ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 46 Nr kol. 427

Zygmunt Nowomiejski

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

UOGÓLNIONA TEORIA MOCY

Streszczenie. W pracy została przedstawiona i uzasadniona ogólna teoria mocy przebiegów, które nie są transformowalne według Fouriera. Znaleziono nowe zależności zachodzące między przebiegami i ich mocami. W tym celu zastosowano uogólnioną transformatę Fouriera wprowadzoną przez N. Wienera.

1. Uogólniona transformata Fouriera (Por. [1] str. 150, [2] str. 240)

Rozważać będziemy funkcje $f(t)$ przebiegów rzeczywistych o skończonej mocy. Dla przebiegów tych określona jest wartość skuteczna (por. [3]):

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt} \tag{1.01}$$

oraz funkcja autokorelacji:

$$\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)f(t-\tau)dt \tag{1.02}$$

Jak widać zachodzi prosta relacja:

$$F = \sqrt{\varphi(o)} \tag{1.03}$$

przy czym (co łatwo wykazać):

$$\varphi(o) \geqslant \varphi(\tau) \tag{1.04}$$

dla każdego τ.

Funkcja $\varphi(\tau)$ jest funkcją parzystą i posiada transformatę Fouriera (por. [1]).

Odmiennie od $\varphi(t)$ funkcja $f(t)$, ogólnie biorąc, nie jest transformowalna według Fouriera. Posiada jednak uogólnioną transformatę Fouriera zdefiniowaną przy pomocy relacji:

$$F_{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \varepsilon \neq 0 \tag{1.05}$$

oraz transformatę Hilberta (por. [3]):

$$H\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{\pi}\,{}^{*}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}\,{}^{1)} \tag{1.06}$$

W szczególnym przypadku, gdy $f(t)$ jest transformowalna według Fouriera (np. przebieg o skończonej energii), tzn., jeżeli:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.07}$$

istnieje dla każdego rzeczywistego ω, to wtedy:

$$F_{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{\varepsilon}(\omega-\Omega)F(\Omega)d\Omega \tag{1.08}$$

gdzie:

$$\mathcal{K}_{\varepsilon}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |\omega| < \varepsilon \\ 0, & \text{dla pozostałych wartości } \omega \end{cases} \tag{1.09}$$

Zachodzi także (na podstawie (1.08)):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_{\varepsilon}(\omega)}{2\varepsilon} = F(\omega) \tag{1.10}$$

---

1) Symbol: ${}^{*}\!\!\int$ oznacza, że bierzemy wartość główną całki w sensie Cauchy'ego. W przedstawionej pracy wartości wszystkich występujących całek można tak interpretować i dlatego w dalszej części pominiemy symbol „(*)"

Przechodząc do przypadku ogólnego połóżmy:

$$F_{\delta H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\delta t}{t} \cdot H\left\{f(t)\right\} e^{-j\omega t}\, dt \tag{1.11}$$

Mamy (zakładając, że $f(t)$ jest funkcją ograniczoną):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\delta t}{t} \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau - t}\right\} e^{-j\omega t}\, dt =$$

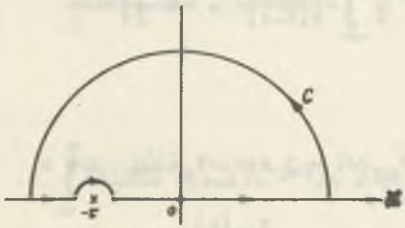
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\delta t}{t(\tau - t)} \cdot e^{-j\omega t}\, dt\right\} d\tau \tag{1.12}$$

Rozważmy całkę:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\delta t e^{-j\omega t} dt}{t(\tau - t)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\delta x e^{j\omega x} dx}{x(x+\tau)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{C} \frac{2\sin\delta p e^{j\omega p} dp}{p(p+\tau)},$$

gdzie C jest konturem pokazanym na rys. 1.



Rys. 1

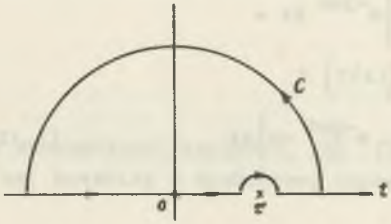
Gdy $\omega > o$, otrzymamy:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\delta x e^{j\omega x} dx}{x(x+\tau)} = j\,\frac{2\sin\delta\tau}{\tau}\, e^{-j\omega\tau}$$

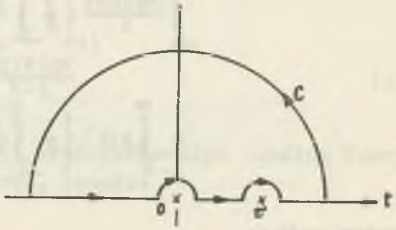
Dla: $\omega<o$, zachodzi (por. rys. 2):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\varepsilon t, e^{-j\omega t}dt}{t(\tau-t)} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\varepsilon t e^{j\lambda t}dt}{t(t-\tau)}, \quad \lambda = -\omega$$

$$= -j\,\frac{2\sin\varepsilon\tau}{\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}$$



Rys. 2



Rys. 3

Gdy, $\omega = o$ (por. rys. 3):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\varepsilon t dt}{t(\tau-t)} = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\varepsilon t}dt}{t(t-\tau)}\right\}\int_{C}\frac{e^{j\varepsilon p}dp}{p(p-\tau)} = \pi j\left[\frac{e^{j\varepsilon\tau}-1}{\tau}\right]$$

Czyli:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\varepsilon t dt}{t(\tau-t)} = \frac{2(1-\cos\varepsilon\tau)}{\varepsilon\tau}$$

Ostatecznie:

$$F_{\varepsilon H}(\omega) = j\,\mathrm{sgn}\,\omega F_{\varepsilon}(\omega); \quad \omega \neq o \tag{1.13}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_{\varepsilon H}(o)}{2\varepsilon} = o \tag{1.14}$$

Alternatywnie relację (1.13) można uzyskać następująco. (Poniżej przedstawione wyprowadzenie pozwala na uwolnienie się od założenia, że funkcja f(t) jest ograniczona. Założenie konieczne w odniesieniu do relacji (1.12)).

Mamy:

$$F_{\acute{c}H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} H\left\{f(t)\right\} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} e^{-j\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t-\lambda)d\lambda}{\lambda} \right\} dt$$

Powyższa całka wielokrotna jest bezwzględnie zbieżna, dlatego:

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} f(t-\lambda)e^{-j\omega t} dt \right\} d\lambda \tag{1.15}$$

Lecz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin\acute{c}(t+\tau)}{t+\tau} - \frac{\sin\acute{c}t}{t} \right] f(t)e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\acute{c}t}{t} f(t)e^{-j\omega t} \left[\frac{\sin\acute{c}(t+\tau)}{\sin\acute{c}t} \frac{t}{t+\tau} - 1 \right] dt \tag{1.16}$$

Stąd, dla wystarczająco małego $\acute{c}$($\omega \neq 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}(t+\tau)}{t+\tau} f(t)e^{-j\omega t}\, dt \cong F_{\acute{c}}(\omega) \tag{1.17}$$

Czyli:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} f(t-\lambda)e^{-j\omega t} dt \cong F_{\acute{c}}(\omega)e^{-j\omega\lambda} \tag{1.18}$$

Wstawiając (1.18) do całki (1.15), otrzymamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} H\left\{f(t)\right\} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} F_{\acute{c}}(\omega)e^{-j\omega\lambda} d\lambda$$

$$= j\, F_{\acute{c}}(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} e^{j\omega\Omega} d\Omega = j\, \mathrm{sgn}\omega F_{\acute{c}}(\omega) \tag{1.19}$$

W dalszej części rozważań korzystać będziemy z twierdzenia N.Wienera (por. [1] str. 139 i nast.), które orzeka, że jeżeli jedna z granic

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt \tag{1.20}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{t^2} f^2(t)dt \quad \text{istnieje,} \tag{1.21}$$

to istnieje także druga granica i że są one sobie równe. Dla przebiegów o skończonej mocy mamy więc:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{t^2} \cdot f^2(t)dt \tag{1.22}$$

Na podstawie twierdzenia Parsevala zachodzi (por. (1.05)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{t^2} \cdot f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4}$$

Stąd (por. (1.22)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{1.23}$$

Podobnie (por. (1.13), (1.14) oraz (1.19)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[H\{f(t)\}\right]^2 dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|j\,\mathrm{sgn}\,\omega F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

Czyli:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[H\{f(t)\}\right]^2 dt \tag{1.24}$$

Z relacji (1.24) wynika, że wartości skuteczne przebiegu f(t) oraz jego transformaty Hilberta $H\{f(t)\}$ są sobie równe. Niech f(t) i g(t) będą przebiegami rzeczywistymi o skończonej mocy. Zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \acute{c}t}{t} \cdot \left[f(t) + g(t)\right] e^{-j\omega t} dt = F_{\acute{c}}(\omega) + G_{\acute{c}}(\omega) \tag{1.25}$$

oraz (por. (1.23)):

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt &= \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|F_{\acute{c}}(\omega)\right|^2 d\omega}{4\pi\acute{c}} \\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g^2(t)dt &= \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\left|G_{\acute{c}}(\omega)\right|^2 d\omega}{4\pi\acute{c}} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Wykażemy, że:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)g(t)dt = \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\acute{c}}(\omega) G^*_{\acute{c}}(\omega)\, d\omega}{4\pi\acute{c}} \tag{1.27}$$

Istotnie, na podstawie nierówności Schwarza:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g^2(t)dt \geqslant \left|\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)g(t)dt\right|^2$$

Co oznacza, że granica stojąca po lewej stronie relacji (1.27) istnieje. Na podstawie twierdzenia Wienera (por. (1.22)) mamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f(t) + g(t)\right]^2 dt = \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{\pi\acute{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \acute{c}t}{t^2} \left[f(t) + g(t)\right]^2 dt \tag{1.28}$$

czyli (por. (1.23)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[f(t) + g(t)\right]^2 dt = \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|F_{\acute{c}}(\omega) + G_{\acute{c}}(\omega)\right|^2 d\omega}{4\pi\acute{c}}$$

Stąd, uwzględniając (1.26) oraz fakt, że dla transformat funkcji rzeczywistych:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\varepsilon}(\omega)\, G_{\varepsilon}^{*}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\varepsilon}^{*}(\omega)\, G_{\varepsilon}(\omega)\, d\omega$$

otrzymamy relację (1.27).
Połóżmy: $g(t) = H\left\{k(t)\right\}$. Zachodzi (por. (1.27) oraz (1.13), (1.14) i (1.19)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, H\left\{k(t)\right\} dt = -j \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\omega F_{\varepsilon}(\omega) K_{\varepsilon}^{*}(\omega)\, d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

$$= +j \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\omega F_{\varepsilon}^{*}(\omega)\, K_{\varepsilon}(\omega)\, d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

Z drugiej strony:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) H\left\{f(t)\right\} dt = -j \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\omega K(\omega) F_{\varepsilon}^{*}(\omega)\, d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

stąd:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) H\left\{g(t)\right\} dt = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) H\left\{f(t)\right\} dt \tag{1.29}$$

Z relacji (1.29) wynika natychmiast, że:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) H\left\{f(t)\right\} dt = 0 \tag{1.30}$$

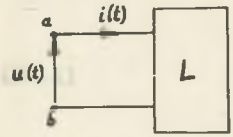
oraz:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) g(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H\left\{f(t)\right\} \cdot H\left\{g(t)\right\} dt \tag{1.31}$$

Jak widać w rozpatrywanej przestrzeni funkcyjnej funkcja f(t) jest ortogonalna do swojej transformaty Hilberta a z (1.31) oraz (1.24) wynika, że (z punktu widzenia teorii mocy przebiegów) przebiegi rzeczywiste są wymienialne z ich transformatami Hilberta.

2. Moc czynna, bierna i pozorna (Por. [3])

Niech L jest dowolnym[1] układem elektrycznym, między zaciskami którego występują przebiegi o skończonej mocy. Oznacza to, że między zaciskami (a,b) układu L (por. rys. 4) określone są wartości skuteczne:



Rys. 4

$$U = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u^2(t)dt}$$

$$I = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} i^2(t)dt} \tag{2.01}$$

oraz moc modułowa:

$$P_m = U \cdot I \tag{2.02}$$

Podstawowymi mocami przebiegów są moc czynna P i bierna Q. Na podstawie definicji mamy:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)i(t)dt \tag{2.03}$$

$$Q = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)H\{i(t)\}dt \tag{2.04}$$

Niech: $i(t) = G\,u(t)$, gdzie G jest wielkością stałą.
Otrzymamy:

$$P = G\,U^2; \quad Q = o \quad \text{(na podstawie (1.30))}.$$

[1] W pracy ograniczymy się do dwójników. Jednak biorąc ogólne L może być złożonym obiektem aktywnym zawierającym parametry skupione i rozłożone, elementy liniowe i nieliniowe oraz elementy odwzorowujące procesy stochastyczne.

Gdy: $i(t) = G\,H\{u(t)\}$ (zależność ta ma istotne znaczenie w teorii kompensacji mocy biernej (por. [6])), otrzymamy:

$$P = 0; \quad Q = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i(t)H\{u(t)\}dt = -G\,U^2$$

Na podstawie (1.27) zachodzi:

$$P = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_\varepsilon(\omega)\ I_\varepsilon^*(\omega)d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.05}$$

$$Q = \lim_{\varepsilon\to 0}(-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}\omega U_\varepsilon(\omega)\ I_\varepsilon^*(\omega)d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.06}$$

Stąd:

$$P + j\,Q = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{U_\varepsilon(\omega)\ I_\varepsilon^*(\omega)d\omega}{4\pi\varepsilon}\ ^{*)} \tag{2.07}$$

Moc pozorną S definiujemy przy pomocy relacji:

$$S = |P + j\,Q| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{2.08}$$

Uogólnione transformaty $U_\varepsilon(\omega)$ oraz $I_\varepsilon(\omega)$ możemy przedstawić w postaci amplitudowo-fazowej.

Połóżmy:

$$U_\varepsilon(\omega) = V_\varepsilon(\omega)\,e^{j\beta_\varepsilon(\omega)}; \quad I_\varepsilon(\omega) = I_\varepsilon(\omega)e^{j\alpha_\varepsilon(\omega)} \tag{2.09}$$

oraz

$$\psi_\varepsilon(\omega) = \beta_\varepsilon(\omega) - \alpha_\varepsilon(\omega); \quad \cos\psi = \frac{P}{S}; \quad \sin\psi = \frac{Q}{S} \tag{2.10}$$

otrzymamy (por. (2.07)):

$$S\,e^{j\psi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{V_\varepsilon(\omega)\ J_\varepsilon(\omega)\ e^{j\psi_\varepsilon(\omega)}d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.11}$$

*) Pominięto składowe stałe przebiegów.

Moc pozorna S jest wielkością rzeczywistą. Stąd:

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{V_\varepsilon(\omega)\, J_\varepsilon(\omega) \cos\left[\psi_\varepsilon(\omega) - \psi\right] d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.12}$$

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{V_\varepsilon(\omega)\, J_\varepsilon(\omega) \sin\left[\psi_\varepsilon(\omega) - \psi\right] d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.13}$$

Zauważmy, że w przypadku szczególnym, gdy $\psi_\varepsilon(\omega) = \text{constans} = \psi$, relacja (2.13) jest spełniona dla dowolnej pary wielkości $V_\varepsilon(\omega)$ i $J_\varepsilon(\omega)$ i wtedy:

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{V_\varepsilon(\omega)\, J_\varepsilon(\omega) d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.14}$$

Teoria mocy, najogólniej biorąc, dotyczy związków zachodzących między mocami rozważanych przebiegów. W zastosowaniach - aby jej nadać określone znaczenie techniczne i ekonomiczne - odnosimy ją do wyróżnionego obiektu lub układu. Jeżeli dynamiczne zachowanie się układu pozwala na przeprowadzenie efektywnej analizy, to znaczy prowadzącej do znalezienia zależności zachodzących między przebiegami, teoria mocy staje się składową częścią tej analizy a występujące moce możemy wyrazić w zależności od dynamicznych charakterystyk układu.

Najprostszym tego przykładem jest układ liniowy czasowo niezmienniczy. Istotnie, niech L jest układem liniowym (pasywnym lub aktywnym) czasowo niezmienniczym i niech $y(t)$ będzie odpowiedzią tego układu na napięciowy impuls Diraca $\delta(t)$ a $\Phi(t)$ funkcją autokorelacji (por. (1.02)) przyłożonego napięcia $u(t)$.

Jak wiemy (por. [3]) dla układu L obowiązują relacje:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\Phi(t)dt \tag{2.15}$$

$$Q = -\int_{-\infty}^{\infty} y(t)H\left\{\Phi(t)\right\}dt \tag{2.16}$$

Występujące w obu wzorach funkcje podcałkowe są transformowalne według Fouriera. Otrzymamy:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\ Y^*(\omega)d\omega \tag{2.17}$$

$$Q = (-j)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega\ \Phi(\omega)\ Y^*(\omega)d\omega \tag{2.18}$$

gdzie $\Phi(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji $\varphi(t)$.
Czyli

$$P + j\ Q = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)\ Y^*(\omega)d\omega \tag{2.19}$$

Zachodzi (por. [2], str. 261):

$$\Phi(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left|U_\varepsilon(\omega)\right|^2}{4\pi\varepsilon} \tag{2.20}$$

Stąd, dla układów liniowych czasowo niezmienniczych:

$$P + j\ Q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\left|U_\varepsilon(\omega)\right|^2\ Y^*(\omega)d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.21}$$

Jak widać uzyskane zależności wiążą moce przebiegów z funkcją przejścia układu.
Porównując (2.21) z (2.07), otrzymamy:

$$I_\varepsilon(\omega) = Y(\omega)\ U_\varepsilon(\omega) \tag{2.22}$$

Bezpośrednio relację (2.22) możemy uzyskać następująco.
Na podstawie zasady superpozycji mamy:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\ u(t-\tau)d\tau \tag{2.23}$$

stąd:

$$I_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\ u(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}\ dt$$

Zakładając, że dozwolona jest zmiana kolejności całkowania, otrzymamy:

$$I_{\acute{c}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} \cdot u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right\} d\tau$$

Zachodzi (por. (1.18)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t} \cdot u(t-\tau)e^{-j\omega t}\, dt \approx U_{\acute{c}}(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

Czyli:

$$I_{\acute{c}}(\omega) = U_{\acute{c}}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = Y(\omega)\ U_{\acute{c}}(\omega)$$

W przypadku ogólnym, gdy niemożliwe jest wykrycie bezpośrednich związków zachodzących między przebiegami występującymi na zaciskach układu L a jego charakterystykami dynamicznymi, można, jak to zostanie pokazane, znaleźć relację wiążącą funkcje korelacji tych przebiegów. Funkcje te posiadają bezpośredni związek z mocami rozpatrywanego układu.
Mamy (por. (1.18)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\acute{c}t}{t}\left[u(t) + i(t-\tau)\right]e^{-j\omega t}dt = U_{\acute{c}}(\omega) + I_{\acute{c}}(\omega)\ e^{-j\omega\tau}$$

Stąd (na podstawie (1.22) i (1.23)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[u(t) + i(t-\tau)\right]^2 dt =$$

$$= \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\left|U_{\acute{c}}(\omega) + I_{\acute{c}}(\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{4\pi\acute{c}}$$

Czyli:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)i(t-\tau)dt = \lim_{\acute{c}\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{\acute{c}}(\omega)\ I^*_{\acute{c}}(\omega)\ e^{j\omega\tau}d\omega}{4\pi\acute{c}} \qquad (2.24)$$

Funkcja (2.24) jest funkcją korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu. (Korelacją napięciowo-prądową układu).
Połóżmy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)i(t-\tau)dt$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)e^{-j\omega t}\, dt \tag{2.25}$$

Z relacji (2.24) wynika, że:

$$\Theta(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U_\varepsilon(\omega)\ I_\varepsilon^*(\omega)}{4\pi\varepsilon} \tag{2.26}$$

Porównując (2.26) z (2.07), otrzymamy:

$$P + j\,Q = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Theta(\omega)d\omega \tag{2.27}$$

oraz (por. (2.12), (2.10)):

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\Theta(\omega)|\ \cos\left[\psi_\varepsilon(\omega) - \psi\right]d\omega$$

$$Q = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\Theta(\omega)|\ \sin\left[\psi_\varepsilon(\omega) - \psi\right]d\omega \tag{2.28}$$

Dla przypadku szczególnego (2.14), zachodzi:

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\Theta(\omega)|\,d\omega \tag{2.29}$$

Jak widać, jeżeli występujące na zaciskach układu L przebiegi napięcia i prądu posiadają zerową korelację wzajemną (są nieskorelowane), to moce czynna P, bierna Q i pozorna S są równe zero.

Powracając do relacji (2.26) zauważamy, że:

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{U_\varepsilon(\omega)\ I^*_\varepsilon(\omega)}{4\pi\varepsilon}\right|^2 \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left|U_\varepsilon(\omega)\right|^2}{4\pi\varepsilon}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left|I_\varepsilon(\omega)\right|^2}{4\pi\varepsilon} \tag{2.30}$$

Kładąc:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i(t)i(t-\tau)dt$$

$$\mathcal{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(t)e^{-j\omega t}\ dt \tag{2.31}$$

nierówność (2.30) możemy zapisać w postaci (por. (2.20)):

$$\left|\Theta(\omega)\right|^2 \leqslant \Phi(\omega)\mathcal{V}(\omega) \tag{2.32}$$

3. Moc deformacji

Do rozważań wprowadzimy przebiegi zespolone zdefiniowane przy pomocy relacji (por. [4], [5]):

$$\hat{F}(t) = f(t) - j\ H\left\{f(t)\right\} \tag{3.01}$$

Zachodzi:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\left|\hat{F}(t)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[H\left\{f(t)\right\}\right]^2 dt\right\}$$

Czyli (na podstawie (1.01) oraz (1.24)) dla wartości skutecznej F przebiegu rzeczywistego f(t), otrzymamy:

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\left|\hat{F}(t)\right|^2 dt} \tag{3.02}$$

Przykładowo, niech:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_n \cos(\omega_n t + \vartheta_n) \tag{3.03}$$

Stąd:

$$H\left\{f(t)\right\} = -\sum_{n=1}^{n=N} C_n \sin(\omega_n t + \vartheta_n) \tag{3.04}$$

$$\hat{F}(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_n e^{j\vartheta_n} \cdot e^{j\omega_n t} \tag{3.05}$$

$$\left|\hat{F}(t)\right|^2 = \sum_{n,r=1}^{N} C_n C_r e^{j(\vartheta_n - \vartheta_r)} \cdot e^{jt(\omega_n - \omega_r)}$$

Gdy $r \neq n$, otrzymamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} e^{jt(\omega_n - \omega_r)} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(\omega_n - \omega_r)\, T}{2T(\omega_n - \omega_r)} = 0$$

Z drugiej strony, gdy $r = n$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} dt = \frac{1}{2}$$

Ostatecznie więc:

$$F^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=N} C_n^2 = \sum_{n=1}^{n=N} \left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Połóżmy:

$$\hat{U}(t) = u(t) - j\, H\left\{u(t)\right\}; \quad \hat{I}(t) = i(t) - j\, H\left\{i(t)\right\} \tag{3.06}$$

Wielkość zespoloną:

$$\hat{S} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} \hat{U}(t)\, \check{I}(t)dt \tag{3.07}$$

gdzie symbol $\check{I}(t)$ oznacza przebieg sprzężony do przebiegu $\hat{I}(t)$, nazwiemy mocą zespoloną (por. [4]) przebiegów rzeczywistych $u(t)$ i $i(t)$. Na podstawie (2.03), (2.04), (1.29) oraz (1.31), otrzymamy:

$$\hat{S} = P + j\,Q \tag{3.08}$$

Zachodzi (por. (2.08)):

$$S = |\hat{S}| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \left| \int_{-T}^{T} \hat{U}(t)\, \check{I}(t)dt \right| \tag{3.09}$$

oraz (por. (2.07)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} \hat{U}(t)\, \check{I}(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{U_{\varepsilon}(\omega)\, I_{\varepsilon}^{*}(\omega)d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{3.10}$$

Przyjmijmy, że przebiegi $u(t)$ i $i(t)$ posiadają postać (3.03), to znaczy, niech:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{mn} \cos(\omega_n t + \beta_n); \quad i(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{mn} \cos(\omega_n t + \alpha_n)$$

Otrzymamy (por. (3.05)):

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{mn}\, e^{j\beta_n}\, e^{j\omega_n t}; \quad \hat{I}(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{mn}\, e^{j\alpha_n}\, e^{j\omega_n t}$$

$$\hat{U}(t)\, \check{I}(t) = \sum_{n,r=1}^{N} U_{mn}\, I_{mn}\, e^{j(\beta_n-\alpha_r)}\, e^{jt(\omega_n-\omega_r)}$$

Stąd:

$$\hat{S} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} \hat{U}(t)\, \check{I}(t)dt = \sum_{n=1}^{n=N} U_n\, I_n\, e^{j\psi_n}$$

gdzie:

$$U_n = \frac{U_{mn}}{\sqrt{2}};\quad I_n = \frac{I_{mn}}{\sqrt{2}};\quad \psi_n = \beta_n - \alpha_n$$

Ogólnie, dla każdej skończonej wartości T prawdziwa jest tożsamość:

$$\int_{-T}^{T} |\hat{U}(t)|^2 dt \cdot \int_{-T}^{T} |\hat{I}(t)|^2 dt = \left| \int_{-T}^{T} \hat{U}(t)\, \check{I}(t)dt \right|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left| \hat{U}(t)\, \hat{I}(\tau) - \hat{U}(\tau)\, \hat{I}(t) \right|^2 dt\, d\tau \qquad (3.11)$$

a ponieważ granica (por. (3.02)):

$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} |\hat{U}(t)|^2 dt \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} |\hat{I}(t)|^2 dt$ istnieje określona jest także

wielkość K zdefiniowana przy pomocy relacji:

$$K \overset{df}{=} \sqrt{\lim_{T,T\to\infty} \left(\frac{1}{4T}\right)^2 \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left| \hat{U}(t)\, \hat{I}(\tau) - \hat{U}(\tau)\, \hat{I}(t) \right|^2 dt\, d\tau} \qquad (3.12)$$

K nazwiemy mocą deformacji przebiegów u(t) oraz i(t).
Na podstawie (3.11), otrzymamy (por. (2.02), (3.09)):

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2 \qquad (3.13)$$

Zauważmy, że gdy:

$$\hat{I}(t) = \lambda \hat{U}(t)$$

gdzie λ jest wielkością stałą (zespoloną lub rzeczywistą), to moc K jest równa zero.

Połóżmy (por. [7]):

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_i(t) + \hat{I}_\psi(t)$$
$$\hat{I}_i(t) = \frac{\check{S}}{U^2}\hat{U}(t) \tag{3.14}$$

Zachodzi:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\hat{I}_i(t)\,\check{I}_\psi dt = \frac{\check{S}}{U^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\hat{U}(t)\left[\hat{I}(t) - \frac{\hat{S}}{U^2}\check{U}(t)\right]dt$$

Czyli:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\hat{I}_i(t)\,\check{I}_\psi(t)dt = C \tag{3.15}$$

Mamy:

$$I^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\left|I(t)\right|^2 dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\left|\hat{I}_i(t)\right|^2 dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\left|\hat{I}_\psi(t)\right|^2 dt$$

$$I^2 = \frac{S^2}{U^2} + I_\psi^2 \tag{3.16}$$

Porównując (3.16) z relacją (3.13), otrzymamy:

$$K = U\,I_\psi \tag{3.17}$$

gdzie I_ψ jest wartością skuteczną przebiegu zespolonego $\hat{I}_\psi(t)$.

LITERATURA

[1] Wiener N.: The Fourier Integral and Certain of its Applications. Dover Publications INC. New York.

[2] Papoulis A.: The Fourier Integral and its Applications. Mc Graw-Hill Book Company, INC. New York 1962.

[3] Nowomiejski Z.: Moc w układach elektrycznych o przebiegach nieokresowych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 36, 1972.

[4] Nowomiejski Z.: Uogólniona metoda symboliczna. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 20, 1966.

[5] Gabor D.: Theory of Communication. Inst. Electr. Engrs. 93, 429, 1946.

[6] Nowomiejski Z.: Teoria kompensacji mocy biernej. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 42, 1973.

[7] Nowomiejski Z.: O pewnych zagadnieniach dotyczących mocy deformacji w układach o przebiegach odkształconych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 22, 1967.

Przyjęto do druku w maju 1974 r.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ МОЩНОСТИ

Р е з ю м е

Автор рассматривает и обосновывает в статье общую теорию мощности протеканий, которые не изображаются по фурье. Найдены новые зависимости между протеканиями и их мощностью путем применения обобщенного изображения функции фурье, введенной Н. Венером.

GENERALIZED THEORY OF POWER

S u m m a r y

In the paper the generalized theory of the power of currents which cannot be transformed according to Fourier is described and justified. New relationships between the current and its power are found. For this purpose a generalized Fourier transform introduced by N. Wiener was applied.