

ANTONI KOZŁOWSKI

INSTYTUT METEOROLOGII  
I GOSPODARKI WODNEJ

## MODEL DŁUGOTERMINOWEJ PROGNOZY ZDYSKRETYZOWANEGO HYDROGRAMU

Streszczenie

Główną cechą prezentowanego modelu predykcji dopływu jest przedstawienie zmienności średnich siedmiodniowych dopływów jako prostego /pierwszego rzędu/ niestacjonarnego łańcucha Markowa.

Parametry modelu określane są dla rozpatrywanego profilu na podstawie obserwowanych dopływów z wielolecia.

Jako profil badawczy dla prezentowanego modelu przyjęto przekrój Żywiec na rz. Sole.

Dla ilustracji przedstawiono prognozy średnich siedmiodniowych dopływów z 1978 r. za pomocą modelu o parametrach określonych na bazie dopływów z okresu 1919-1977.

1. Podstawy teoretyczne modelu

Jednym z podstawowych zagadnień w sterowaniu systemem wodno-gospodarczym jest znajomość, z jak największym wyprzedzeniem, zmienności przyszłych dopływów na wejściach do systemu. Zadanie optymalnego sterowania systemem wodno-gospodarczym rozwiązywane jest m.in. na podstawie predykcji dopływów  $\hat{Q}(t)$  traktowanych jako wielkość deterministyczna [10].

Przedstawiony model jest propozycją określania tego typu funkcji jako zdyskretyzowanych hydrogramów przyszłych dopływów z przesuwany horyzontem predykcji.

Dopływ rzeczny jest niestacjonarnym procesem stochastycznym o ciągłym czasie  $\{x(t, \omega), t \in I, \omega \in \Omega\}$ , przy czym  $\Omega$  jest obszarem zmienności dopływu, a  $I$  jest zbiorem indeksów chwil czasowych. Niestacjonarność ma charakter cykliczny. Własności procesu zmieniają się w rocznym cyklu hydrologicznym.

W modelu prognozy rozpatrywano zmienność dopływów uśrednionych w ustalonych przedziałach czasu  $\Delta t > 0$ . Sekwencje takich dopływów stanowią pro-

ces niestacjonarny o czasie dyskretnym. W modelu dopływu, oprócz dyskretyzacji czasu, podzielono również obszar zmienności dopływów  $\Omega$  na pewną przeliczalną liczbę przedziałów  $\omega = [\omega_i]$ , posługując się w ten sposób pojęciem stanów dopływu  $Z_i \in \Omega$ :

$$Z_i = \left\{ Q(t) : \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j \leq Q(t) < \sum_{j=1}^i \omega_j \right\}.$$

W ten sposób otrzymano zbiór stanów dopływu  $J$ :

$$J = \{ Z_i : i = 1, 2, \dots, M \}$$

oraz zbiór indeksów przedziałów czasowych  $I$ :

$$I = \{ \Delta t_k : k = 1, 2, \dots, N \}$$

a w formie uproszczonej odpowiednie zbiory  $J$  i  $I$ :

$$J = \{ i : i = 1, 2, \dots, M \} \quad I = \{ k : k = 1, 2, \dots, N \}.$$

Tak więc proces dopływu rozpatrywano jako zbiór wektorów losowych  $\{ \mathbf{x}(k, l), k \in I, l \in J \}$ .

Dyskretyzacja przestrzeni  $\Omega$  powoduje, że zmienność dopływu traktowana jest jako stochastyczny łańcuch z czasem dyskretnym. Łańcuch ten jest cykliczny o liczbie  $n$  elementów cyklu, tzn.  $F(\mathbf{x}(k, l)) = F(\mathbf{x}(k+n, l))$

i posiada własność Markowa, tzn.  $F(\mathbf{x}(k, l) | \mathbf{x}(1, l), \mathbf{x}(2, l), \dots, \mathbf{x}(k-1, l)) = F(\mathbf{x}(k, l) | \mathbf{x}(k-1, l))$ .

W prezentowanym modelu prognozy zdyskretyzowanych dopływów ich zmienność przedstawiono jako prosty /pierwszego rzędu/, niestacjonarny łańcuch Markowa.

Łańcuchy Markowa omawiane są w wielu pracach, między innymi w [1], [4], [5], [8].

W związku z tym oprócz określania zbiorów  $J$  i  $I$  do modelu wprowadzono następujące elementy:

- niestacjonarne zestawy intensywności przejścia zdyskretyzowanych dopływów ze stanu  $l$  w stan  $i$

$$\Lambda(k) = [\lambda_{li}(k)], l \in J, i \in J \quad (1)$$

-  $l$  - elementowe wektory intensywności /częstości/ wyjścia ze stanu  $l$

$$\lambda(k) = [\lambda_l(k)]; \lambda_l(k) = \sum_{i \neq l} \lambda_{li}(k); \sum_l \lambda_l(k) = m \quad (2)$$

gdzie  $m$  jest liczbą obserwowanych rocznych procesów zmian dopływu

-  $l$  - elementowe wektory /rozkłady/ prawdopodobieństw stanów dopływu

$$p(k) = [p_l(k)]; p_l(k) = P\{Q(\Delta t_k) \in Z_l(\omega_l)\} = \frac{\lambda_l(k)}{m} \quad (3)$$

-  $l \times l$  - wymiarowe stochastyczne macierze prawdopodobieństw przejścia ze stanu  $Z_l$  w stan  $Z_i$  dla liczby  $N$  przedziałów

$$P(k) = [p_{li}(k)]; p_{li}(k) = P[Q(\Delta t_{k+1}) \in Z_i(\omega_i) | Q(\Delta t_k) \in Z_l(\omega_l)] = \frac{\lambda_{li}(k)}{\lambda_l(k)} \quad (4)$$

Ponieważ łańcuch jest niestacjonarny, to:

$$P(k) \neq P(k+1) \quad (5)$$

wektory prawdopodobieństwa występowania określonych stanów dopływu w przyszłych przedziałach czasowych  $\Delta t_{k,h}$  ( $h=1,2,\dots,L$ , oznacza ilość przedziałów na horyzoncie predykcji) podaje zależność:

$$p^T(k+h) = p^T(k) \prod_{h=1}^L P(k+h) \quad (6)$$

Maksymalne prawdopodobieństwo występowania stanów dopływu w przedziale wynosi:

$$p_{max}(k+h) = \max[p(k+h)] = \hat{p}_l(k+h) \quad (7)$$

W przypadku zastosowania zróżnicowanej wielkości przedziałów stanów, tzn. zastosowania  $\omega = [\omega_i]$  o różnych elementach, wektor  $p(k+h)$  zastępuje się  $\tau$ -elementowym wektorem średnich dla poszczególnych  $l$ -tych stanów gęstości prawdopodobieństwa  $g(k+h) = [g_r(k+h)]$ .

$$g(k+h) = (p(k+h) \cdot \omega^T \delta_{l,\tau}) e = G(k+h) e \quad (8)$$

gdzie  $\dim g = \dim p = \dim \omega^T = \dim e$

$$\omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_i \end{bmatrix}$$

$$\delta_{l,\tau} = \begin{cases} 0 & \text{gd } l \neq \tau \\ 1 & \text{gd } l = \tau \end{cases}$$

$e = [1]$   $\tau$ -elementowy wektor jednostkowy

$G(k+h)$  diagonalna macierz o wymiarach  $l \times \tau$

Analogicznie do (7) maksymalne średnie gęstości prawdopodobieństwa występowania poszczególnych stanów określono jako:

$$g_{max}(k+h) = \max[g(k+h)] = \hat{g}_l(k+h) \quad (9)$$

Następnie został wprowadzony wektor  $c = [c_i]$ , kwantujący obszar zmienności dopływów. Elementy tego wektora mogą być określane różnie:

$$c_i = Q_{min} + (l-1) \cdot \omega + \xi \cdot \omega = Q_{min} + (l-1+\xi) \omega \quad (10)$$

dla równych przedziałów  $\omega$  i

$$c_i = Q_{min} + \sum_1^{l-1} \omega_i + \xi \cdot \omega_i \quad (11)$$

dla różnych przedziałów  $\omega_i$ .

$Q_{min}$  oznacza dolną granicę przedziału zmienności dopływów, natomiast  $\xi$  jest wsp. określającym położenie skwantowanych wielkości dopływu w stosunku do granic przyjętych stanów  $Z_i$ ;  $0 < \xi < 1$ .

Na przykład, gdy  $\xi = 0.5$ , to skwantowane dopływy odpowiadają środkom przedziałów  $\omega_i$ .

$$c_i = \bar{c}_i = E \left\{ Q(\Delta t_k) : Q_{min} + \sum_1^{l-1} \omega_i \leq Q(\Delta t_k) < Q_{min} + \sum_1^l \omega_i \right\} \quad (12)$$

$$c_i = \check{c}_i = E \left\{ Q(\Delta t_k) : Q_{min} + \sum_1^{l-1} \omega_i < Q(\Delta t_k) < \bar{c}_i \right\} \quad (13)$$

$$c_i = \bar{c}_i = E\left\{Q(\Delta t_k) : \bar{c}_i \leq Q(\Delta t_k) < \sum_{j=1}^L \omega_j\right\} \quad (13)$$

Po zgrupowaniu wektorów  $\{p(k+h), h=1, 2, \dots, L\}$  lub  $\{g(k+h), h=1, 2, \dots, L\}$  odpowiednio w  $L \times h$  wymiarowe macierze

$$W = [w_{lh}] \quad i \quad F = [f_{lh}] \quad \text{dokonuje się przekształceń:} \\ \hat{q}^T = c^T (\alpha W) = c^T H \quad (14)$$

i dla (9)

$$\hat{q}^T = c^T (v F) = c^T T \quad (15)$$

gdzie:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{gdy } w_{lh} = \bar{p}_l(k+h) \\ \frac{1}{w_{lh}} & \text{gdy } w_{lh} = \bar{p}_l(k+h) \end{cases} \\ v = \begin{cases} 0 & \text{gdy } f_{lh} = \bar{g}_l(k+h) \\ \frac{1}{f_{lh}} & \text{gdy } f_{lh} = \bar{g}_l(k+h) \end{cases}$$

$H = [h_{lh}], T = [t_{lh}]$  zerowejedynkowe macierze o wymiarach  $L \times h$ .

Wektor  $\hat{q} = [\hat{q}_h]$  jest przewidywanym na horyzoncie  $h \times \Delta t$  hydrogramem prawdopodobnych średnich w przedziałach  $\Delta t_{k+h}$  dopływów. Jest on

$$\text{obarczony błędem predykcji: } \bar{q} = q - \hat{q} = [\bar{q}_h] \quad (16)$$

Bezwzględna wartość tego wektora, będącego odchyleniem hydrogramu prognozowanego od obserwowanego, stanowi miarę efektywności prognozy. Analiza statystyczna odchyłań wielokrotnie przeprowadzanych bądź symulowanych prognoz o różnych h-tych wyprzedzeniach prowadzi do konstruowania empirycznych dystrybuant rozkładów prawdopodobieństwa maksymalnych lub średnich odchyłań prognoz:  $F_h(\psi) = P(|\bar{q}| < \psi)$ ; (17)

$\Psi = [\psi_h]$  jest h-elementowym wektorem zadanych wartości badanego odchylenia.

Im większe wartości dla określonego wektora  $\Psi$  przybiera dystrybuanta  $F_h(\Psi)$ , tym efektywniejsza jest prognoza dopływu [10].

W celu zmniejszenia błędów predykcji  $\bar{q}$  w modelu analizowano wprowadzenie różnych odmian poprawek.

Pierwszą z nich jest z - elementowy wektor  $p = [p_z]$  o elementach różnych dla z-tych przedziałów horyzontu prognozy ( $z = 1, 2, \dots, L$ ).

Zmodyfikowany poprawiony h-elementowy wektor  $\hat{q} = [\hat{q}_h]$  ma postać:

$$\hat{q} = \hat{q} + (\hat{q} p^T \delta_{hz}) \cdot e = \hat{q} + D \cdot e \quad (18)$$

gdzie:

$$\delta_{hz} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } h \neq z \\ 1 & \text{gdy } h = z \end{cases} \\ e = [1] \quad z - \text{elementowy wektor jednostkowy}$$

$D = [d_{hz}]$  diagonalna macierz o wymiarach  $h \times z$

Wektor  $\rho$  określono minimalizując dla liczby  $S$  symulowanych  $m$ -tych prognoz ich błąd średniokwadratowy  $f(\rho) = q^{(m)} - \tilde{q}^{(m)}$ , tzn.

$$\begin{aligned} J(\rho^*) &= \min_{\rho} \frac{1}{S} \sum_{m=1}^S \|q^{(m)} - \tilde{q}^{(m)}\| = \frac{1}{S} \sum_{h=1}^L \min_{\rho_h} \sum_{m=1}^S [q_h^{(m)} - \tilde{q}_h^{(m)}]^2 = \\ &= \frac{1}{S} \sum_{h=1}^L \min_{\rho_h} \sum_{m=1}^S [q^{(m)} - \hat{q}^{(m)} - \rho_h \hat{q}^{(m)}]^2 \end{aligned} \quad (19)$$

lub minimalizując względny błąd średniokwadratowy:

$$\begin{aligned} J_1(\rho_1^*) &= \min_{\rho} \frac{1}{S} \sum \| [ (q^{(m)} - \tilde{q}^{(m)}) q^{-1T(m)} \delta_{hz} ] e \| = \\ &= \frac{1}{S} \sum_{h=1}^L \min_{\rho_h} \sum_{m=1}^S \left[ \frac{q_h^{(m)} - \tilde{q}_h^{(m)}}{q_h^{(m)}} \right]^2 = \frac{1}{S} \sum_{h=1}^L \min_{\rho_h} \sum_{m=1}^S \left[ \frac{q_h^{(m)} \hat{q}_h^{(m)} - \rho_h \hat{q}_h^{(m)}}{q_h^{(m)}} \right]^2 \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie:

$q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{q}_z \end{bmatrix}$  jest  $z$ -elementowym wektorem, przy czym  $\dim q = \dim \hat{q} = \dim \tilde{q}^{(m)}$   
 $\delta_{hz}$  i  $e$  są takie jak wyżej.

Po wstawieniu wektora  $\rho^*$  lub  $\rho_1^*$  do (18) otrzymujemy odpowiednio:

$$\tilde{q}^* = \hat{q} + (\hat{q} \cdot \rho^{*T} \delta_{hz}) e = \hat{q} + D^* e \quad (21)$$

$$\tilde{q}^* = \hat{q} + (\hat{q} \rho_1^{*T} \delta_{hz}) e = \hat{q} + D_1^* e \quad (22)$$

Oprócz wektorów  $\rho$  i  $\rho_1$  rozpatrywane również  $L \times h$ -wymiarowe macierze

$\Theta = [v_{lh}]$  o elementach, których wielkość jest zależna od wartości  $\hat{q}_h$ , jak i od przedziałów  $\Delta t_{k+h}$  horyzontu predykcji. W związku z tym dopływy prognozowane w  $m$ -tej prognozie wg (14) lub (15) przedstawiono w postaci  $L \times h$ -wymiarowej macierzy.

$$\hat{U}^{(m)} = [\hat{u}_{lh}^{(m)}] = \alpha \cdot H^{(m)} \quad (23)$$

gdzie  $\alpha = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \eta_{lh} = 0 \\ c_l & \text{gdy } \eta_{lh} = 1 \end{cases}$

Natomiast dopływy obserwowane odpowiadające dopływowi  $\hat{U}^{(m)}$  przedstawiono jako:

$$U^{(m)} = [u_{lh}^{(m)}] = \beta \cdot H^{(m)} \quad (24)$$

gdzie  $\beta = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \eta_{lh} = 0 \\ q_h^{(m)} & \text{gdy } \eta_{lh} = 1 \end{cases}$

Poprawioną  $l \times h$ -wymiarową macierz można zapisać jako:

$$\hat{U}^{(m)} = [\hat{u}_{lh}^{(m)}] = \tilde{U}^{(m)} + \nu H^{(m)} \quad (25)$$

gdzie

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{gd}y \quad \eta_{lh} = 0 \\ \mathcal{U}_{lh} & \text{gd}y \quad \eta_{lh} \neq 0 \end{cases}$$

Wprowadzając  $l \times h$ -wymiarową macierz  $\Gamma^{(m)} = [\gamma_{lh}^{(m)}]$  o elementach

$$\gamma_{lh}^{(m)} = [u_{lh}^{(m)} - \tilde{u}_{lh}^{(m)}]^2 \quad \text{poszukiwano } \Theta^*, \text{ minimalizując wskaźnik:}$$

$$\begin{aligned} J_2(\Theta^*) &= \min_{\Theta} \sum_{m=1}^S \Gamma^{(m)} = \sum_{h=1}^L \sum_{l=1}^M \min_{\mathcal{U}_{lh}} \sum_{m=1}^S \gamma_{lh}^{(m)} = \\ &= \sum_{h=1}^L \sum_{l=1}^M \min_{\mathcal{U}_{lh}} \sum_{m=1}^S [u_{lh}^{(m)} - \tilde{u}_{lh}^{(m)}]^2 = \sum_{h=1}^L \sum_{l=1}^M \min_{\mathcal{U}_{lh}} \sum_{m=1}^S [u_{lh}^{(m)} - \tilde{u}_{lh}^{(m)} - \mathcal{U}_{lh}^{(m)} \hat{u}_{lh}^{(m)}]^2 = \\ &= \sum_{h=1}^L \sum_{l=1}^M \min_{\mathcal{U}_{lh}} \sum_{m=1}^S [\bar{u}_{lh}^{(m)} - \mathcal{U}_{lh}^{(m)} \hat{u}_{lh}^{(m)}]^2 \end{aligned} \quad (26)$$

W modelu założono coroczne aktualizowanie macierzy  $\Theta^*$ . Ponieważ na wyznaczoną  $\Theta^*$  wg (26) mają wpływ wszystkie odchylenia  $\bar{u}_{lh}^{(m)}$  symulowanych  $m$ -tych prognoz z całego analizowanego wielolecia, zatem i odchylenia nie występujące w każdym roku, dlatego w modelu analizowano również minimalizowanie średniokwadratowego błędu prognozy na podstawie zbioru odchyleń  $\bar{u}_{lh}^{(m)}$  ograniczonego do tych, które występują średnio przynajmniej raz w roku, określając w ten sposób macierze  $\Theta_1^* \subset \Theta^*$ .

## 2. Numeryczne sprawdzenia i analiza modelu prognozy

Wykorzystanie stochastycznego łańcucha Markowa w modelu predykcji pociąga za sobą konieczność dysponowania jak najobszerniejszym materiałem obserwacyjnym zmian dopływu, stanowiącym podstawę dla empirycznego określenia macierzy prawdopodobieństw przejścia, a tym samym stworzenia warunków funkcjonowania modelu.

Proponując tego typu model prognozy i mając na uwadze praktyczne jego wykorzystanie, należy brać pod uwagę wielkość praktycznie możliwego do użycia materiału obserwacyjnego, co zdecydowanie wpływa na praktyczny sens stosowania modelu.

Dla przeprowadzenia numerycznej analizy funkcjonowania proponowanego modelu wybrano profil Żywiec na rzece Sole. Przepływy w tym przekroju potraktowane są jako dopływy do zb. Tresna.

Dla wybranego profilu zebrano dopływy dobowe z 60 lat /1919-1978/. Następnie dopływy te uśredniono na stosowany w modelu przedział  $\Delta t_k = 7$  dni. Do obliczenia wg (4)  $N=52$  stochastycznych macierzy prawdopodobieństw

przejścia  $P(k)$  wykorzystano przebiegi dopływów z okresu 1919-1977, tj. z 59 lat.

Przepływy z 1978 r. posłużyły do zilustrowania wyników działania modelu, imitując w ten sposób sytuację, w której rok 1978 jest jakoby prognozowany za pomocą proponowanego modelu. Zmienność dopływu ujęto w  $M=30$  stanach o równych zakresach  $\omega = 3,5 \text{ m}^3/\text{s}$ , czyli z zastosowaniem wektora  $\omega$  o tych samych elementach. W pierwszej fazie obliczeń rozpatrywano półroczny horyzont prognozy  $L = 26$ . Analiza długości horyzontu, w którym początkowy wektor prawdopodobieństw stanów  $p(k)$  ma wpływ na prognozowane  $h$ -te wektory  $p(k+h)$ , doprowadziła do ograniczenia horyzontu do  $L = 13$  przedziałów  $\Delta t_k$ , czyli do kwartału roku. Cyfrowym, symulacyjnym prognozowaniem wg proponowanego modelu z kwantowaniem prognozowanych dopływów wg (10) objęto dopływy z lat 1963-1977. Określanie macierzy  $P(k)$  przy ograniczonej ilości materiału statystycznego jest właściwie osobnym problemem.

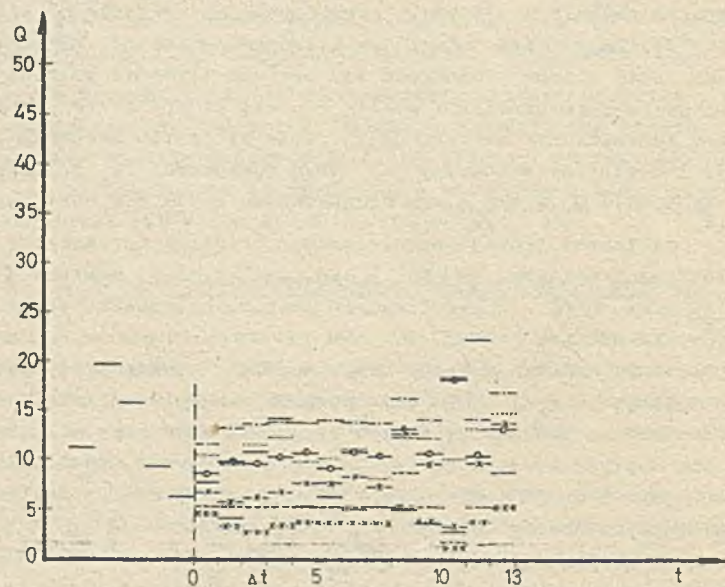
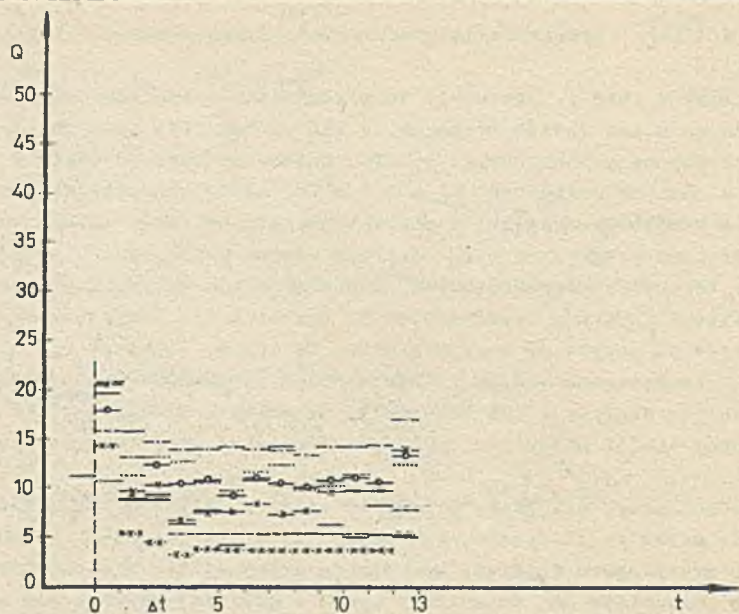
Prawdopodobieństwa przejścia między 30 stanami obliczane są w modelu na podstawie małej, ze statystycznego punktu widzenia, liczbie - zaledwie 59 rocznych przebiegach dopływu. Oczywiście mniejsza ilość stanów dopływu o większym przedziale  $\omega$  zmieniłaby wartość macierzy  $P(k)$ , ale spowodowałaby zarazem zbytne wygładzanie prognozowanych wektorów  $\hat{q}$ . Zpóźnicowana wielkość stanów również zmieniłaby prognozowane wektory  $\hat{q}$ . Poza tym przyjmowana ilość stanów i wielkość  $\omega$  powinna stwarzać warunki do dominacji prawdopodobieństw przejścia między częścią stanów i nie prowadzić do nadmiernego rozrzedzenia macierzy  $P(k)$  /dużo elementów zerowych/.

Nadmiernie rozrzedzone macierze  $P(k)$  mogą spowodować to, że określony wg (6)  $p(k+h) = 0$ , a tym samym nieokreślone stają się wartości  $\hat{p}_i(k+h)$ .

W trosce o praktyczne funkcjonowanie modelu prognozy wprowadzono możliwość inercyjności wektorów  $p(k+h)$ , tzn. zastępowania wektora  $p(k+h) = 0$  wektorem  $p(k+h-1) \neq 0$ . W symulowanych na m.c. prognozach takie sytuacje wystąpiły kilkakrotnie.

Dla zilustrowania działania opisywanego modelu prognozy przeprowadzono cyfrową symulację na m.c. CDC 3170 prognoz dopływów odpowiadających 1978 r. Przykładową ilustrację takich prognoz zawiera rys. 1. Przedstawiono na nim dopływy średnie siedmiodniowe obserwowane, następnie prognozę dopływów jako średnią z wielolecia (A), prognozę nie poprawionych wektorów  $\hat{q}$  (B), poprawianych za pomocą  $p^*$  i  $p_i^*$  wektorów  $\hat{q}^*$  (C) i  $\hat{q}^*$  (D) i poprawianych za pomocą macierzy  $\hat{Q}^*$  (E) i  $\hat{Q}_i^*$  (F).

Warunkiem działania symulacji było określanie bezwzględnego i względnego błędu kwadratowego prognozy średniego dla pojedynczej predykcji dla różnych długości horyzontów ( $h_f = 1, 2, \dots, 13$ ). Błędy te zawiera wraz z odpowiedzią analizą prace [10]. Analiza ta wskazuje wprowadzić na przewagę odmian (C), (E) i (F) ale ostateczna decyzja powinna być poprzedzona sprawdzeniem wyników działania modelu na większej liczbie lat, w których dopływy nie służą do określania macierzy  $P(k)$ . Ponieważ do ewentualnego



- średnie siedmiodniowe dopływy z obserwacji w 1978r  
 - - - - - średnie siedmiodniowe dopływy z wielolecia 1919-1977 (A)  
 (B)  
 (C)  
 (D)  
 (E)  
 (F)

Rys. 1

PROGNOZY ŚREDNICH SIEDMIODNIOWYCH DOPIŁYWÓW W ROKU 1978



wdrożenia tego typu modelu upływie jeszcze kilka lat i ta sytuacja dogodna do tego celu oraz dalszego udoskonalenia modelu istnieje. Przeprowadzona w pracy [10] analiza proponowanego typu modelu wykazała, że przy spotykanej u nas praktycznie największej ilości obserwacji model predykcji oparty na niejednorodnych łańcuchach Markowa wykazuje dostateczną sprawność działania.

W sytuacji operacyjnego sterowania systemem wodno-gospodarczym określony będzie na bieżąco na końcu aktualnego przedziału  $\Delta t_k$  wektor  $\tilde{q}$ , co będzie wymagać jedynie znajomości dopływu w przedziale  $\Delta t_k$ . Dopływy średnie dla  $\Delta t_k$  z bieżącego roku będą wprowadzane na końcu tego roku do materiału statystycznego w celu aktualizacji wartości  $P(k)$ . Macierze  $P(k)$  określane będą na podstawie maksymalnej liczby historycznych dopływów, natomiast wszelkie poprawki typu  $\rho$  czy  $\theta$  obliczane będą na podstawie zmniejszonej liczby obserwacji dopływów wynikającej z zauważalnej zmienności dopływów spowodowanej zmianami warunków wodno-gospodarczych. Proponowany model cechuje ujemne obciążenie prognoz świadczące o tendencji do zaniżania dopływów, co widać na rys. 1. Wynika to z prognozowania wartości modalnych dodatnio asymetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa dopływów. Tego typu "pesymistyczne" prognozy w procesie sterowania rozrzędem zasobów wodnych są bardziej korzystne od tendencji do zawyżania dopływów, ponieważ nie mówiąc o prognozach w latach suchych, mogą one stymulować działania zmierzające do intensyfikacji gospodarowania zasobami wodnymi w systemie wodno-gospodarczym.

## LITERATURA

1. A.T.Bharucha-Reid; Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications; New York; McGraw-Hill 1960.
2. J.R.Benjamin, C.A.Cornell; Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teorie decyzji dla inżynierów. WNT, Warszawa 1977.
3. N.P.Buslenko, W.W.Kałasznikow, I.N.Kowalenko; Teoria systemów złożonych, PWN, Warszawa 1979.
4. D.R.Cox, H.D.Miller; The Theory of Stochastic Processes; John Wiley Sons, Ins., New York 1965.
5. W.Feller; Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1970.
6. B.W.Gniedenko, M.I.Kowalenko; Wstęp do teorii obsługi masowej. PWN, Warszawa 1971.
7. F.S.Hiller, G.Liberman; Introduction to Operations Research, Holden-Day, Ins. Publishers, San Francisco, 1967.
8. Z.Kaczmarek; Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii. WKiL, Warszawa 1970
9. A.Papoulis; Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 1972.
10. K.A.Salewicz, T.Terlikowski, A.Bogobowicz, A.Kozłowski, E.Mrówka; Opracowanie i próbne uruchomienie algorytmu sterującego zbiorem modeli dla systemu wodnogospodarczego w regionie przemysłowym. Maszynopis IMGW, Warszawa 1980.
11. A.D.Wentzell; Wykłady z teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1980.

## MODEL OF A LONG-TERM FORECAST OF A DISCRETE DISCHARGE HYDROGRAPH

## S u m m a r y

The future inflow process into the water management system is unknown function of the natural regime runoff conditioned by the character of the catchment and its climate.

In the paper a model of the forecasted discrete hydrographs has been proposed as a known function of the independent time variable.

In the proposed approach the simple non-homogeneous Markov chain has been applied as the approximation of a real non-stationary river runoff process.

Methods for determination of some model parameters have been presented on the basis of the past observed annual hydrological series. The hydrological series have been distributed into the intervals of a week time duration and for these intervals the mean discharges have been considered.

The model has been tested for Żywiec cross-section of Soła River. The numerical calculations have been carried out for a time period of 1919-1977. The annual hydrological series of 1978 have been forecasted by the proposed model to the presentation of the results of the model effect.

## МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ДОЛГОСРОЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ГИДРОГРАФОВ СТОКА

## Р е з ю м е

Будущий приток в водохозяйственную систему является неизвестной функцией естественного режима стока обусловленного свойством водосбора и его климатом.

В статье представлено модель предусматривания дискретных гидрографов стока как известную функцию независимой переменной времени.

В предложенном подходе использовано простую неоднородную цепь Маркова как аппроксимацию нестационарного процесса речного стока. Метод определения параметров модели основано на прошедших наблюдаемых гидрографах. Гидрографы разделены на еженедельные отрезки времени, и в этих пределах шага дискретности проведено осреднение величины стока.

Модель проверено в профиле Живец на реке Соле. Численные вычисления проверено для периода 1919-1977г. Дискретный годовой гидрограф 1978г. прогнозировано предложенной моделью для проиллюстрирования результатов действия модели.