wartości średnie dopływu i zapotrzebowania za okres są równe, można powiedzieć, że przyczyną występowania ograniczeń przydziałów wody są zrzuty, których konieczność wynika z ograniczonej pojemności zbiornika. Jest oczywiste, że wartości tych zrzutów powinny być możliwie najmniejsze.

Z rozkładu prawdopodobieństwa stanów napełnień zbiornika, przedstawionego na rys. 4c, widać, że prawdopodobieństwo wystąpienia niektórych sterowań jest zerowe.

Algorytm sterowania po zwiększeniu pojemności zbiornika do  $h_{\max} = 3,0$  wykazuje bardzo duże podobieństwo do poprzedniego. W zakresie niskich stanów napełnień algorytmy  $u_n = b_n(h_n)$  pokrywają się. Odpływy  $o_n$  spełniają również równanie (34). Wartości sterowań dla pozostałych stanów wynoszą  $u_n = Ez_n$ . Tak więc dysponując optymalnym algorytmem sterowania dla pewnej (wystarczająco dużej) pojemności zbiornika można natychmiast podać algorytm optymalny dla zbiornika o pojemności większej. Zwiększenie pojemności zbiornika powoduje zmniejszenie wartości prawdopodobieństw poszczególnych stanów napełnień, w tym również skrajnych. Dzięki temu ograniczenie poborów i dokonywanie zrzutów zachodzi rzadziej. Pociąga to za sobą zmniejszenie wartości wskaźnika jakości. Dla rozpatrywanych układów uzyskano następujące wartości.

1. Układ nie wykorzystujący informacji pomiarowej o  $z_n$  (rys.1.)

$$h_{\max}=2,2 \quad EJ=0,1437$$

$$h_{\max}=3,0 \quad EJ=0,1365$$

2. Układ dwupoziomowy, wykorzystujący informację o  $z_n$  jedynie na niższym poziomie (rys.3.)

$$h_{\max}=2,2 \quad EJ=0,0493$$

$$h_{\max}=3,0 \quad EJ=0,0194$$

3. Układ wykorzystujący informację pomiarową o  $z_n$  (rys.2.)

$$h_{\max}=2,2 \quad EJ=0,0276$$

$$h_{\max}=3,0 \quad EJ=0,0155$$

W wypadku, gdy zapotrzebowanie jest zdeterminowane, wszystkie powyższe układy są równoważne.

W szczególności dla zapotrzebowania zdeterminowanego i równego  $Ez_n$  z ostatniej kolumny tablicy 2 uzyskuje się wartości:

$$h_{\max}=2,2 \quad EJ=0,0150$$

$$h_{\max}=3,0 \quad EJ=0,0078$$

Powyższa praca została oparta na opracowaniu wykonanym w Zespole Teorii Sterowania w ramach Problemu Rządowego PR-7 pod kierunkiem prof. dr.hab. inż. Ryszarda Gessinga.

#### LITERATURA

- [1] Gessing R. i inni: Metoda i algorytmy sterowania stochastycznie optymalnego zbiorem obiektów w systemie wodno-gospodarczym. Cz.II. Badania teoretyczne i symulacyjne. Praca zlecona przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1980.
- [2] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczenia algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki T.XXI, 2.4, 1976.
- [3] Bryson H., Ho Y.C.: Applied Optimal Control. Blaisdell Publ. Comp., New York 1972.

СТОХАСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ РАЗНОМ СПОСОБЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ПРОСТОЙ ВОДНОЙ СИСТЕМЕ

Резюме.

В работе представлено решение трёх проблем стохастически оптимального управления для системы которая состоит из водохранилища и потребителя. Проблемы отличаются способом использования измерительной информации. Анализируются тоже результаты симуляции.

STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH DIFFERENT USE OF MEASURING INFORMATION  
IN THE SIMPLE WATER ECONOMIC SYSTEM

Summary.

The solution of three optimal stochastic control problems for the water system is being considered. The system consists of a reservoir and customers. The problems differ one another by use of measuring information about customer. The numerical results are also presented.