ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Elektryka z. 45 Nr kol. 413

Maciej SIWCZYŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

DRGANIA PRAWIE OKRESOWE W OSCYLATORACH VAN DER POLA

Streszczenie. W artykule przedyskutowano warunki występowania drgań prawie okresowych w oscylatorze Van der Pola. Drgania takie mogą wystąpić na skutek zerwania synchronizacji zewnętrznej, co objawia się powolnymi tętnieniami amplitudy i fazy. W zakończeniu artykułu wyprowadzono szereg Fouriera dla rozważanego drgania prawie okresowego.

. Wstęp

W artykule niniejszym dyskutowane będą warunki występowania drgań prawie okresowych w oscylatorach opisywanych równaniem Van der Pola. W ten sposób opisywanych jest wiele układów generacyjnych [3].

W pewnych przypadkach, w układach oscylacyjnych samowzbudnych, synchronizowanych zewnętrznie słabym sygnałem sinusoidalnym, o częstotliwości bliskiej częstotliwości drgań własnych układu mogą wystąpić drgania okresowe z częstotliwością sygnału synchronizującego. Jednak przy zbyt dużej różnicy pomiędzy częstotliwością sygnału synchronizującego, a częstotliwością drgań własnych układu lub przy zbyt małym sygnale synchronizującym może nastąpić zerwanie synchronizmu, które objawiać się będzie występowaniem drgań prawie okresowych [2].

2. Warunki występowania drgań prawie okresowych

Weźmy pod uwagę układ oscylacyjny synchronizowany zewnętrznie, opisany równaniem Van der Pola:

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + (1+\mu\eta)x = \mu\gamma\cos t \tag{1}$$

gdzie:

$0<\mu\ll 1$

$\mu\eta$ reprezentuje małą różnicę częstotliwości drgań własnych oscylatora i częstotliwości sygnału synchronizującego.

Równanie (1) można przepisać w postaci układu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= \mu(1-x^2)y - (1+\mu\eta)x + \mu f \cos t\end{aligned} \tag{2}$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\varphi\\ y &= r\sin\varphi\end{aligned} \tag{3}$$

układ równań (2) można przepisać w postaci następującej:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu R(r,\varphi,t)\\ \dot{\varphi} &= -1+\mu\Psi(r,\varphi,t)\end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$$R(r,\varphi,t) = (1-r^2\cos^2\varphi)\,r\sin^2\varphi - \eta r\sin\varphi\cos\varphi + \cos t\sin\varphi \tag{5}$$

$$\Psi(r,\varphi,t) = (1-r^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi - \eta\cos^2\varphi + \frac{f}{r}\cos t\cos\varphi \tag{6}$$

Widać, że funkcje $R(r,\varphi,t)$ oraz $\Psi(r,\varphi,t)$ są okresowe po t o okresie $T = 2\pi$.

Podstawiając nową zmienną:

$$\varphi = \Phi - t$$

do układu (4) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu R(r,\Phi-t,t)\\ \dot{\Phi} &= \mu\Psi(r,\Phi-t,t)\end{aligned} \tag{4a}$$

Stąd tworzymy układ uśredniony:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu\bar{R}(r,\Phi)\\ \dot{\Phi} &= \mu\bar{\Psi}(r,\Phi)\end{aligned} \tag{7}$$

gdzie:

$$\bar{R}(r,\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(r,\Phi-t,\ t)\,dt = \frac{r}{2}\left[1-\left(\frac{r}{2}\right)^2\right] + \frac{\gamma}{2}\sin\Phi$$

$$\bar{\Psi}(r,\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(r,\Phi-t,\ t)dt = -\frac{\eta}{2} + \frac{\gamma}{2r}\cos\Phi$$

kładąc w równaniu (7) $\tau = \mu t$ otrzymujemy układ równań:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{r}{2}\left[1-\left(\frac{r}{2}\right)^2\right] + \frac{\gamma}{2}\sin\Phi$$
$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\eta}{2} + \frac{\gamma}{2r}\cos\Phi \tag{8}$$

Warunek konieczny i dostateczny wystąpienia stabilnego drgania o okresie 2π ma postać:

$$\frac{\partial\bar{R}}{\partial r} + \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\Phi} < 0 \tag{9}$$

oraz

$$\frac{\partial\bar{R}}{\partial r}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\Phi} - \frac{\partial\bar{R}}{\partial\Phi}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial r} > 0$$

stąd otrzymuje się:

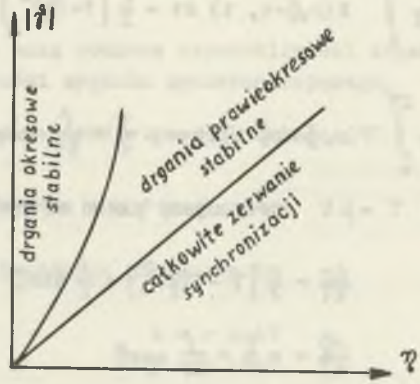
$$\gamma\sin\Phi_o - r_o\left(1-\frac{3}{4}r_o^2\right) > 0$$
$$\text{i}\quad \gamma\cos^2\Phi_o - r_o\left(1-\frac{3}{4}r_o^2\right)\sin\Phi_o > 0 \tag{9a}$$

gdzie

r_o, Φ_o są pierwiastkami układu równań:

$$r_o\left(1-\left(\frac{r_o}{2}\right)^2\right) + \gamma\sin\Phi_o = 0$$
$$-\eta r_o + \gamma\cos\Phi_o = 0 \tag{10}$$

Jeżeli przynajmniej jedna z nierówności (9) nie jest spełniona, co jest możliwe przy odpowiednim doborze η i γ, wtedy nie może wystąpić stabilne drganie okresowe o okresie 2π.



Rys. 1

Jak pokazano w [2], jeżeli układ równań (8) posiada cykl graniczny, to układ (4a) posiada stabilne, wolno zmienne rozwiązanie.

Na rys. 1 we współrzędnych ϑ , η przedstawiono obszary występowania poszczególnych typów drgań.

Weźmy teraz pod uwagę układ równań (8)

Ponieważ

$$\frac{r}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] + \frac{\vartheta}{2}\sin\Phi \leqslant \frac{r}{2}\left(1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) + \frac{\vartheta}{2}$$

to r(t) jest ograniczone. Rzeczywiście, zawsze można dobrać na tyle duże r, aby:

$$\frac{r}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] + \frac{\vartheta}{2} < 0$$

skąd wynika, że:

$\frac{dr}{d\tau} < 0$ dla dostatecznie dużego r.

Przy dostatecznie małym ϑ można przyjąć, że r zmienia się niewiele wokół $r_0 = 2$ (równania (10)). Wtedy drugie równanie układu (8) można napisać w postaci następującej:

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\eta}{2}\left(1 - \alpha\cos\Phi\right) \tag{8a}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{f}{\eta r_o}$$

Całkując równanie (8a) piszemy:

$$\int \frac{d\Phi}{1-\alpha\cos\Phi} = -\int\frac{\eta}{2}\, d\tau \tag{11}$$

Ponieważ

$$\int \frac{d}{1-\alpha\cos\Phi} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ arc tg } \frac{\text{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2})-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \text{const}$$

to po prostych przekształceniach równania (11) otrzymujemy:

$$\text{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}) = \sqrt{1-\alpha^2}\text{ tg}\left[\sqrt{1-\alpha^2}\,(-\frac{\eta}{2})\tau\right]+\alpha \tag{12}$$

Dobierając odpowiednio początkową wartość τ, oraz kładąc

$$\Theta = \sqrt{1-\alpha^2}\,(-\frac{\eta}{2})\tau$$

otrzymujemy:

$$\text{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}) = \sqrt{1-\alpha^2}\text{ tg}\,\Theta$$

a stąd:

$$\frac{e^{j(\frac{\pi}{2}+\Phi)}-1}{e^{j(\frac{\pi}{2}+\Phi)}+1} = \sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{e^{j\Theta}-1}{e^{j\Theta}+1}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$e^{j(\frac{\pi}{2}+\Phi)} = \frac{1+ke^{-j\Theta}}{1+ke^{j\Theta}}\,e^{j\Theta}$$

gdzie:

$$k = \frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}, \text{ czyli } 0<k<1$$

a stąd mamy:

$$j\left(\frac{\pi}{2}+\Phi\right) = j\theta + \ln\left(1+ke^{-j\theta}\right) - \ln\left(1+ke^{j\theta}\right).$$

Ponieważ:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{dla } |x|<1$$

to można napisać:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha^2}\,\eta\tau - \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{k^n}{n} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2} n\eta\tau\right) \qquad (13)$$

Wnioskujemy stąd zatem, że układ uśredniony (7) posiada cykl graniczny prawie kołowy o promieniu $r_o = 2$. Współrzędna kątowa zmienia się według równania (13). Okres cyklu granicznego wynosi:

$$\vartheta = \frac{4\pi}{\mu\eta\sqrt{1-\left(\frac{f}{2\eta}\right)^2}}$$

Podstawiając:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha^2}\,\eta\mu$$

$$F(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{k^n}{n} \sin\left(\frac{2\pi n}{\vartheta} t\right)$$

można napisać:

$$\cos\varphi = \sin F(t)\cos\Omega t - \cos F(t)\sin\Omega t$$

a stąd na podstawie (3):

$$x(t) = r_o \sin F(t)\cos\Omega t - r_o \cos F(t)\sin\Omega t \qquad (14)$$

Równanie (14) przedstawia w przybliżony sposób drgania x(t), gdyż jak wiadomo [1] rozwiązania układów w postaci (4a) i układu uśrednionego w ogólnym przypadku, pozostają dostatecznie blisko siebie przez skończony czas t.

Równanie (14) przedstawia drganie o okresie $T = \dfrac{2\pi}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha^2\mu\eta}}$ z wolno zmienną amplitudą i fazą. Zmiany amplitudy są okresowe w okresie $\vartheta = \dfrac{4\pi}{\mu\eta\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\eta}\right)^2}}$ okres ϑ jest tym większy im mniejsza jest różnica częstotliwości sygnału synchronizującego i częstotliwości drgań własnych oscylatora.

Ponieważ:

$\dfrac{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{T}}{\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{T}}$ jest w ogólnym przypadku liczbą niewymierną, to funkcja (14) jest prawie okresowa.

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem szeregu Fouriera drgania prawie okresowego. Rozwiązanie takie będzie przybliżone, gdyż opiera się na rozwiązaniu układu uśrednionego.

Wprowadźmy funkcję zespoloną:

$$\hat{Z}(t) = x(t) + j\,y(t) = r_o e^{j\varphi(t)}$$

Ponieważ

$$\varphi(t) = -\Omega t - \frac{\pi}{2} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{k^n}{n}\sin\frac{2\pi n}{\vartheta}t$$

to zachodzi:

$$\hat{Z}(t) = r_o e^{-j(\Omega t+\frac{\pi}{2})}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(2j(-1)^{n+1}\frac{k^n}{n}\sin\frac{2\pi n}{\vartheta}t\right)\right] =$$

$$r_o e^{-j(\Omega t+\frac{\pi}{2})}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(2(-1)^{n+1}\frac{k^n}{n}\sin\frac{2\pi n}{\vartheta}t\right) + j\sin\left(2(-1)^{n+1}\frac{k^n}{n}\sin\frac{2\pi n}{\vartheta}t\right)\right]$$

Rozwijając w szeregi Fouriera funkcje stojące pod znakiem iloczynu otrzymuje się:

$$\hat{Z}(t) = e^{-j(\Omega t + \frac{\pi}{2})} \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Big\{ \Big[J_{2m} \Big((-1)^n \frac{2k^n}{n} \Big) +$$

$$+ J_{2m} \Big((-1)^{n+1} \frac{2k^n}{n} \Big) \Big] \cos \frac{4mn\pi}{\vartheta} t + j \Big[J_{2m+1} \Big((-1)^{n+1} \frac{2k^n}{n} \Big) +$$

$$+ J_{2m+1} \Big((-1)^n \frac{2k^n}{n} \Big) \Big] \sin \frac{(2m+1)\, 2n\pi}{\vartheta} t \Big\} \tag{15}$$

gdzie J_{2m}, J_{2m+1} są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju. Otrzymany w ten sposób szereg jest szeregiem Fouriera drgania prawie okresowego $x(t) = \mathrm{re}\left\{\hat{Z}(t)\right\}$, występującego w oscylatorze Van der Pola przy zerwaniu synchronizacji zewnętrznej.

Rozważania powyższe można uogólnić na następującą postać równania Van der Pola:

$$\ddot{x} - \mu f(x,\dot{x})\, \dot{x} + (1 + \mu\eta)\, x = \gamma\mu \cos t$$

skąd otrzymuje się:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = \mu f(x,y)\, y - (1 + \mu\eta)\, x + \mu\gamma \cos t$$

Do takiej postaci doprowadza się równania wielu układów generacyjnych, przy bardziej ogólnej aproksymacji nieliniowości elementów. Ten sam układ równań we współrzędnych biegunowych będzie miał postać (4); gdzie:

$$R(r, \varphi, t) = f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\, r \sin^2\varphi - \eta\, r \sin\varphi \cos\varphi + \gamma \cos t \sin\varphi$$

$$\psi(r, \varphi, t) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \sin\varphi \cos\varphi - \eta \cos^2\varphi + \frac{\gamma}{r} \cos t \cos\varphi$$

Po wprowadzeniu zmiennej

$$\Phi = \varphi + t$$

otrzymujemy układ w postaci (4a), dla którego układ uśredniony przyjmie postać:

$$\frac{dr}{d\tau} = r\, A(r) + \frac{\gamma}{2} \sin\Phi$$

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = B(r) - \frac{\eta}{2} + \frac{\gamma}{2r} \cos\Phi \tag{16}$$

gdzie:

$$A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\tau,\ r\sin\tau)\sin^2\tau\ d\tau$$

$$B(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\tau,\ r\sin\tau)\sin 2\tau\, d\tau$$

Przy najczęściej stosowanych aproksymacjach elementów nieliniowych funkcja $f(x,y)$ ma postać:

$$f(x,y) = \sum_n a_n x^{2n} + \sum_m b_m y^{2m}$$

wtedy:

$$B(r) \equiv 0.$$

Istnienie stabilnych cykli granicznych równania (16) zależy wyłącznie od funkcji $A(r)$. Znając szczególną postać funkcji $A(r)$ można bez większych trudności stwierdzić istnienie cyklu granicznego. Wtedy amplituda drgania w przybliżeniu, możliwa jest do obliczenia z równania:

$$A(r) = 0$$

Szereg Fouriera drgania prawie okresowego dany jest wtedy relacją identyczną z (15).

Na zakończenie rozważmy równanie:

$$\ddot{x} - \mu f(x,\dot{x})\dot{x} + (1+\mu\eta)\,x + \mu\, x\, g(x) = \mu \gamma \cos t.$$

Układ uśredniony (8) odpowiadający temu równaniu ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= r\,A(r) - r\,G(r) + \frac{1}{2}\gamma \sin\Phi = \bar{R}(r,\Phi) \\ \frac{d\Phi}{d\tau} &= B(r) + H(r) - \frac{\eta}{2} + \frac{\gamma}{2r}\cos\Phi = \bar{\Psi}(r,\Phi) \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie:

$$A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(r\cos\tau;\ r\sin\tau)\sin^2\tau\ d\tau$$

$$G(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(r\cos\tau) \sin 2\tau \, d\tau$$

$$B(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\tau, r\sin\tau) \sin 2\tau \, d\tau$$

$$H(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r\cos\tau) \cos^2\tau \, d\tau$$

Współrzędne punktu osobliwego znajdziemy przyrównując do zera prawe strony równania (17). Jeżeli spełnione są warunki (9), wtedy następuje synchronizacja. Wystąpienie drgania prawie okresowego związane jest z wystąpieniem cyklu granicznego równania (17), którego istnienie zależy od zachowania się funkcji:

$$A(r) - G(r)$$

Dla istnienia cyklu granicznego koniecznym jest aby: $A(r) - G(r) > 0$ dla otoczenia $r = 0$. Prócz tego dla dostatecznie dużego r musi być wypełniona nierówność $A(r) - G(r) < 0$.

Przy bardzo małym γ następuje małe tętnienie amplitudy wokół wartości możliwej do wyznaczenia z równania:

$$A(r) - G(r) = 0$$

Szereg Fouriera drgania prawie okresowego występującego w tym przypadku da się także przedstawić w postaci analogicznej do relacji (15).

LITERATURA

[1] Bogolubow N.N., Mitropolskij J.A.: Asimptoticzeskije metody w teorii nieliniejnych kolebanij. Gostiechizdat 1955.

[2] Siwczyński M.: O istnieniu drgań prawie okresowych w układach synchronizacji. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka, z. 35; 1972

[3] Zagajewski T.: Czas ustalania się drgań i zniekształcenia nieliniowe generatorów lampowych. Archiwum Elektrotechniki tom VI, z.3, 1957.

[4] Mc Lachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN 1964.

Przyjęto do druku w listopadzie 1973 r.

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ГЕНЕРАТОРАХ VAN DER POLA

Р е з ю м е

В статье приведены условия выступления почти-периодических колебаний в генераторе van der Pola. Такие колебания могут выступить при отсутствии внешней синхронизации, что проявляется в медленной биении амплитуду и фазы. В заключении приведен ряд фурье для исследуемых почти-периодических колебаний.

VAN DER POL QUASIPERIODIC VIBRATIONS

S u m m a r y

The conditions of quasiperiodic vibrations in Van der Pol oscillator are discussed in the paper. The reason of those vibrations is cutting of outside synchronization observed as slow amplitude and phase pulsations. Fourier line is shown for considered problem.