ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 46 Nr kol. 427

Jerzy Bajorek

Instytut Elektroniki
Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Rzeszowie

O PEWNEJ INTERPRETACJI TWIERDZENIA LORENTZA - VAN DER POLA

Streszczenie. W pracy podano związek funkcji przejścia liniowego i pasywnego dwójnika elektrycznego z częścią energii wydanej ze źródła przy jednostkowym wymuszeniu napięciowym. Otrzymana zależność jest uzupełnieniem związków energetycznych Lorentza - Van der Pola.

Rozważmy liniowy obwód elektryczny z wymuszeniami napięciowymi. Niech będzie on złożony z pasywnych elementów R, L, C i opisany równaniem macierzowym wynikającym z drugiego prawa Kirchhoffa

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{Z}(s)\,\mathbf{I}(s) \tag{1}$$

Macierze kolumnowe $\mathbf{E}(s)$ i $\mathbf{I}(s)$ o wymiarach Nx1 (N - liczba oczek niezależnych) są macierzami napięć i prądów oczkowych otrzymanymi z macierzy napięć i prądów gałęziowych przy pomocy macierzy strukturalnej [4]. O elementach macierzy $\mathbf{E}(s)$ i $\mathbf{I}(s)$ zakładamy, że są dwustronnymi transformatami Laplace'a. Oznacza to, że istnieje wspólny przedział zbieżności w postaci niepustego zbioru s, w którym całki

$$I_k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t)\, e^{-st}\, dt \qquad k = 1,\dots,N \tag{2a}$$

$$E_k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e_k(t)\, e^{-st}\, dt \qquad k = 1,\dots,N \tag{2b}$$

są zbieżne [8].

Macierz $\mathbf{Z}(s)$ jest macierzą impedancji oczkowych otrzymaną przy pomocy macierzy strukturalnej z macierzy impedancji gałęziowych. Jest to macierz symetryczna o wymiarach NxN, której elementy leżące na głównej przekątnej są pełnymi impedancjami poszczególnych oczek, zaś pozostałe elementy są wzajemnymi impedancjami międzyoczkowymi [7]. Elementy macierzy $\mathbf{Z}(s)$ są w przypadku ogólnym postaci

$$Z_{kl}(s) = s\,L_{kl} + R_{kl} + \frac{1}{s\,C_{kl}} \tag{3}$$

Rozwiązanie równania (1) ze względu na szukaną odpowiedź prądową można zapisać w postaci

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{K}(s)\,\mathbf{E}(s) \tag{4}$$

w której

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1} \tag{5}$$

jest funkcją przejścia układu [4].
Ponieważ z przesłanek fizycznych wynika, że macierz impedancji oczkowych $\mathbf{Z}(s)$ jest macierzą nieosobliwą, funkcja przejścia dla opisywanego układu zawsze istnieje [5].

Jeżeli w całym obwodzie mamy tylko jedno niezerowe wymuszenie w postaci impulsu jednostkowego

$$e_l(t) = \mathbf{1}(t) \tag{6}$$

i l-ta gałąź wchodzi tylko do jednego z wybranych oczek niezależnych, to oznaczając przez $I_{k\mathbf{1}}(s)$ odpowiedź na takie wymuszenie w k-tym oczku, możemy napisać równanie (4) w postaci

$$I_{k\mathbf{1}}(s) = K_{lk}(s)\,\frac{1}{s} \tag{7}$$

Funkcja przejścia na zaciskach źródła wymuszającego jest więc równa

$$K_{ll}(s) = s\,I_{l\mathbf{1}}(s) \tag{8}$$

Dla rozważanego obwodu Van der Pol w swojej pracy [8] udowodnił następujące twierdzenie.

Tw. 1: Niech w liniowym obwodzie elektrycznym o zerowych warunkach początkowych zostanie włączone w l-tej gałęzi jednostkowe źródło napięcia przy wyzerowanych pozostałych źródłach. Jeżeli wszystkie bieguny funkcji przejścia na zaciskach niezerowego źródła leżą w półpłaszczyźnie Re $s<0$, to granica pochodnej funkcji przejścia po s, dla $s \to 0^+$, równa jest granicy podwojonej różnicy energii pola elektrycznego pojemności i energii pola magnetycznego indukcyjności dla $t \to \infty$:

$$K'_{ll}(0) = 2\left[V(\infty) - T(\infty)\right] \tag{9}$$

Dowód twierdzenia związany jest ściśle z pojęciem dwustronnej transformacji Laplace'a. Istotne dla dowodu jest przytoczone również w [8] twierdzenie Abela.

Tw. 2: Jeżeli $f(t)$ jest funkcją transformowalną w sensie istnienia dwustronnej transformaty Laplace'a

$$f(t) \triangleq F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{10}$$

oraz istnieje granica funkcji

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = f(\infty) \tag{11}$$

to zachodzi

$$\lim_{s \to 0^+} s\, F(s) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

Symbol $s \to 0^+$ oznacza tutaj zmierzanie do zera po dodatniej półosi rzeczywistej, to znaczy dla s rzeczywistych.

Tw. 1 w nieco innej formie podał już Heaviside [3], a jego pierwszy, bardzo ogólny, oparty na równaniach Maxwella, dowód przeprowadził Lorentz [6]. W oparciu o podaną zależność (9) można sformułować inny związek energetyczny przeprowadzając dowód następującego twierdzenia.

Tw. 3: Jeżeli są spełnione założenia Tw. 1, to granica pochodnej funkcji przejścia, dla $s \to 0^+$, równa jest energii wydanej ze źródła, związanej ze składową przejściową prądu źródła $i_{pl}(t)$

$$K'_{11}(0) = \int_{0}^{\infty} i_{pl}(t)\, dt \tag{13}$$

Korzystając z Tw. 1 można równocześnie stwierdzić, że energia wydana ze źródła, związana ze składową przejściową prądu przy wymuszeniu jednostkowym, jest równa granicy podwojonej różnicy energii pola elektrycznego pojemności i energii pola magnetycznego indukcyjności dla $t \to \infty$

$$\int_{0}^{\infty} i_{pl}(t)\, dt = 2\left[V(\infty) - T(\infty)\right] \tag{14}$$

D: Odpowiedź prądowa układu z elementami liniowymi może być zawsze rozłożona na składową przejściową i ustaloną. Składowa przejściowa jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, dla którego stałe obliczane są w oparciu o zadane warunki początkowe, a składowa ustalona zachowuje charakter wymuszenia, czyli dla wymuszenia w postaci funkcji jednostkowej składowa ustalona będzie funkcją stałą [2].

$$i_l(t) = i_{pl}(t) + i_{ul} \tag{15}$$

Przyjmijmy równanie (7) w uproszczonym zapisie

$$I(s) = K(s)\,\frac{1}{s} \tag{16}$$

Tak więc dla całego obwodu traktowanego jako dwójnik o zaciskach pokrywających się z zaciskami źródła zachodzi

$$K(s) = s\,I(s) \tag{17}$$

Korzystając z zerowych warunków początkowych i całki definicyjnej transformaty prądu możemy napisać

$$K(s) = s\int_0^{\infty} e^{-st}\,i(t)\,dt \tag{18}$$

Z faktu, że $i(t)$ jest funkcją transformowalną wynika holomorficzność funkcji $K(s)$ [7]. Korzystając z tego możemy obliczyć pochodną

$$\frac{d\,K(s)}{ds} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,i(t)\,dt - s\int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,i(t)\,dt \tag{19}$$

Jeżeli uwzględnimy równanie (15), to równanie (19) przyjmuje postać

$$K'(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,i_p(t)\,dt + i_u\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt +$$

$$- s\int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,i_p(t)\,dt - s\,i_u\int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,dt \tag{20}$$

W wyniku całkowania czwartej całki otrzymujemy

$$-s\,i_u \int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,dt = -\,i_u \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \tag{21}$$

Podstawienie równania (21) do równania (20) prowadzi do zależności

$$K'(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,i_p(t)\,dt - s \int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,i_p(t)\,dt \tag{22}$$

Rozważmy dla równania (22) przejście graniczne $s \to 0^+$, to znaczy przejście z s do zera po dodatniej półosi rzeczywistej. Ponieważ druga całka w (22) istnieje dla $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, to przy przejściu granicznym $s \to 0^+$ związany z nią człon nie da przyczynku do granicy po prawej stronie. Aby wykonać przejście graniczne dla pierwszej całki w równaniu (22) zastosujemy znane twierdzenie o przejściu do granicy pod znakiem całki [1]. Ponieważ funkcja $e^{-st}\,i_p(t)$ przy ustalonym s jest całkowalna względem t w przedziale $[0,\infty)$ i dla $s \to 0^+$ dąży do funkcji całkowalnej w przedziale $[0,\infty)$ w sposób jednostajny, to możemy napisać

$$K'(0) = \lim_{s\to 0^+} \int_0^{\infty} e^{-st}\,i_p(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \lim_{s\to 0^+} e^{-st}\,i_p(t)\,dt = \int_0^{\infty} i_p(t)\,dt \tag{23}$$

Otrzymana zależność (23) kończy dowód Tw. 3.

Podane uzupełnienie Tw. 1 jest interesującym związkiem energetycznym dla liniowego i pasywnego dwójnika elektrycznego. Powiązanie energii wydanej ze źródła z rozkładem energii w obwodzie i funkcją przejścia obwodu jest przyczynkiem do badań nad przepływem i zmianą form energii w obwodach elektrycznych.

LITERATURA

[1] Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy, t. II. Warszawa 1965.
[2] Guillemin E.A.: Theory of Linear Physical Systems. New York, 1963.
[3] Heaviside O.: Electrical Papers, vol. II. London, 1892.
[4] Kurzawa S.: Liniowe obwody elektryczne. Warszawa, 1971.
[5] Lewis W.E., Pryce D.G.: The Application of Matrix Theory to Electrical Engeneering. London, 1965.
[6] Lorentz H.A.: Proof of the Theorem Due to Heaviside. Collected Papers, Hague, 1936, vol. III, p. 331-337.
[7] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. Warszawa, 1972.
[8] Van der Pol B., Bremmer H.: Operational Calculus Pased on the Two-sided Laplace Integral. Cambridge University Bress, 1955.

Przyjęto do druku w sierpniu 1974 r.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕОРЕМЫ ЛОРЕНЦА-ВАН ДЕР ПОЛЯ

Р е з ю м е

В работе получена связь между адмитансом электрической цепи и частью энергии, потерянной источником при единичной функции напряжения.Работа является приложением к энергетическим связям Лоренца-Ван дер Поля.

AN INTERPRETATION OF THE LORENTZ - VAN DER POL'S THEOREM

S u m m a r y

The paper deals with the relation between the passage of a linear and a passive one-port network function and a part of energy of the source when the voltage source is suddenly applied to the electric circuit. The obtained relation is a suplement to the Lorentz - Van der Pol's theorem.