ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 46 Nr kol. 427

Ewa Lipowska

Katedra Elektroniki
WSP w Opolu

# ISTOTNE OSOBLIWOŚCI FUNKCJI IMMITANCJI LINII O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę służącą do oddzielania istotnej osobliwości impedancji linii zrównoważonej przedstawionej w postaci rozwiniętego ułamka łańcuchowego.

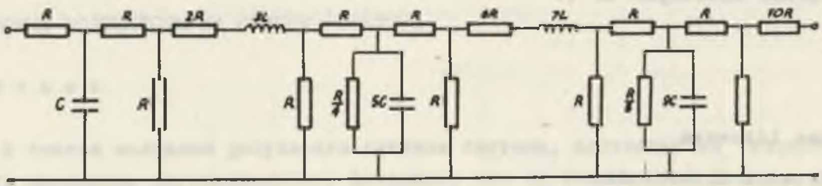
Przypadkiem szczególnym podstawowego typu obwodu elektrycznego o parametrach rozłożonych jest linia długa zrównoważona. Linię długą można przedstawić w postaci łańcucha półogniw, czyli czwórników typu ˥ i Γ, które tworzą tzw. sieć drabinkową [4]. Przy założeniu, że linia jest zrównoważona funkcje przenoszenia czwórnika są zawsze funkcjami wymiernymi. Czwórnik obciążony można traktować jako dwójnik, którego immitancja jest szczególnym przypadkiem funkcji przenoszenia czwórnika. Jest więc ona funkcją wymierną. Opierając się na twierdzeniu Brune'a i Botta-Duffina [3] immitancję tę można zrealizować w postaci pewnego modelu fizycznego. Taki model fizyczny sieci zostanie poniżej omówiony. Przedstawmy impedancję rozpatrywanej sieci drabinkowej (rys. 1) w postaci rozwiniętego ułamka łańcuchowego [2]:

$$Z(p) = R + \frac{1\,|}{|\,pC} + \frac{1\,|}{|\,R} + \frac{1\,|}{|\,\frac{1}{R}} + \frac{1\,|}{|\,3pL + 2R} + \frac{1\,|}{|\,\frac{1}{R}} + \frac{1\,|}{|\,R} + \frac{1\,|}{|\,5pC + \frac{4}{R}} + \frac{1\,|}{|\,R} + \frac{1\,|}{|\,\frac{1}{R}} +$$

$$+ \frac{1\,|}{|\,7pL + 6R} + \frac{1\,|}{|\,\frac{1}{R}} + \frac{1\,|}{|\,R} + \frac{1\,|}{|\,9pC + \frac{8}{R}} + \frac{1\,|}{|\,R} + \frac{1\,|}{|\,\frac{1}{R}} + \ldots$$

$$= R\left[1 + \frac{1\,|}{|\,pRC} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,\frac{3pL}{R} + 2} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,5pRC + 4} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1\,|}{|\,\frac{7pL}{R} + 6} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,9pRC + 8} + \frac{1\,|}{|\,1} + \ldots \right. \tag{1}$$



Rys. 1

Wiemy, że

$$\exp\left[\frac{1}{z}\right] = 1 + \frac{1\,|}{|\,z-1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,3z-1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,5z-1} + \ldots \tag{2}$$

Wprowadzamy następujące ograniczenie:
RC = L/R - linia zrównoważona [1], [4] i podstawiamy, że zmienna zespolona $z = pT + 1$ gdzie $T = RC$.
Wtedy impedancję $Z(p)$ sieci z rys. 1 możemy zapisać w postaci [2]:

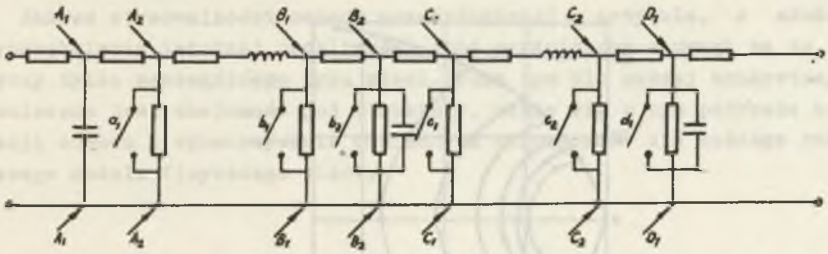
$$Z(p) = R\exp\left[\frac{1}{pT+1}\right] \tag{3}$$

Jest ona funkcją wymierną mającą punkt istotnie osobliwy w początku układu współrzędnych dla $p = -\frac{1}{T}$. Po rozwinięciu w szereg

$$Z(p) = R\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(pT+1)^{-m}}{m!} \tag{4}$$

W konsekwencji wprowadzonych ograniczeń system jest zdegenerowany.

Wiemy, że nie można zbudować modelu sieci nieskończonej. Możliwa wydaje się natomiast konstrukcja systemu o dużej liczbie zespołów, który może być aproksymacją sieci nieskończonej. Kolejne przybliżenia w wyrażeniu na $Z(p)$ odpowiadające zwiększaniu liczby zespołów uzyskuje się przez branie zwiększonej liczby wyrazów rozwiniętego ułamka łańcuchowego. Wszystkie kolejne aproksymacje są wymiernymi ułamkami postaci $f = \frac{g_1}{g_2}$ gdzie $g_1$ i $g_2$ są wielomianami względem p. Należą one do trzech grup: pierwsza obejmująca 2, 5, 8, ... wyrazów, druga 3, 6, 9, ... i trzecia 4, 7, 10, ... Ogólnie grupy te można zapisać jako $f_{n+1}$, $f_{n+2}$, $f_{n+3}$ gdzie $n = 1,2,3,\ldots$ Każde kolejne przybliżenie odpowiada szczególnej sieci utworzonej przez odcięcie części systemu z rys. 1 w różnych punktach. W tym celu stosuje się przełączniki odpowiednio skracające rozpatrywaną sieć. Taka aproksymacja dla funkcji impedancji $\exp\left[\frac{1}{1+p}\right]$ jest pokazana na rys. 2 i wyjaśnioną w tabeli I.



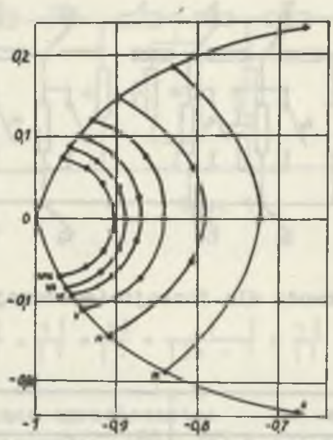
Rys. 2. Aproksymacja obwodu dla funkcji impedancji $\exp\left[\frac{1}{1+p}\right]$

Tabela I

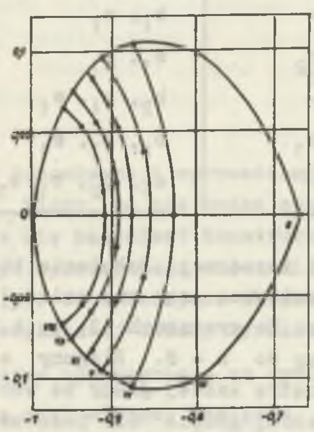
| Aproksymacja | | | | Obwód | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Przełącznik | |
| Nr | Nr wyrazu | n | Odcięcie | zamknięty | otwarty |
| 1 | 2 | 1 | $A_1 - A_1$ | - | - |
| 2 | 3 | 1 | $A_2 - A_2$ | $a_1$ | - |
| 3 | 4 | 1 | $A_2 - A_2$ | - | $a_1$ |
| 4 | 5 | 2 | $B_1 - B_1$ | $b_1$ | $a_1$ |
| 5 | 6 | 2 | $B_1 - B_1$ | - | $b_1$, $a_1$ |
| 6 | 7 | 2 | $B_2 - B_2$ | $b_2$ | $b_1$, $a_1$ |
| 7 | 8 | 3 | $B_2 - B_2$ | - | $b_2$, $b_1$, $a_1$ |
| 8 | 9 | 3 | $C_1 - C_1$ | $c_1$ | $b_2$, $b_1$, $a_1$ |
| 9 | 10 | 3 | $C_1 - C_1$ | - | $c_1$, $b_2$, $b_1$, $a_1$ |

Pierwiastki równania $g_2(p) = 0$ są biegunami impedancji. Położenie biegunów funkcji określa stopień aproksymacji; ograniczone są one osią $-1$. Im większe jest $n$ tym lepsza jest aproksymacja. Na rysunkach 3, 4 i 5 widać położenie biegunów dla każdej z trzech grup do $n = 8$. Bieguny są położone na prawo od istotnej osobliwości i wewnątrz każdej grupy ze wzrostem $n$ zbliżają się do osobliwego punktu. W każdej grupie dla poszczególnych $n$ bieguny wydają się być usytuowane na pewnych krzywych. Krzywe te w każdej z grup tworzą pewną rodzinę. Im większe jest $n$, tym bardziej krzywe zbliżają się do istotnej osobliwości. Miejscem geometrycznym ekstremów biegunów wszystkich krzywych danej rodziny jest obwiednia tych krzywych.

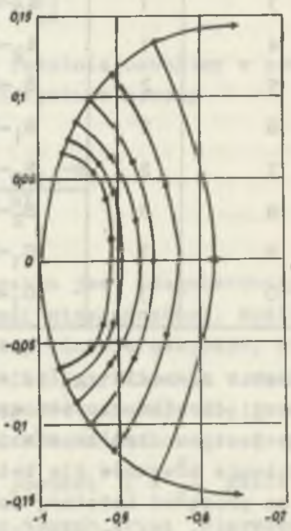
Bieguny te zostały obliczone przez dr H. Osera z Narodowego Biura Wzorców w Waszyngtonie za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej.



Rys. 3. Bieguny kolejnych aproksymacji funkcji impedancji $\exp\left[\frac{1}{1+p}\right]$.
Grupa n + 1



Rys. 4. Bieguny kolejnych aproksymacji funkcji impedancji $\exp\left[\frac{1}{1+p}\right]$.
Grupa n + 2



Rys. 5. Bieguny kolejnych aproksymacji funkcji impedancji $\exp\left[\frac{1}{1+p}\right]$.
Grupa n + 3

Zakres stosowalności metody przedstawionej w artykule, a służącej do wyodrębnienia istotnej osobliwości jest ograniczony z uwagi na to, że dotyczy tylko szczególnego typu sieci. Poza tym dla każdej konkretnej sieci konieczna jest znajomość jej struktury, wiąże się z tym potrzeba aproksymacji obwodu i opracowywanie odmiennych algorytmów dla każdego rozpatrywanego modelu fizycznego sieci.

LITERATURA

[1] Atabiekow G.I.: Teoria liniowych obwodów elektrycznych. WNT Warszawa 1964 r.

[2] Gross B., Braga E.P.: Singularities of Linear System Functions Elsirver Monographs. Amsterdam London (New York) Princeton 1961 r.

[3] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego - teoria i zastosowania w elektrotechnice. WNT Warszawa 1972 r.

[4] Kurzawa S.: Liniowe obwody elektryczne. PWN Warszawa 1971 r.

Przyjęto do druku w maju 1974 r.

СУЩЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИИ ИМПЕДАНСА
ЛИНИИ С РАЗЛОЖЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

Предлагается метод, служащий для отделения существенной особенности уравновешенного импеданса линии, представленной в форме разветвленной цепной дроби.

ESSENTIAL SINGULARITIES OF IMPEDANCE
FUNCTIONS FOR A LINE OF DISTRIBUTED PARAMETERS

S u m m a r y

In this paper a method for isolating the essential singularity of the impedance of a balanced line is shown. This impedance is given by a continued fraction expansion.