ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 45 Nr kol. 413

Zofia CICHOWSKA

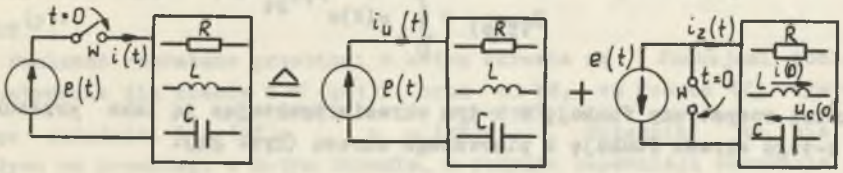
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O PEWNYM SPOSOBIE WYKORZYSTANIA TRANSFORMATY ZA OKRES

Streszczenie. Przedstawiono sposób obliczania przebiegów w obwodach liniowych w stanie nieustalonym przy pobudzeniach okresowych wykorzystując metodę dwóch przeciwnych stanów ustalonych. Sposób ten pozwala uzyskać rozwiązanie w postaci skończonej liczby wyrazów w czasie dowolnego okresu. Rozważania zilustrowano przykładem.

Bezpośrednie zastosowanie rachunku operatorowego przy wymuszeniach okresowych prowadzi do rozwiązania, którego postać czasowa jest sumą szeregu nieskończonego. Również przez wstępne rozwinięcie okresowej siły elektromotorycznej w szereg Fouriera i zastosowanie metody superpozycji otrzymuje się taki sam rezultat. Zastosowanie transformaty za okres pozwoli uzyskać rozwiązanie w czasie dowolnego okresu w postaci skończonej liczby wyrazów. Rozpatrzmy załączenia w chwili $t = 0$ do obwodu liniowego pasywnego o zerowych warunkach początkowych *) siły elektromotorycznej okresowej, a więc spełniającej równanie

$$e(t) = e(t+kT) \quad \text{gdzie} \quad k = 0,1,2... \tag{1}$$



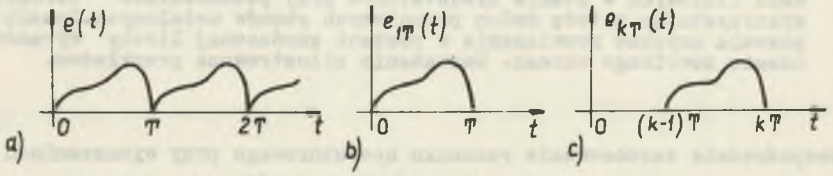
Rys. 1

*) Uwzględnienie niezerowych warunków początkowych jest możliwe, wymaga jednak wprowadzenia do układu przedstawionego na rys. 1 dodatkowego obwodu.

Załóżmy, że funkcja e(t) spełnia warunki Dirichleta. Stosując metodę dwóch przeciwnych stanów ustalonych [4] (rys. 1) można obliczyć prąd nieustalony jako sumę prądu ustalonego $i_u(t)$ pochodzącego od zgodnej siły elektromotorycznej i prądu zaburzeniowego $i_z(t)$ pochodzącego od warunków początkowych zwieranej w chwili t = 0 przeciwnie skierowanej siły elektromotorycznej.

$$i(t) = i_u(t) + i_z(t) \tag{2}$$

Wyznaczenie składnika $i_z(t)$ nie przedstawia trudności po uprzednim wyznaczeniu $i_u(t)$, którym to składnikiem zajmiemy się szczegółowo. Na rys. 2a przedstawiono przykładowy przebieg okresowej siły elektromotorycznej.



Rys. 2

Oznaczmy przez $e_{1T}(t)$ przebieg funkcji w ciągu pierwszego okresu (rys. 2b).

$$e_{1T}(t) = e(t)\left[1(t) - 1(t-T)\right] \tag{3}$$

Funkcja $e_{1T}(t)$ jest funkcją dwustronnie obciętą [2]. Transformata Laplace'a funkcji $e_{1T}(t)$ jest określona zależnością

$$E_{1T}(p) = \int_0^T e(t)e^{-pt}dt \tag{4}$$

Z kolei rozpatrzmy funkcję w k-tym okresie traktując ją jako przesuniętą do k-tego okresu funkcję z pierwszego okresu (rys. 2c).

$$e_{kT}(t) = e_{1T}\left[t-(k-1)\,T\right] \tag{5}$$

Transfromata funkcji $e_{kT}(t)$ na podstawie twierdzenia o przesunięciu ma postać

$$E_{kT}(p) = E_{1T}(p)e^{-p(k-1)T} \tag{6}$$

Transformata prądu ustalonego k-tym okresie zawiera składową pochodzącą od siły elektromotorycznej wymuszającej w tym okresie $E_{kT}(p)$ oraz składowe pochodzące od warunków początkowych cewek i kondensatorów w chwili $t = (k-1)T$, dla których przyjęto oznaczenia

$$i_n(t)\Big|_{t=(k-1)T} = i_n\left[(k-1)T\right]; \qquad i_n(t)\Big|_{t=kT} = i_n(kT)$$

$$u_n(t)\Big|_{t=k-1\ T} = u_n\left[(k-1)T\right]; \qquad u_n(t)\Big|_{t=kT} = u_n(kT)$$

Załóżmy, że rozpatrywany obwód zawiera q cewek i r kondensatorów, a $Z(p)$ jest operatorową impedancją obwodu, wówczas

$$J_{ukT}(p) = \frac{E_{kT}(p)}{Z(p)} + \sum_{n=1}^{q} \frac{\left\{ L_n i_n\left[(k-1)T\right] e^{-p(k-1)T} - L_n i_n(kT)\, e^{-pkT} \right\} P_n(p)}{H_n(p)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{r} \frac{\left\{ u_n\left[(k-1)T\right] e^{-p(k-1)T} - u_n(kT)\, e^{-pkT} \right\} Q_n(p)}{pK_n(p)} \qquad (7)$$

$\frac{P_n(p)}{H_n(p)}$ i $\frac{Q_n(p)}{K_n(p)}$ są to operatorowe immitancje zależne od konfiguracji obwodu, określające wpływ poszczególnych warunków początkowych na prąd $J_{ukT}(p)$.

Ponieważ rozważane przebiegi w k-tym okresie są funkcjami obciętymi dwustronnie dla czasów $t < (k-1)T$ oraz $t > kT$, we wzorze (7) występują więc składniki $L_n i_n(kT)e^{-pkT}$ i $u_n(kT)e^{-pkT}$. Składniki te nie mają wpływu na przebiegi w k-tym okresie, a jedynie zapewniają zerowanie przebiegów poza przedziałem, a więc dla czasów $t > kT$ [2].

Rozważania można przeprowadzić również w oparciu o funkcje obcięte jednostronnie dla czasów $t < (k-1)T$, wtedy jednak w końcowym wyniku po przejściu na postać czasową należy obciąć przebieg dla czasów $t > kT$ odpowiednią funkcją jednostkową przesuniętą (por. przykład). Transformata prądu ustalonego ma wówczas postać

$$J_{ukT}(p) = \frac{E_{kT}(p)}{Z(p)} + \sum_{n=1}^{q} \frac{L_n i_n\left[(k-1)T\right] e^{-p(k-1)T} P_n(p)}{H_n(p)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{r} \frac{u_n\left[(k-1)T\right] e^{-p(k-1)T} Q_n(p)}{pK_n(p)} \tag{7a}$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymamy przebieg czasowy prądu ustalonego w k-tym okresie w postaci skończonej ilości wyrazów

$$i_{ukT}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{J_{ukT}(p)\right\} \tag{8}$$

Warunki początkowe $i_n\left[(k-1)T\right]$ oraz $u_n\left[(k-1)T\right]$ należy wyznaczyć z warunków ciągłości prądów w cewkach i napięć na kondensatorach oraz faktu ustalenia przebiegów porównując odpowiednie wartości dla czasów $t = (k-1)T$ i $t = kT$

$$i_n\left[(k-1)T\right] = i_n(kT) \tag{9}$$

$$u_n\left[(k-1)T\right] = u_n(kT) \tag{10}$$

Aby otrzymać przebieg nieustalony w dowolnym k-tym okresie należy dodać do prądu ustalonego przebieg prądu zaburzeniowego w tym przedziale czasu.

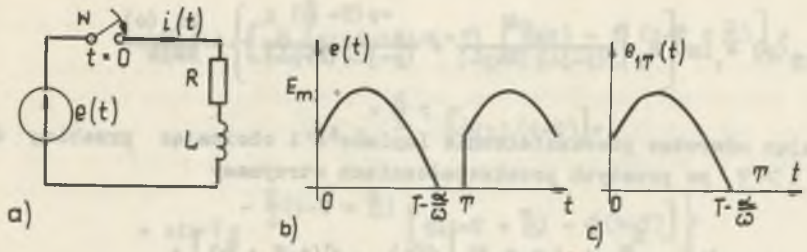
$$i_{kT}(t) = i_{ukT}(t) + i_z(t)\left\{1\left[t - (k-1)T\right] - 1(t-kT)\right\} \tag{11}$$

Całkowity przebieg prądu nieustalonego można przedstawić jako

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} i_{ukT}(t) + i_z(t) \tag{12}$$

Przykład

Należy obliczyć przebieg prądu w układzie przedstawionym na rys. 3a, w którym wyłącznik w zostaje zamknięty w chwili $t = 0$. Przebieg siły elektromotorycznej okresowej o okresie T (rys. 3b) określony jest zależnością



Rys. 3

$$e(t) = \begin{cases} E_m \sin(\omega t + \alpha) & \text{dla} \quad 0 < t < T - \frac{\alpha}{\omega} \\ 0 & \text{dla} \quad T - \frac{\alpha}{\omega} < t < T \end{cases}$$

gdzie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Przebieg siły elektromotorycznej w oiągu pierwszego okresu ma postać

$$e_{1T}(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)\left[1(t) - 1(t-T+\tfrac{\alpha}{\omega})\right]$$

Przebieg ten można przedstawić następująco

$$e_{1T}(t) = \mathrm{Im}\left\{E_m e^{j(\omega t + \alpha)}\right\}\left[1(t) - 1(t-T+\tfrac{\alpha}{\omega})\right]$$

Korzystając z cechy przemienności przekształcenia Laplace'a i symbolicznego działania Im obliczamy transformatę

$$E_{1T}(p) = \mathrm{Im}\left\{E_m\left[\frac{e^{j\alpha}}{p-j\omega} + \frac{e^{-p(T-\frac{\alpha}{\omega})}}{p-j\omega}\right]\right\}$$

Aby wyznaczyć przebiegi w k-tym okresie należałoby dokonać teraz przesunięcia do k-tego okresu (w postaci operatorowej pomnożenie transformaty przez $e^{-p(k-1)T}$). Rezultat końcowy będzie taki sam, jeżeli zmienimy kolejność postępowania, tj. najpierw obliczymy transformatę prądu ustalonego w pierwszym okresie, przejdziemy na postać czasową, a na końcu doko-

namy przesunięcia do k-tego okresu. W tym wariancie uzyskuje się przejrzysty przebieg obliczeń.

$$J_{u1T}(p) = \mathrm{Im}\left\{E_m\left[\frac{e^{j\alpha}}{(p-j\omega)(R+pL)} + \frac{e^{-p(T-\frac{\alpha}{\omega})}}{(p-j\omega)(R+pL)}\right]\right\} + \frac{Li_u(o)}{R+pL}$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a i obcinając przebieg dla czasów $t > T$ po prostych przekształceniach otrzymamy

$$i_{u1T}(t) = \frac{E_m}{Z}\sin(\omega t+\alpha-\varphi)\left[1(t) - 1(t-T+\frac{\alpha}{\omega})\right] +$$

$$+\left[i_u(o) - \frac{E_m}{Z}\sin(\alpha-\varphi)\right]e^{-\frac{R}{L}t}\left[1(t) - 1(t-T)\right] +$$

$$+\frac{E_m}{Z}\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}(t-T+\frac{\alpha}{\omega})}\left[1(t-T+\frac{\alpha}{\omega}) - 1(t-T)\right]$$

gdzie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \qquad \varphi = \mathrm{arc\ tg}\frac{\omega L}{R}.$$

Na podstawie uzyskanego przebiegu obliczamy wartość prądu dla $t = T$ czyli $i_u(T)$ w celu wyznaczenia nieznanego dotąd warunku początkowego $i_u(o)$. Korzystając z warunku ciągłości prądu w cewce i ustalenia przebiegu

$$i_u(o) = i_u(T)$$

otrzymamy

$$i_u(o) = \frac{E_m\left[\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}\frac{\alpha}{\omega}} - \sin(\alpha-\varphi)e^{-\frac{R}{L}T}\right]}{Z(1-e^{-\frac{R}{L}T})}$$

Wprowadzając obliczony warunek początkowy do przebiegu prądu ustalonego i oznaczając

$$A = \frac{\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}\frac{\alpha}{\omega}} - \sin(\alpha-\varphi)}{1-e^{-\frac{R}{L}T}}$$

otrzymamy

$$i_{u1T}(t) = \frac{E_m}{Z}\left\{\sin(\omega t + \alpha - \varphi)\left[1(t) - 1\left(t-T+\frac{\alpha}{\omega}\right)\right] + \right.$$

$$+ A\, e^{-\frac{R}{L}t}\left[1(t)\,(t-T)\right] +$$

$$\left. + \sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}\left(t-T+\frac{\alpha}{\omega}\right)}\left[1\left(t-T+\frac{\alpha}{\omega}\right) - 1(t-T)\right]\right\}$$

Przesuwając rozwiązanie do dowolnego k-tego okresu, czyli wstawiając w miejsce t wyrażenie $[t - (k-1)T]$ otrzymamy

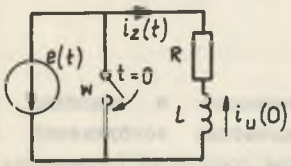
$$i_{ukT}(t) = \frac{E_m}{Z}\left\{\sin\left[\omega(t-kT+T) + \alpha - \varphi\right]\left[1(t-kT+T) - 1\left(t-kT+\frac{\alpha}{\omega}\right)\right] + \right.$$

$$+ A\, e^{-\frac{R}{L}(t-kT+T)}\left[1(t-kT+T) - 1(t-kT)\right] +$$

$$\left. + \sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}\left(t-kT+\frac{\alpha}{\omega}\right)}\left[1\left(t-kT+\frac{\alpha}{\omega}\right) - 1(t-kT)\right]\right\}$$

Przebieg prądu zaburzeniowego $i_z(t)$ na podstawie schematu przedstawionego na rys. 4 ma postać

$$i_z(t) = -\frac{E_m\left[\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}\frac{\alpha}{\omega}} - \sin(\alpha-\varphi)\, e^{-\frac{R}{L}T}\right]}{Z\left(1-e^{-\frac{R}{L}T}\right)}\, e^{-\frac{R}{L}t}\, 1(t)$$

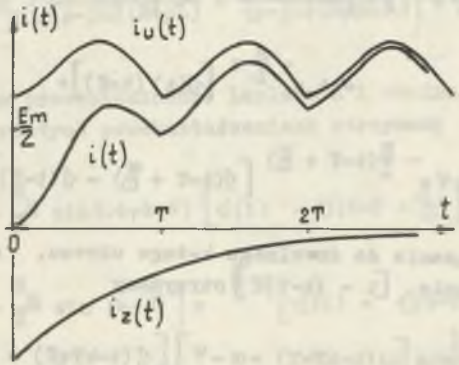


Rys. 4

Całkowity przebieg prądu nieustalonego na podstawie wzoru (12)

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} i_{ukT}(t) + i_z(t)$$

Przebieg ten oraz jego składowe $i_u(t)$ i $i_z(t)$ przedstawiono na rys. 5. Przyjęto $\alpha = 30^\circ$; $\frac{L}{R} = \frac{5T}{6}$



Rys. 5

LITERATURA

[1] Atabiekow G.I.: Teoria liniowych obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 1964 r.

[2] Cichowska Z.: Transformata funkcji obciętej i jej zastosowanie w analizie obwodów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka 36, 1973 r.

[3] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice. WNT, Warszawa 1972 r.

[4] Węgrzyn S.: Rachunek operatorowy w zastosowaniu do obliczania przebiegów nieustalonych w układach liniowych o stałych skupionych. PNW, Warszawa 1960 r.

Przyjęto do druku w październiku 1973 r.

СПОСОБ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИЗОЪРАЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ЗА ПЕРИОД

Р е з ю м е

Рассматривается способ расчёта протекания процессов в линейных цепях при неустановившемся состоянии в случае периодических возбуждений путём использования двух противоположных установившихся состояний.Применение этого способа даёт возможность получения решения в виде конечного числа членов за любой период. Рассуждения проиллюстрированы примерами.

ABOUT A CERTAIN METHOD OF APPLICATION OF A TRANSFORM FOR A PERIOD

S u m m a r y

A method of calculation of runs in linear circuits in transient state at periodic excitations applying the method of two different opposite fixed states is presented. This method allows to achieve the solution in a form of finite number of terms in an arbitrary period of time. The considerations are illustrated by an example.