ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 45 Nr kol. 413

Krystyna STEC

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

RORMUŁY TOPOLOGICZNE DO WYZNACZANIA MACIERZY ADMITANCYJNEJ I IMPEDANCYJNEJ CZWÓRNIKA ± R, C, L BEZ SPRZĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH

Streszczenie. W artykule udowodniono, że podane przez W. Mayedę i S. Seshu formuły topologiczne służące do wyznaczania parametrów macierzy admitancyjnej i impedancyjnej czwórnika pasywnego są również prawdziwe dla układów ± R, C, L bez sprzężeń.

Definicje użytych pojęć, wykaz oznaczeń

1. Definicje:

2-drzewo - para oddzielnych podgrafów nie zawierających oczek (każdy z podgrafów jest spójny), które razem wzięte zawierają wszystkie węzły układu;

3-drzewo - zbiór trzech oddzielnych podgrafów (każdy z podgrafów jest spójny), które razem wzięte zawierają wszystkie węzły układu, lecz nie tworzą oczek.

2. Wykaz oznaczeń:

$A_{-}\left\{Y_n\right\}$ - Macierz A, z której usunięto i-ty wiersz

$\det\left\{Y_n\right\}$ - wyznacznik macierzy Y_n

E_m - macierz siły elektromotorycznych oczkowych

$F(s)$ - transformata Laplace'a funkcji $f(t)$

I_m - macierz prądów oczkowych

I_n - macierz prądów źródłowych

$U_{a,b,cd}$ - suma iloczynów admitancji 3-drzew układu. Indeksy u dołu oznaczają węzły. Przecinki dzielą węzły na grupy należące do różnych podgrafów.

V_n - macierz potencjałów węzłowych

$W_{ab,cd}$ - suma iloczynów admitancji 2-drzew układu. Indeksy u dołu oznaczają węzły, przecinki dzielą węzły na grupy należące do różnych podgrafów.

Y - macierz admitancyjna czwórnika

Y_n - macierz węzłowa

Z - macierz impedancyjna czwórnika

Z_m - macierz oczkowa.

W. Mayeda i S. Seshu [1] podali formuły topologiczne do wyznaczania parametrów macierzy admitancyjnej i impedancyjnej czwórnika pasywnego, zbudowanego z elementów R,C i L bez sprzężeń. Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że formuły te są prawdziwe również dla układu $\pm$ R,C,L bez sprzężeń.

Macierz incydencyjna układu A_a oraz jego macierz cyklomatyczna B_a nie zależy od rodzaju elementów, zależy natomiast od struktury układu.

Oznaczmy przez w ilość węzłów w układzie, przez e ilość elementów (gałęzi), a liczbę oczek przez m.

Macierz A_a jest rzędu (w,e) i posiada w-1 wektorów liniowo niezależnych a macierz B_a jest rzędu (m,e) i zawiera e-w+1 takich wektorów. Po skreśleniu dowolnego np. i-tego wiersza macierzy A_a (jest to równoznaczne z przyjęciem i-tego węzła za węzeł odniesienia) otrzymamy macierz A, a z wybranych e-w+1 liniowo niezależnych wektorów macierzy B_a utworzymy macierz B.

Macierze te są związane parą zależności (1):

$$\left.\begin{aligned} A\ B_t &= 0 \\ B\ A_t &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Z I i II prawa Kirchhoffa mamy:

$$A\ I_e(t) = 0 \tag{2a}$$

$$B\ V_e(t) = 0 \tag{2b}$$

gdzie:

$I_e(t)$ - macierz prądów gałęziowych,

$V_e(t)$ - macierz napięć na gałęziach.

Po dokonaniu transformacji oczkowej wyrażenia (2a) i transformacji węzłowej wyrażenia(2b) otrzymamy odpowiednio:

$$I_e(t) = B_t\, I_m(t) \tag{3a}$$

$$V_e(t) = A_t\, V_n(t) \tag{3b}$$

gdzie:

$I_m(t)$ - macierz prądów oczkowych,

$V_n(t)$ - macierz potencjałów węzłowych.

Macierz $V_e(t)$ układu $\pm$ R,C,L przedstawiamy w następujący sposób:

$$V_e(t) = \pm R_e\, I_e(t) + L_e \frac{dI_e(t)}{dt} + D_e \int_0^t I_e(x)dx + V_e(0+) \tag{4}$$

gdzie:

$\pm R_e$ - macierz oporności dodatnich i ujemnych,

L_e - macierz indukcyjności,

D_e - macierz odwrotności pojemności.

Dla układu bez sprzężeń macierzy $\pm R_e$, L_e i D_e są macierzami diagonalnymi.

Wyrażenie (4) transformujemy według Laplace'a i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V_e(s) &= (\pm R_e + sL_e + \frac{1}{s} D_e)\, I_e(s) - L_e\, I_e(0+) + \\ &+ \frac{1}{s} V(0+) + E_e(s) = Z_e(s) I_e(s) - \\ &- L_e\, I_e(0+) + \frac{1}{s} V_e(0+) + E_e(s) \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie macierz diagonalna $Z_e(s) = \pm R_e + s\, L_e + \frac{1}{s} D_e$ jest macierzą elementów.

Z II prawa Kirchhoffa mamy:

$$B\, V_e(s) = 0 \tag{6}$$

Po podstawieniu wyrażenia (5) do równania (6) i transformacji oczkowej $I_e(s)$ otrzymamy:

$$B\,Z_e(s)B_t\,I_m(s) = -B_eE(s) - B\,\frac{1}{s}\,V_e(0+) + L_e\,I_e(0+) \tag{7}$$

Do wyrażenia (5) wprowadzamy $Y_e(s) = Z_e^{-1}(s)$.

Otrzymujemy:

$$I_e(s) = Y_e(s)\,V_e(s) - E_e(s) - \frac{1}{s}\,V_e(0+) + L_e\,I_e(0+) \tag{8}$$

Z I prawa Kirchhoffa mamy:

$$A\,I_e(s) = 0 \tag{9}$$

a po podstawieniu zależności (8) do równania (9) otrzymamy:

$$A\,Y_e(s)\,A_t = A\,Y_e(s)\,E_e(s) + A\,Y_e(s)\,\frac{1}{s}\,V_e(0+) +$$

$$+ A\,Y_e(s)\,L_e\,I_e(0+) \tag{10}$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$B\,Z_e(s)\,B_t = Z_m(s)$

$A\,Y_e(s)\,A_t = Y_n(s)$

$-B\,E_e(s) = E_m(s)$

$A\,Y_e(s)\,E_e(s) = I_n(s)$

oraz zakładamy, że

$$I_e(0+) = 0$$

$$\text{i} \quad V_e(0+) = 0$$

Równania (7) i (10) przyjmują teraz następującą postać

$$Z_m(s)\,I_m(s) = E_m(s) \tag{7a}$$

$$Y_n(s)\,V_n(s) = I_n(s) \tag{10a}$$

W celu wyznaczenia porametrów macierzy admitancyjnej i impedancyjnej czwórnika $\pm R,C,L$ bez sprzężeń należy obliczyć wyznaczniki charakterystyczne układów równań (7a) i (10a), tzn. det $Y_n(s)$ i det $Z_n(s)$ oraz odpowiednie ich podwyznaczniki z uwzględnieniem znaków, tzn. wyrażenia następujących typów:

1) współczynniki symetryczne $\Delta_{ii} = M_{ii}$

2) współczynniki niesymetryczne $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

gdzie:

M_{ab} – jest podwyznacznikiem otrzymanym przez wykreślenie z rozpatrywanego wyznacznika a-tego wiersza i b-tej kolumny.

Wyznaczniki charakterystyczne

Oznaczmy $\Delta_m = \det\left\{A\, Y_e(s) A_t\right\} = \det\left\{Y_n(s)\right\}$. Korzystając z twierdzenia Bineta-Cauchy'ego [2] można udowodnić [1], że wyznacznik Δ_n jest równy sumie iloczynów admitancji wszystkich drzew układu.
Sumę tę oznaczmy przez $V(Y)$
Stąd

$$\Delta_n = V(Y) \tag{11}$$

W analogiczny sposób można wykazać [1], że jeżeli macierz B została utworzona z oczek fundamentalnych, to wyznacznik

$$\Delta_m = \det\left\{B\, Z_e(s) B_t\right\} = \det\left\{Z_m(s)\right\} = C\left\{V\ (Z)\right\} \tag{12}$$

$C\left\{V(Z)\right\}$ – suma iloczynów impedancji wszystkich dopełnień grafu układu.

C oznacza dopełnienie, a $V(z)$ otrzymamy z $V(Y)$ zastępując admitancje impedancjami, ponieważ w układzie bez sprzężeń

$$z_i\, y_i = 1$$

$$\Delta_m = z_i\, z \ldots z_e\, \Delta_n \tag{13}$$

Współczynniki symetryczne Δ_{ii}

Δ_{ii} otrzymujemy z Δ_n przez wykreślenie i-tego wiersza i i-tej kolumny jest to więc wyznacznik macierzy węzłowej $Y_{n_{-i}}$ układu otrzymanego przez przyjęcie dodatkowego węzła odniesienia "i" (wykreślenie i-tego wiersza z macierzy A).

Tak więc

$$Y_{n_{-i}} = A_{-i}\, Y_e(s)\, A_{-i_t}$$

i

$$\Delta_{ii} = \det\left\{Y_{n_{-i}}\right\} = \det\left\{A_{-i}\, Y_e(s)\, A_{-i_t}\right\}$$

Macierz $Y_{n_{-i}}$ można uważać za macierz węzłową układu N_1, który otrzymano przez zwarcie węzła odniesienia obwodu N z dodatkowym i-tym węzłem odniesienia.

Obwód N_1 ma w-1 węzłów, a jego drzewo w-2 elementów. Jego drzewo jest 2-drzewem obwodu N.

W tym 2-drzewie węzeł i-ty i węzeł odniesienia muszą znajdować się w różnych składowych.

Zgodnie z wzorem (11)

Wyznacznik $\Delta_{ii} = \det\left\{Y_{n_{-i}}\right\}$ jest równy sumie iloczynów admitancji drzew obwodu N_1, tzn. jest równy sumie iloczynów admitancji 2 drzew obwodu N przy założeniu, że węzeł "i" i węzeł "r" znajdują się w różnych składowych (r-węzeł odniesienia)

tak więc

$$\Delta_{ii} = W_{i,r}(Y) \tag{14}$$

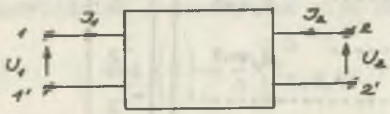
Współczynniki niesymetryczne Δ_{ij}

Dla macierzy $Y_n(s)$ mamy:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{j+i}\, M_{ij}$$

gdzie:

$$M_{ij} = \det\left\{A_{-i}\, Y_e(s)\, A_{-j_t}\right\}$$



Rys. 1

Rozumując podobnie jak w przypadku wyznacznika Δ i współczynników symetrycznych otrzymamy [1], po przyjęciu węzła 1' za węzeł odniesienia, oznaczenia jak na rys. 1, następującą zależność:

$$\Delta_{ij} = W_{ij,1'}\ (Y) \tag{15}$$

Macierz admitancyjna czwórnika

Zapiszmy równania węzłowe czwórnika pokazanego na rys. 1. Mamy:

$$I_n(s) = Y_n(s)\ V_n(s)$$

gdzie:

$$V_n = \begin{bmatrix} V_{11'} \\ V_{21'} \\ V_{2'1'} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{w-1,1'} \end{bmatrix} \qquad I_n = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{12'} & \cdots\cdots & y_{1,w-1} \\ y_{21} & y_{22} & y_{22'} & \cdots\cdots & y_{2,w-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ y_{w-1,1} & y_{w-1,2} & y_{w-1,2'} & \cdots\cdots & y_{w-1,w-1} \end{bmatrix}$$

1' - węzeł odniesienia.

Z równań węzłowych otrzymujemy

$$V_n(s) = Y_n^{-1}\ I_n(s)$$

tzn.

$$\begin{bmatrix} V_{11'} \\ V_{22} \\ V_{2'1'} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{w-1,1'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{12'} & \cdots\cdots & \Delta_{1,w-1} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{22'} & \cdots\cdots & \Delta_{2,w-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{w-1,1} & \Delta_{w-1,2} & \Delta_{w-1,2'} & \cdots & \Delta_{w-1,w-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interesuje nas macierz zawierająca pierwsze trzy potencjały. Ponieważ tylko trzy pierwsze wiersze macierzy I_n zawierają wyrazy różne od zera, a $V_1 = V_{11'}$ i $V_2 = V_{21'} - V_{2'1'}$ mamy

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} - \Delta_{12'} \\ \Delta_{12} - \Delta_{2'1} & \Delta_{22} - \Delta_{22'} - \Delta_{2'2} + \Delta_{2'2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

tzn.

$$V_{cz} = Z\, I_{cz}$$

Po uwzględnieniu, że $\Delta_{ab}\Delta_{cd} - \Delta_{ad}\,\Delta_{cb} = \Delta\Delta_{ab,cd}$ [2] mamy:

$$\det\left\{Z\right\} = \frac{1}{\Delta}\left\{\Delta_{12,2'1} + \Delta_{12',2'1} - \Delta_{11,22'} - \Delta_{11,2'2}\right.$$

gdzie:

$\Delta_{ab,cd}$ – oznacza wyznacznik otrzymany przez wykreślenie wierszy a i c oraz kolumn b i d. Wykreślenie dwóch wierszy (kolumn) jest równoznaczne z wprowadzeniem dwóch dodatkowych węzłów odniesienia.

Przez rozumowanie [1] analogiczne jak w przypadku 2-drzew dochodzimy do wniosku, że wyznacznik $\Delta_{ab,cd}$ jest równy sumie iloczynów admitancji odpowiednich 3-drzew, tak więc mamy:

$$\det\{Z\} = \frac{1}{\Delta}\left\{U_{1,2,1'} + U_{1,2',1'} - 2U_{1,22',1'}\right\} = \frac{1}{V(Y)}\sum U$$

gdzie:

$$\sum U = U_{1,2,2'1'} + U_{12',2,1'} + U_{1,2',21'} + U_{12,2',1'}$$

Współczynniki macierzy Z wynoszą

$$\Delta_{11} = W_{1,1'}$$

$$\Delta_{12} - \Delta_{12'} = W_{12,1'2'} - W_{12',1'2} = \Delta_{21} - \Delta_{2'1}$$

$$\Delta_{22} - \Delta_{22'} - \Delta_{2'2} - \Delta_{2'2'} = W_{2,2'}$$

Tak więc macierz impedancyjna ma następującą postać:

$$Z = \frac{1}{V(Y)}\begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{12,1'2'} - W_{12',1'2} \\ W_{12,1'2'} - W_{12',1'2} & W_{2,2'} \end{bmatrix} \tag{16}$$

a macierz admitancyjna $Y = Z^{-1}$

$$Y = \frac{1}{\sum U}\begin{bmatrix} W_{2,2'} & W_{12',1'2} - W_{12,1'2'} \\ W_{12',1'2} - W_{12,1'2'} & W_{1,1'} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Jak widać z zależności (16) i (17) formuły topologiczne dla układu $\pm$R,C,L bez sprzężeń są identyczne z formułami dla układu R,L,C bez sprzężeń podanymi przez W. Mayedę i S. Seshu [1].

LITERATURA

[1] Mayeda W., Seshu S.: Topological Formulas for Network Functions. University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin No. 446, 1957.

[2] Aitken A.C.: Determinants and Matrices. Ninth edition. Oliver and Boyd Edinburgh and London, New York: Interscience Publishers, Inc. 1958.

Przyjęto do druku w listopadzie 1973 r.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ПРОВОДИМОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХ ПОЛЮСНИКА $\mp$R,L,C БЕЗ МАГНИТНЫХ СВЯЗЕЙ

Р е з ю м е

Показано, что топологические формулы для определения матрицы сопротивлений и проводимостей пассивного четырехполюсника правилъны также для цепей $\mp$R,L,C без магнитных связей.

TOPOLOGICAL FORMULAS FOR SHORT-CIRCUIT AND OPEN-CIRCUIT MATRIX PARAMETERS OF TWO TERMINAL-PAIR $\pm$R,C,L NETWORK WITH NO MUTUAL INDUCTANCES

S u m m a r y

The paper proves, that topological formulas for network functions given by W. Mayeda and S. Seshu hold also for $\pm$R,C,L networks with no mutual inductances.