ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 45 Nr kol. 413

Małgorzata KOZDRÓJ

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O STOCHASTYCZNYM MODELU BADAŃ AWARII ELEKTRYCZNYCH W UKŁADACH KOPALNIANYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono stochastyczny model badania awarii elektrycznych urządzeń kopalnianych. Omówiono szczególne własności trzech modeli:

a) według jednorodnego procesu Poissona,
b) według rozkładu Furry'ego-Yule'a,
c) według rozkładu Polya

oraz przedyskutowano ich przydatność do badania awaryjności urządzeń kopalnianych.

1. Wprowadzenie

Dla zastosowania praw statystyki matematycznej do danych pochodzących z obserwacji awarii urządzeń elektrycznych niezbędna jest znajomość rozkładów prawdopodobieństwa zachodzenia tych awarii.

Zadaniem pracy jest przedstawienie teoretycznych rozkładów, które by mogły opisywać proces awarii elektrycznych w kopalniach zgodnie z danymi doświadczalnymi, o ile zostaną spełnione w praktyce(w doświadczeniu)określone warunki. Właściwy dobór teoretycznego rozkładu do danych doświadczalnych umożliwi określenie prawdopodobieństwa zaistnienia awarii w przyjętym konwencjonalnie przedziale czasu. Wskazane rozkłady powinny znaleźć zastosowanie w prognozowaniu awarii poszczególnych typów maszyn i urządzeń elektrycznych.

Przez n i e z a w o d n o ś ć urządzenia będziemy rozumieć prawdopodobieństwo prawidłowego działania urządzenia w określonych warunkach przez określony czas. Jeżeli przez x oznaczymy liczbę awarii urządzenia w okresie czasu t, to

$$p(x \geq 1, t) \tag{1}$$

jest prawdopodobieństwem zajścia jednej lub większej liczby awarii badanego urządzenia w obranym czasokresie t. Niezawodność natomiast została określona jako prawdopodobieństwo niewystąpienia awarii w ciągu czasu t, czyli

$$P(0,t) = 1 - p\ (x\ 1,\ t) \tag{2}$$

2. Stochastyczny model badań awarii elektrycznych w kopalniach węgla kamiennego

Podstawą oceny awarii elektrycznych będzie rozkład P(x,t) prawdopodobieństwa zaistnienia x awarii w umownie przyjętym odstępie czasu (t_o, $t_o + t$), gdzie $t > 0$. Rozkład ten wyprowadzimy, przyjmując następujące założenia:

1) Szukanie prawdopodobieństwa jest niezależne od wartości t_o - co oznacza, że wystąpienie awarii jest niezależne od chwili rozpoczęcia obserwacji.

2) Prawdopodobieństwo zaistnienia (x + 1)-szej awarii w krótkim wobec t odstępie czasu (t, $t + \Delta t$) wynosi $\lambda(x,t) \cdot \Delta t$, przy tym kształt funkcji $\lambda(x,t)$ jest określony przez:

a) ogół warunków w danej kopalni,

b) ogół cech jakościowych urządzeń elektrycznych, ich konserwacji oraz zabezpieczeń przed awariami,

c) równość

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x,t) = 1 \quad \text{dla} \quad t > 0 \tag{3}$$

3) Prawdopodobieństwo zaistnienia najmniej dwóch awarii elektrycznych w odstępie czasu (t, $t + \Delta t$), jeżeli zaistniało już x awarii w odstępie czasu (t_o, $t_o + t$) jest $o(\Delta t)$.

4) Prawdopodobieństwo, że nie zajdzie ani jedna awaria w odstępie czasu (t, $t + \Delta t$), jeżeli zaistniało już x awarii w odstępie czasu (t_o, $t_o + t$) wynosi $1 - \lambda(x,t)\ \Delta t - o(\Delta t)$.

Wynikają stąd relacje:

$$P(x,t+\Delta t) = P(x,t)\left[1-\lambda(x,t)\,\Delta t - o(\Delta t)\right] + P(x,1,t)\lambda(x-1,t)\ \Delta t + \\ + \sum_{n=2}^{x} P(x-n,t)\ o(\Delta t); \tag{4}$$

oraz

$$P(0,t+\Delta t) = P(0,t)\left[1-\lambda(0,t)\Delta t\right] \tag{5}$$

Drogą prostych przekształceń otrzymujemy układ równań różniczkowych liniowych:

$$\frac{dP\,(0,t)}{dt} = -\,\lambda(0,t)\;P(0,t) \tag{6}$$

$$\frac{dP\,(x,t)}{dt} = \lambda(x-1,t)\;P(x-1,t) - \lambda(x,t)\;P(x,t) \tag{7}$$

Rozwiązanie tego układu winno spełniać warunki początkowe

$$P(0,0) = 1 \tag{8}$$

$$P(x,0) = 0 \qquad \text{dla} \quad x = 1,2,3,\ldots \tag{9}$$

i jest zależne od kształtu funkcji $\lambda(x,t)$.

Układ równań (6) i (7) opisuje proces Markowa jednorodny w czasie. Jak niżej pokażemy, trzy różne postacie funkcji $\lambda(x,t)$ prowadzą do rozwiązań spełniających warunek (3).

Rozwiązanie pierwsze

Załóżmy, że

$$\lambda(x,t) = \lambda = \text{const} > 0 \tag{10}$$

Hipoteza ta jest równoważna przypuszczeniu, że awarie elektryczne są losowo niezależne. Układ równań (6) i (7) przyjmuje wówczas postać

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\,\lambda P(0,t) \tag{11}$$

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = \lambda\left[P(x-1,t) - P(x,t)\right] \quad x = 1,2,3,\ldots \tag{12}$$

Z (11) wobec (8) otrzymujemy

$$P(0,t) = e^{-\lambda t} \tag{13}$$

Teraz z (12) wobec (9) otrzymujemy rekurencyjnie $P(1,t)$, $P(2,t)$,... itd. Rozwiązania te wyrażają się wzorem

$$P(x,t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!}\,e^{-\lambda t} \tag{14}$$

określającym tzw. proces jednorodny Poissona.

Warunek (3) jest tu spełniony, gdyż

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1 \tag{15}$$

a więc wzór (14) określa rozkład prawdopodobieństwa, który możemy otrzymać z rozkładu Poissona, określonego wzorem

$$P(x=r) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} \tag{16}$$

gdzie:

$\mu = \lambda t$ λ - stała dodatnia

$$r = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

Zmienna losowa o rozkładzie (16) ma wartość średnią $\bar{x} = \mu$ oraz wariancję 6_x^2 równą wartości średniej:

$$6_x^2 = \bar{x} = \mu \tag{18}$$

Zatem zmienna losowa o rozkładzie (14) ma wartość średnią $\bar{x}(t)$ i wariancję $6_x^2(t)$ określone wzorami

$$\bar{x}(t) = \lambda t, \quad 6_x^2(t) = \lambda t \tag{19}$$

Ponadto zachodzi

$$\frac{P(x+1,t)}{P(x,t)} = \frac{(\lambda t)^{x+1}}{(x+1)!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{x!}{(\lambda t)^x} \cdot e^{\lambda t} = \frac{\lambda t}{x+1} \tag{20}$$

Wynika zatem, że ciąg prawdopodobieństw P(0,t), P(1,t), P(2,t),... rośnie dopóki $x<\lambda t - 1$, a maleje gdy $x>\lambda t-1$. W przypadku więc, gdy awarie elektryczne mają rozkład Poissona, najbardziej prawdopodobną liczbę $x_o(t)$ awarii (w odstępie czasu o długości t) jest

$$x_o(t) = C(\lambda t-1) \tag{21}$$

gdzie:

C(z) = entier z (największa liczba całkowita, nie większa od z).

Przyjmując, że $t = t_2 - t_1 > 0$, oznaczmy przez

$$p_{ij}(t) = P\left\{x_{t_2} = j / x_{t_1} = i\right\}$$

prawdopodobieństwo, że jeżeli w odstępie czasu $(t_o, t_o + t_1)$ zaistniało $x_{t_1} = i$ awarii, to w odstępie czasu (t_1, t_2) zaistnieje $(j - i)$ awarii.

Ponieważ

$$p_{ij}(t)=P(x_{t_2} = j/x_{t_1} = i) = \frac{P(x_{t_1} = i,\ x_{t_2} - x_{t_1} = j-i)}{P(x_{t_1} = i)} = P(x_{t_2} - x_{t_1} = j-1)$$

a więc

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \tag{22}$$

dla $i = 0,1,2,\dots;\ (j - i) = 0,1,2,\dots$

Funkcja $p_{ij}(t)$ jest też rozkładem Poissona. Z własności ogólnych rozkładów prawdopodobieństwa wynika, że

$$\text{dla każdego} \quad \sum_{j}^{i} p_{ij}(t) = 1 \tag{23}$$

$$p_{ii}(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \tag{24}$$

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!\, e^{\lambda t}} = 0 \tag{25}$$

Relacje intensywności procesu stochastycznego są następujące:

$$q_i = \lim_{t \to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1-e^{-\lambda t}}{t} = \lim_{t \to 0} - \frac{\lambda(1-e^{-\lambda t})}{-t} \tag{26}$$

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!\, t} = \begin{cases} \lambda & \text{dla } j=i+1 \\ 0 & \text{dla } j \neq i+1 \end{cases} \tag{27}$$

Ważną cechą jednorodnego procesu Poissona jest niezależność od t.

Rozwiązanie drugie

Załóżmy, że

$$\lambda(x, t) = \lambda x, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \text{ - stała dodatnia} \tag{28}$$

Odrzucamy zatem hipotezę niezależności losowej awarii, ale zachowujemy hipotezę, że ogół warunków w danej kopalni i cech urządzeń elektrycznych, ich konserwacja oraz zabezpieczenie przed awariami nie zmieniają się w czasie prowadzonych badań w sposób istotny.

Z wyrażenia (28) wynika konieczność założenia, że od chwili $t_0 = 0$ zaistniała przynajmniej jedna awaria, w przeciwnym bowiem razie układ (6) i (7) zredukowałby się do przypadku trywialnego.

W dalszym ciągu załóżmy, że do chwili $t_0 = 0$ zaszło k awarii (k = 1,2,3,...). Prawdopodobieństwo P(x,t), że w kolejnym odstępie czasu (0,t) zaistnieje jeszcze x awarii, jest określone przez układ równań

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -k\lambda P(0,t) \tag{30}$$

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = -\lambda(x+k)\,P(x,t) + \lambda(x+k-1)\,P(x-1,t) \tag{31}$$

gdzie

k = 1,2,3,...
x = 1,2,3,...

Rozwiązanie układu (30) i (31) winno spełniać warunki początkowe

$$P(x,0) = 0 \quad \text{dla} \quad x = 1,2,3,\ldots \tag{32}$$

i

$$P(0,0) = 1 \tag{33}$$

Stosując metodę taką jak w przypadku rozwiązywania układu (11) i (12) otrzymujemy

$$P(x,t) = \binom{x+k-1}{x} e^{-k\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^x \tag{34}$$

$$x = 0,1,2,3,\ldots$$

Zauważmy, że

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} e^{-k\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^x = e^{-k\lambda t} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} (1-e^{-\lambda t})^x = 1$$

Podstawiając bowiem $z = 1 - e^{-\lambda t}$ otrzymujemy:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x}(1-e^{-\lambda t})^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} z^x = 1 + \binom{k}{1}z + \binom{k+1}{2} z^2 + \binom{k+2}{3} z^3$$

$$+\ldots = (1-z)^{-k} = e^{k\lambda t}$$

Wzór (34) określa zatem rozkład prawdopodobieństwa x według Furry'ego-Yule'a.

Dla zmiennej losowej x podlegającej rozkładowi Furry'ego-Yule'a otrzymujemy

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = k\,e^{\lambda t} \tag{35}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_x^2(t) = k\,(e^{2\lambda t} - e^{\lambda t}) \tag{36}$$

Stosując analogiczne oznaczenia dla $p_{ij}(t)$, q_k, q_{kj} i zakładając, że w chwili t_o zaistniało $k \geqslant 1$ przypadków awarii oraz oznaczając przez $p_{kj}(t)$ prawdopodobieństwo, że w chwili $t_1 = t_o + t$ zaistnieją $x = j - k$ awarie otrzymujemy

$$p_{kj}(t) = P(j-k,t) \tag{37}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{kj}(t) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,\ j \geqslant k) \tag{38}$$

$$q_k = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-p_{kk}(t)}{t} = k\lambda \tag{39}$$

$$q_{kj} = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{kj}(t)}{t} = \begin{cases} k\lambda & \text{dla } j=k+1 \\ 0 & \text{dla } j\neq k,k+1 \end{cases} \tag{40}$$

Intensywności q_k i q_{kj} procesu Furry'ego-Yule'a są niezależnie od czasu t, ale zależne od liczby k awarii elektrycznych do chwili t_o.

Wzór (34) upraszcza się znacznie przy przyjęciu k = 1, tj. przy przyjęciu, że początek serii zgadza się z początkiem obranego przedziału czasu (0,t).

Otrzymujemy wówczas

$$P(x,t) = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^x \quad x + 0,1,2,... \tag{41}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\infty} P(x,t) = 0 \tag{42}$$

oraz

$$P(0,t) > P(1,t) > P(2,t)... \tag{42a}$$

Dla zmiennej losowej x o rozkładzie (41)

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = e^{\lambda t} \tag{43}$$

i

$$\sigma_x^2 = \sigma_x^2(t) = e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1) \tag{44}$$

a więc

$$\sigma_x^2 = \bar{x}(\bar{x} - 1) \tag{45}$$

Jeżeli $\bar{x} > 2$, wówczas

$$\sigma_x^2 > \bar{x} \tag{46}$$

<u>Rozwiązanie trzecie</u>

Załóżmy, że

$$\lambda(x,t) = \frac{v+x}{a+t} \tag{47}$$

gdzie:

a,v - stałe.

Rozwiązanie to przyjmuje postać tzw. rozkładu Pólya

$$P(x,t) = c\binom{v+x-1}{x}\left(\frac{t}{a+t}\right)^x, \tag{48}$$

gdzie:

$x = 0,1,2,\ldots$

$$P(0,t) = c = \left(\frac{a}{a+t}\right)^v \tag{49}$$

Dla zmiennej losowej x o rozkładzie (47)

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \frac{vt}{a} \tag{50}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_x^2(t) = \frac{vt}{a}\cdot\left(1 + \frac{t}{a}\right) \tag{51}$$

Wyrażając ze wzorów (50) i (51) a i v przez $\bar{x}$ i σ_x^2 otrzymujemy:

$$a = \frac{\bar{x}t}{\sigma_x^2 - \bar{x}} \tag{52}$$

$$v = \frac{\bar{x}^2}{\sigma_x^2 - x} \tag{53}$$

Ze wzorów tych wynika, że wielkości a i v są zawsze jednakowych znaków. Drogą efektywnego rozwiązywania równań (6) i (7) można stwierdzić, że przy dowolnym doborze ciągu funkcji

$$\lambda(0,t),\quad \lambda(1,t),\quad \lambda(2,t),\ldots \tag{54}$$

można otrzymać rozwiązanie spełniające warunki (8) i (9), ale nie spełniające warunku (3). Ciąg (54) jest przy ustalonym t niemalejący.

Wnioski

1) Uzyskane rozkłady mogą być wykorzystane do stawiania prognoz awarii elektrycznych i oceny tych awarii w danej kopalni z prawdopodobieństwem

$$\sum_{x=k_1+1}^{k_2} P(x,t) \tag{55}$$

Miernikiem probabilistycznym awaryjności elektrycznej w kopalni może być

$$p_o(t) = 1 - P(0,t) \tag{56}$$

prawdopodobieństwo, że w przedziale czasowym $(t_o,\ t_o + t)$zaistnieje choć jedna awaria elektryczna. Jeśli w badanym zbiorze danych kopalni awaryjność elektryczna jest bardzo duża, tj. gdy wszystkie wartości $p_o(t)$ są bliskie 1, wówczas za miernik awaryjności urządzeń elektrycznych można przyjąć

$$p_k(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} P(x,t) \tag{57}$$

gdzie k obieramy tak duże, by otrzymane dla różnych kopalń wartości mierników różniły się w sposób nieprzypadkowy i dały się dzięki temu uszeregować według wielkości.

2) Z (19) wynika, że gdy dla danego rozkładu empirycznego otrzymamy (po ustaleniu wartości t) wartość średnią istotnie różną od wariancji, to badanie tego rozkładu przy pomocy wzoru teoretycznego (14) jest niecelowe.

Spostrzeżenie to oszczędzi nam testowania np. przy pomocy χ^2 zgodności rozkładu empirycznego z przyjętym rozkładem teoretycznym.

W przypadku braku istotnej różnicy między $\bar{x}$ a σ_x^2 przyjmujemy prowizorycznie hipotezę, że rozkładem teoretycznym jest (14), dla którego najbardziej wiarygodną wartość λ obliczymy z pomocą wzoru (19), czyli

$$\lambda = \frac{\bar{x}}{t}$$

Wiarygodność hipotezy ocenimy testem χ^2.

Przy obliczaniu poszczególnych prawdopodobieństw korzystać można z gotowych tablic rozkładu Poissona, zwykle jednak pociąga to za sobą konieczność zaokrąglenia faktycznie otrzymanej wartości λ t. Dokładniejsze wartości prawdopodobieństw $P(x,t)$ możemy uzyskać na podstawie wzoru (14), posługując się tablicami.

4) Warunkiem koniecznym stosowalności rozkładu (34) jest spełnianie przez wartość i wariancję rozkładu empirycznego - choćby w przybliżeniu - równości

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{k} \cdot x^{-2} - \bar{x} \tag{58}$$

wynikającej z (35) i (36). Podobnie, warunkiem koniecznym stosowalności rozkładu (41) jest spełnianie przez wartość średnią i wariancję rozkładu empirycznego - choćby w przybliżeniu - równości (45). Wzór (41) przekształcony do postaci:

$$P(x,t) = \frac{1}{\bar{x}}\left(1 - \frac{1}{\bar{x}}\right)^{x} \quad x = 0,1,2,\ldots \tag{59}$$

jest bardzo dogodny dla przeprowadzenia obliczeń rachunkowych - czym góruje zarówno nad rozkładem Poissona jak i rozkładem Poly'a. Prostotę wzoru (41) w porównaniu z (34) opłaca się mniejszą precyzją oszacowań parametru x, co może mieć znaczenie w przypadku stawiania prognoz długoterminowych.

5) Rozkład (48) jest dwuparametrowy (zależy od dwóch stałych a i v), co pozwala na ogół lepiej dobrać go do danego rozkładu empirycznego, niż to jest możliwe dla rozkładów (14) i (34) czy (41), zależnych od jednej stałej. W przypadku jednak, gdy dla danego rozkładu empirycznego zachodzi - choćby w przybliżeniu - równość

$$\sigma_x^2 = \bar{x} \tag{60}$$

wówczas stosowanie (48) jest niecelowe, gdyż oszacowanie stałych a i v uzyskanych ze wzorów (52) i (53) jest mało wiarygodne (z wysokim prawdopodobieństwem są obarczone bardzo dużymi błędami).

Zatem w przypadku gdy

$$\bar{x} \geqslant \sigma_x^2 \tag{61}$$

możemy przyjąć, że rozkładem teoretycznym zmiennej x w umownie przyjętym przedziale czasu jest rozkład Poissona

$$P(x,t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \tag{62}$$

Gdy natomiast

$$\bar{x} < \sigma_x^2 \tag{63}$$

wówczas zmienna losowa podlega rozkładowi Pólya.

3. Zakończenie

Konfrontacja hipotez przedstawionych w niniejszym artykule została podana w pracy [5].

Stwierdzenie zgodności rozkładu danych empirycznych z rozkładami Poissona i Pólya może dostarczyć wiele cennych informacji wyprowadzonych z praw statystyki matematycznej i przydatnych do celów praktycznych. Przykładem może być zastosowanie w uszeregowaniu wszystkich kopalń według wielkości omawianego prawdopodobieństwa w mającym powstać centrum zarządzania w resorcie górnictwa. Aktualizowane na bieżąco uszeregowanie wszystkich kopalń pod względem awaryjności przyczynić się może do uzyskania pełnego obrazu pracy kierownictwa każdej kopalni nad poprawą niezawodności ruchu.

LITERATURA

[1] Chorafas S.N.: Procesy statystyczne i niezawodność urządzeń. WNT, Warszawa, 1963.

[2] Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, t. I. PWN, Warszawa 1960.

[3] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa, 1958. Wydanie II.

[4] Gluziński W.: Elektryfikacja podziemi kopalń. Część I - Urządzenia i sieci wysokiego napięcia. Wydawnictwo "Śląsk" Katowice, 1964.

[5] Kozdrój M.: Stochastyczny model badań awarii elektrycznych w kopalniach węgla. Praca magisterska. Politechnika Śląska, 1972.

[6] Otmianowski T.: Niezawodność urządzeń technicznych a utrzymanie ciągłości ruchu. Przegląd organizacji - zeszyt 4, 1969. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa.

Przyjęto do druku w październiku 1973 r.

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОТКАЗОВ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ШАХТ

Р е з ю м е

В работе представлена гипотеза стохастической модели исследования аварий электрического шахтного оборудования.
Обсуждены детально свойства трех моделей:

а/ согласно однородному процессу Пуассона

б/ согласно распределению фуррия-Джуля

с/ согласно распределению Полиа

Проанализировано также Их пригодность к исследованиям аварийности шахтного оборудования.

THE STOCHASTIC MODELS OF BREAKDOWNS IN MINE ELECTRIC SYSTEMS

S u m m a r y

The stochastic model of breakdowns of mine electric devices is presented in the paper. The specific properties of the models based on

a) Poisson's homogeneous process,
b) Furry - Jule's distribution,
c) Poly's distribution

and their usability for testing of breakdowns are discussed.