Co to jest Groupland

Olga Macedońska

Streszczenie

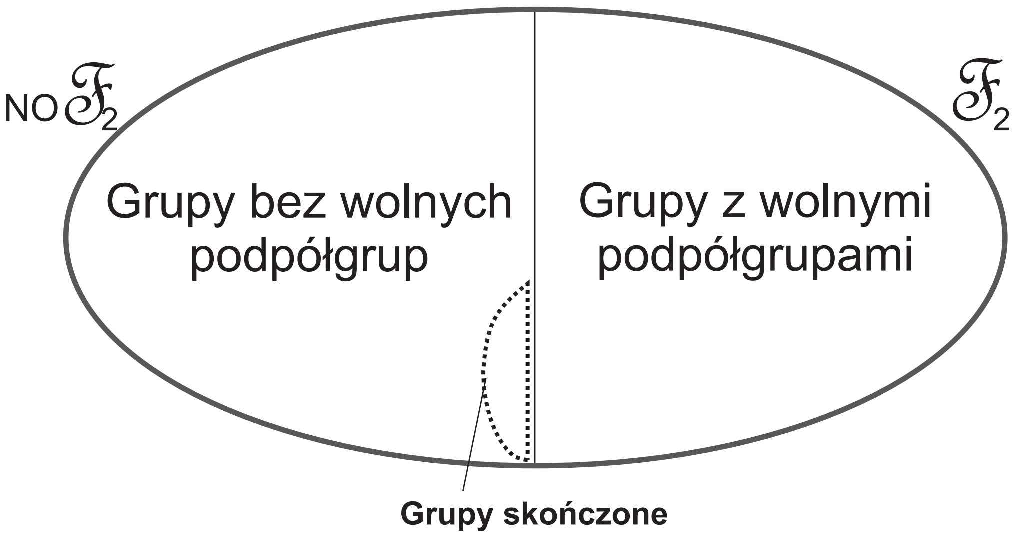
Groupland jest płaską planetą, gdzie grupy mieszkają w obszarach określonych przez ich własności, na przykład grupy skończone, grupy rezydualnie skończone, grupy spełniające tożsamości, grupy o różnych typach wzrostu, itd. Uwidocznia to zależności między własnościami i ułatwia formułowanie problemów. Ważnym jest duży obszar grup lokalnie gradowanych, gdzie pewne znane problemy mają pozytywne rozwiązania.

Podstawowe wiadomości z Teorii Grup można znaleźć w książce „Wstęp do Teorii Grup" autorstwa C. Bagińskiego [3]. Niżej podajemy również najważniejsze terminy w języku angielskim, ponieważ w tym języku Groupland figuruje w literaturze i w sieci (http://mat.polsl.pl/groupland).

Zbiór X generatorów grupy F lub półgrupy $\mathcal{F}$ nazywamy **wolnym zbiorem generatorów**, jeżeli dowolne odwzorowanie zbioru X w dowolną grupę G (półgrupę $\mathcal{G}$), można przedłużyć do homomorfizmu grup $F \to G$ (homomorfizmu półgrup $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$). Grupę posiadającą wolny zbiór generatorów nazywamy **grupą wolną** (**a free group**). Półgrupę posiadającą wolny zbiór generatorów nazywamy **półgrupą wolną** (**a free semigroup**). Zapis elementów za pomocą generatorów wolnych jest jednoznaczny.

Oznaczmy przez $\mathcal{F}_2$ półgrupę wolną rangi 2, czyli o dwóch generatorach wolnych. Mówimy skrótowo, że grupa G zawiera $\mathcal{F}_2$ jeśli pewna podpółgrupa w G jest izomorficzna z $\mathcal{F}_2$. Każda niecykliczna grupa wolna zawiera $\mathcal{F}_2$. Wiadomo, że $\mathcal{F}_2$ zawiera półgrupę wolną o nieskończonej ilości generatorów, więc ważnym jest fakt czy dana grupa G zawiera $\mathcal{F}_2$ czy nie. Grupy abelowe lub grupy skończone nie zawieraja $\mathcal{F}_2$, ponieważ równości $gh = hg$ lub $g^m = g^n$ przeczą jednoznaczności zapisu elementów.

Groupland [20] jest płaską planetą (rysunek 1), gdzie grupy mieszkają w obszarach określonych przez ich własności. **Grupy nie zawierające $\mathcal{F}_2$**



Rysunek 1: Groupland.

zajmują lewą połowę Gruplandu. Grupy zawierające $\mathcal{F}_2$ zajmują prawą połowę Grouplandu.

Grupy i półgrupy rozważane niżej mają zapis multyplikatywny, a element neutralny oznaczony jest przez e. Grupę wolną niecykliczną oznaczamy literą F. **Tożsamością półgrupową (semigroup identity)** nazywamy wyrażenie

$$u(x, y, \ldots, z) = v(x, y, \ldots, z), \tag{1}$$

gdzie słowa u, v są zapisane bez odwrotności zmiennych, na przykład tożsamość przemienności mnożenia $xy = yx$ lub tożsamość skończonego wykładnika $x^n = 1$, $n \geq 1$ są tożsamościami półgrupowymi. Mówimy, że grupa G spełnia tożsamość, jeśli po podstawieniu do (1) elementów grupy zamiast zmiennych oraz elementu e zamiast symbolu "1", otrzymamy równość w grupie.

Niech G będzie dowolną grupą. **Komutatorem** elementów $a, b \in G$ nazywamy element postaci $a^{-1}b^{-1}ab$, oznaczany skrótowo przez $[a, b]$. Zauważmy, że $[a, b]^{-1} = [b, a]$. Podgrupa G' generowana przez wszystkie komutatory w grupie G jest nazywana **komutantem** grupy G **(commutator subgroup)**. Grupa G jest abelowa (przemienna) wtedy i tylko wtedy gdy

$G' = \{e\}$. Przez a^b oznaczamy element $b^{-1}ab$ (**sprzężony** z a za pomocą b). Podgrupę N w grupie G nazywamy **dzielnikiem normalnym (normal subgroup)** jeśli razem z każdym elementem a zawiera ona wszystkie elementy sprzężone z a za pomocą elementów z G.

Komutant G' jest dzielnikiem normalnym w grupie G. Wynika to z równosci: $(a_1a_2)^b = a_1^b a_2^b$ i $[a_1, a_2]^b = [a_1^b, a_2^b]$. Każdy dzielnik normalny N w grupie G określa grupę ilorazową G/N, elementami której są warstwy Ng. Grupa G/G' jest abelowa, a grupę F/F' nazywamy grupą wolną abelową lub wolną w rozmaitości grup abelowych.

Podgrupa F^k generowana przez k-te potęgi wszystkich elementów w grupie F też jest dzielnikiem normalnym, ponieważ $(a^k)^b = (a^b)^k$. Grupę F/F^k nazywamy grupą relatywnie wolną o wykładniku k (czyli spełniającą tożsamość $x^k = 1$).

Zauważmy, że tożsamość $xy = yx$ i tożsamość $[x, y] = 1$ są równoważne, ale tylko pierwsza ma postać tożsamości półgrupowej. Możemy rozpatrywać komutatory iterowane. Pokażemy, że tożsamość $[[x, y], y] = 1$ jest równoważna tożsamości półgrupowej $xy^2x = yx^2y$. Mianowicie, jeśli grupa G spełnia tożsamość $[[x, y], y] = 1$, to też spełnia tożsamość $[[x, xy], xy] = 1$, oraz tożsamość $[x, y][[x, xy], xy][y, x] = 1$. Ostatnia sprowadza się po przekształceniu do $(yx^2y)^{-1}(xy^2x) = 1$, czyli mamy $xy^2x = yx^2y$.

Grupę spełniającą tożsamość $[\dots[[x, y], y], \dots, y] = 1$, gdzie y powtarza się n razy, nazywamy grupą n-engelową. Problem czy taka grupa zawsze spełnia tożsamość półgrupową był postawiony w roku 1963 przez Shirshova ([17], 2.82) i nadal jest otwarty dla $n > 4$.

Dla dowolnej grupy G wprowadźmy komutanty iterowane. Oznaczmy

$$\gamma_1(G) := G, \quad \gamma_2(G) := G' = [G, G], \quad \dots \quad \gamma_{n+1}(G) := [\gamma_n(G), G],\ n > 2.$$

Jeśli $\gamma_{n+1}(G) = \{e\}$ oraz $\gamma_n(G) \neq \{e\}$ to grupę G nazywamy **nilpotentną** (**nilpotent**) klasy n.

Mówimy, że grupa G jest rozszerzeniem grupy z klasy $\mathcal{A}$ za pomocą grupy z klasy $\mathcal{B}$ jeśli zawiera ona dzielnik normalny N należący do klasy $\mathcal{A}$ taki, że grupa ilorazowa G/N należy do klasy $\mathcal{B}$. Jeśli klasa $\mathcal{A}$ składa się z grup nilpotentnych, a klasa $\mathcal{B}$ – z grup skończonych, to grupę G nazywamy **prawie nilpotentną** (**nilpotent-by-finite**). Zawiera ona nilpotentny dzielnik normalny N taki, że grupa ilorazowa G/N jest skończona.

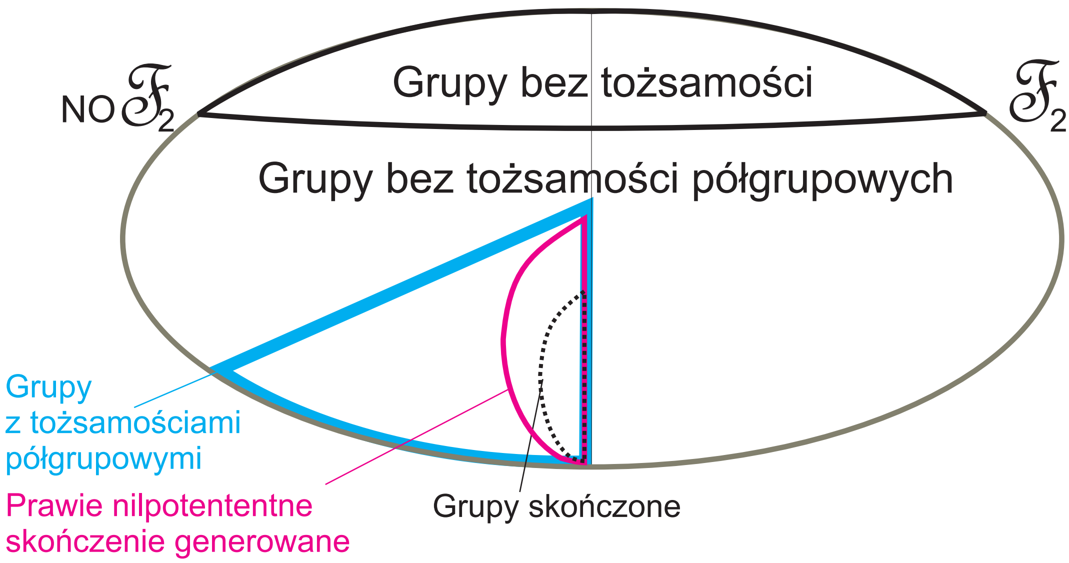
W roku 1953 A. Malcev [21] i, niezależnie, w 1963 B. Neumann i T. Tailor [24], pokazali że grupa nilpotentna spełnia tożsamość półgrupową. Tożsamość, którą znalazł Malcev dla grup nilpotentnych klasy n ma postać $P_n = Q_n$, gdzie P_n, Q_n są słowami na literach $x, y, z_1, \ldots, z_n$, zadanymi w następujący sposób: $P_0 := x$, $Q_0 := y$; $P_1 := xz_1y$, $Q_1 := yz_1x$ oraz, dla $n > 1$, $P_n := P_{n-1}z_nQ_{n-1}$, $Q_n := Q_{n-1}z_nP_{n-1}$.

Jeśli grupa G ma nilpotentny (klasy n) dzielnik normalny N, a grupa G/N ma wykładnik k (spełnia tożsamość $x^k = 1$), to G spełnia tożsamość półgrupową otrzymaną z $P_n = Q_n$ przez zamianę zmiennych $x, y, z_1, \ldots, z_n$ na ich k-te potęgi $x^k, y^k, z_1^k, \ldots, z_n^k$.

W pracy [18] J. Lewin i T. Lewin pokazali, że jeśli grupa G spełnia tożsamość półgrupową, to każda tożsamość spełniona w G jest równoważna pewnej tożsamości półgrupowej. Pozwala to na rysunku 2 Grouplandu wyznaczyć następujące rozłączne obszary gdzie są grupy:

– **bez żadnych tożsamości** (**no identities**),
– **z tożsamościami nie-półgrupowymi** (**non-semigroup identities**),
– **z tożsamościami półgrupowymi** (**semigroup identities**).

Zauważmy, że grupy spełniające tożsamości półgrupowe nie mogą zawierać $\mathcal{F}_2$, ponieważ każda tożsamość półgrupowa implikuje tożsamość o dwóch zmiennych (wystarczy zamienić i-tą zmienną na xy^i), a generatory wolne w $\mathcal{F}_2$ nie mogą być związane żadną zależnością.

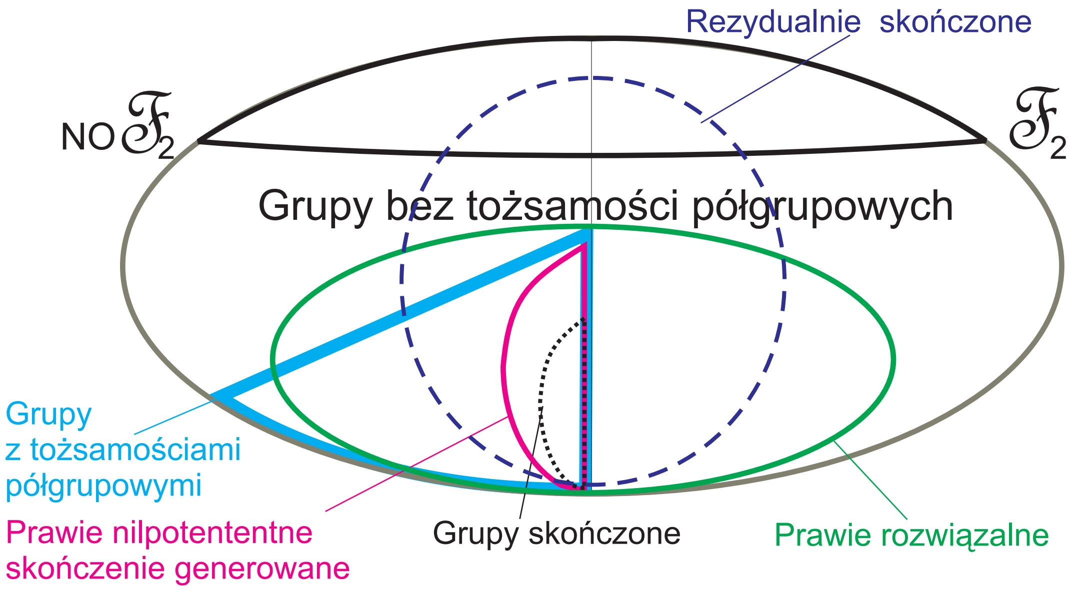


Podgrupa N w grupie G ma **indeks** k, jeśli G jest sumą k warstw postaci Ng. Podgrupa N jest dzielnikiem normalnym indeksu k wtedy i tylko wtedy gdy $|G/N| = k$. Grupę G nazywamy **rezydualnie skończoną** (**residually finite**), jeśli przecięcie wszystkich jej podgrup skończonego indeksu jest trywialne (równe $\{e\}$). P. Hall w pracy [13] pokazał, że grupa wolna F jest rezydualnie skończona. Grupy prawie nilpotentne skończenie generowane są także rezydualnie skończone. Grupa quasi-cykliczna C_{p^∞} nie jest rezydualnie skończona (jest to grupa izomorficzna z grupą pierwiastków z jedynki stopnia $p^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$).

Rozważmy szereg komutantów

$$G^{(1)} := [G, G] = G', \quad G^{''} := [G', G'], \quad \ldots \quad G^{(n)} := [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}],\ n \geq 2.$$

Jeśli $G^{(n)} = \{e\}$ oraz $G^{(n-1)} \neq \{e\}$, to grupę G nazywamy **rozwiązalną** (**soluble**) klasy n. Z definicji wynika, że każda grupa nilpotentna jest rozwiązalna, bo $G^{(n)} \subseteq \gamma_{n+1}(G)$, $n \geq 1$. Grupę rozwiązalną klasy 2, ($G'' = \{e\}$), nazywamy **metabelową** (**metabelian**). Wolna grupa metabelowa F/F'' jest rezydualnie skończona [13]. Grupa ta zawiera półgrupę wolną $\mathcal{F}_2$ [21], a więc nie spełnia żadnej tożsamości półgrupowej (spełnia ona tożsamość $[[x, y], [z, t]] = 1$). Przykład skończenie generowanej grupy rozwiązalnej, która nie jest rezydualnie skonńczona, podał G. Baumslag w pracy [4]. Grupę nazywamy **prawie rozwiązalną** (**soluble-by-finite**), jeśli zawiera ona rozwiązalny dzielnik normalny N taki, że grupa ilorazowa G/N jest skończona. Obszary grup rezydualnie skończonych i prawie rozwiązalnych widzimy niżej.



Każda podgrupa różna od całej grupy nazywa się podgrupą właściwą.

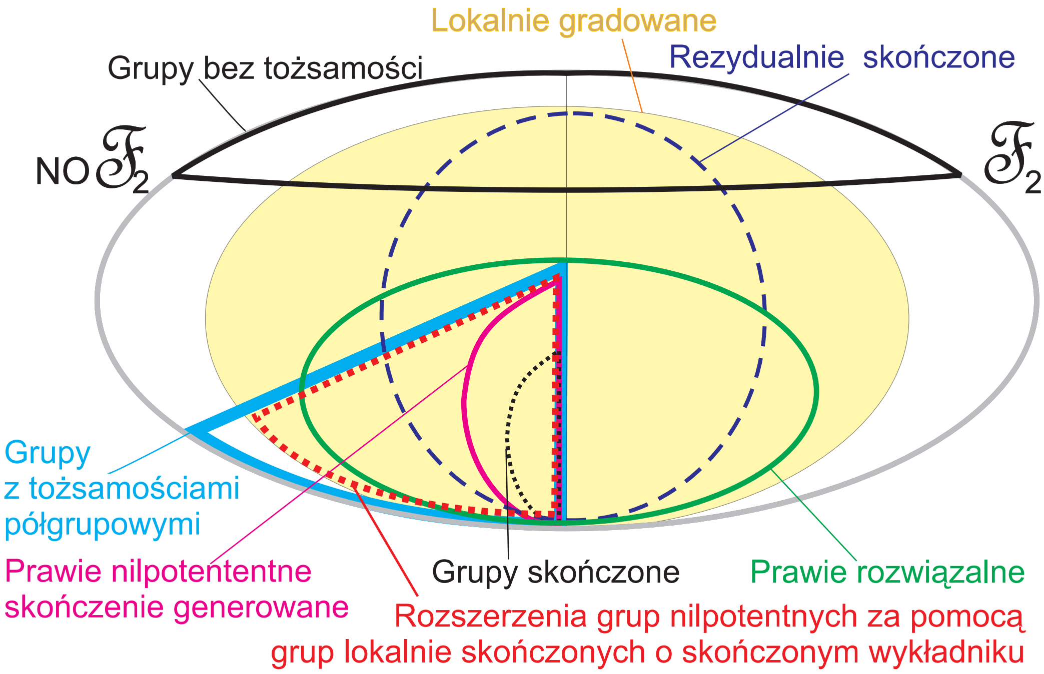
Pojęcie grupy **lokalnie gradowanej** (**locally graded**) zostało wprowadzone przez Černikova w 1970 roku [8]. Grupę nazywamy lokalnie gradowaną, jeśli każda nietrywialna skończenie generowana podgrupa w G ma właściwą podgrupę skończonego indeksu.

Przykład grupy, która nie jest lokalnie gradowana, podał G. Higman [14]. Jest to następująca grupa określona za pomocą prezentacji, czyli zapisana przez elementy tworzące a, b, c, d i zależności pomiędzy nimi:

$$G = \langle a, b, c, d \mid b^a = b^2, c^b = c^2, d^c = d^2, a^d = a^2 \rangle.$$

Jest to grupa nieskończona, skończenie generowana nie posiadająca podgrupy właściwej skończonego indeksu. Oznacza to że grupa G nie jest lokalnie gradowana.

Na rysunku 4 klasę grup lokalnie gradowanych przedstawiono za pomocą dużej żółtej elipsy. Widać, że wszystkie grupy rezydualnie skończone i prawie rozwiązalne są lokalnie gradowane.



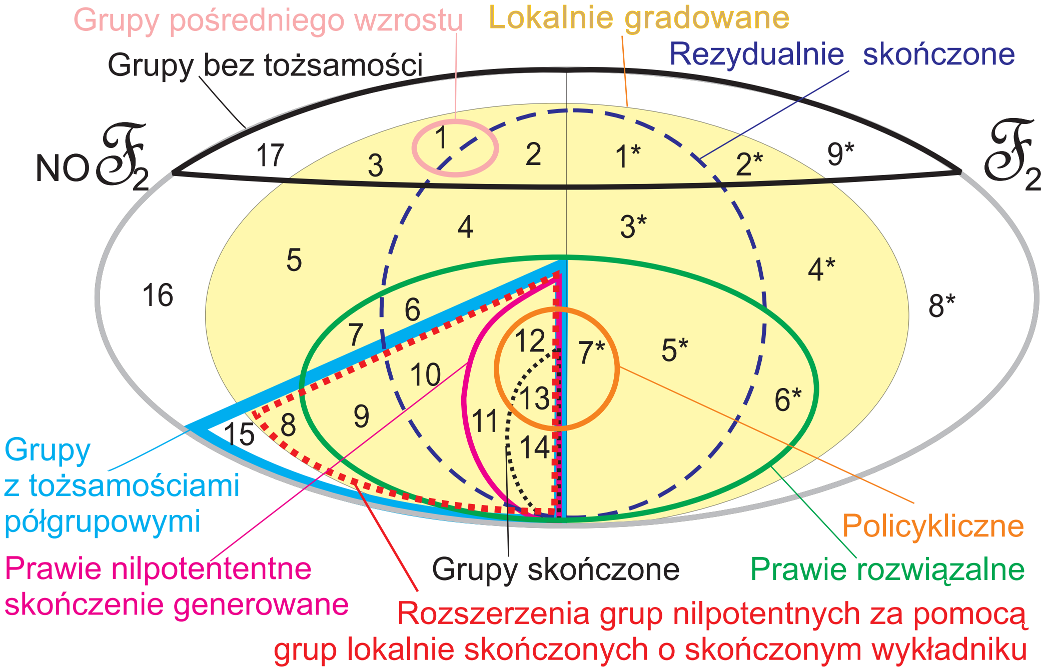
Grupę nazywamy **lokalnie skończoną** (**locally finite**), jeśli każda jej skończenie generowana podgrupa jest skończona. Grupa ma skończony wykładnik, powiedzmy n, jeśli $g^n = e$ dla każdego elementu g w G. Mówimy, że grupa G jest **rozszerzeniem grupy nilpotentnej za pomocą grupy lokalnie skończonej o skończonym wykładniku** (**nilpotent-by-locally finite of finite exponent**), jeśli G zawiera nilpotentny dzielnik normalny N taki, że grupa ilorazowa G/N jest lokalnie skończona o skończonym wykładniku. Jak mówiliśmy na stronie 4, takie grupy spełniają tożsamości półgrupowe.

W roku 1953 powstała hipoteza o słuszności stwierdzenia odwrotnego, że grupa spełnia tożsamości półgrupowe tylko wtedy, gdy jest rozszerzeniem grupy nilpotentnej za pomocą grupy o skończonym wykładniku. Kontrprzykład znaleziono dopiero w roku 1996 [26] przez Olszanskiego i Storozhewa. Określono rodzine grup spełniajacych tożsamości półgrupowe i nie posiadajacych nilpotentnego dzielnika normalnego z ilorazem o skończonym wykładniku. Konstrukacja bazuje na geometrycznej teorii Olszanskiego, opisanej w książce [25]. Grupy te nie są lokalnie gradowane, a więc znajdują się w obszrze 15 Grouplandu na rysunku 5.

Jednak w klasie grup lokalnie gradowanych ta hipoteza jest prawdziwa. Jak wynika z [5] i ([7] Corollary 1), grupa lokalnie gradowana spełnia tożsamość półgrupową wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozszerzeniem grupy nilpotentnej za pomocą grupy lokalnie skończonej o skończonym wykładniku. Jest to widoczne na mapie Grouplandu w postaci obszaru z czerwonym przerywanym brzegiem. Obszar ten jest częścią wspólną obszarów grup spełniających tożsamość półgrupową i grup lokalnie gradowanych.
Niech $l_S(g)$ oznacza długość elementu $g \in G$ w najkrótszym zapisie przez generatory ze skończonego zbioru S. Wzrostem grupy nazywamy funkcję $f_S(n)$ równą liczbie elementów w grupie G, dla których $l_S(g) \leq n$. Typy wzrostów są niezależne od układu generatorów i są następujące: Grupa G ma wzrost wielomianowy jeśli istnieją liczby $A, d > 0$ takie, że dla każdego $n \in N$ zachodzi $f_S(n) \leq An^d$. Grupa ma wzrost wykładniczy, jeżeli istnieje stała rzeczywista $C > 1$ taka, że $f_S(n) > C^n$ dla każdego $n \in N$.

Zgodnie z wynikami Gromova [11], Milnora [22] i Wolfa [30], obszar grup wzrostu wielomianowego jest taki sam, jak obszar grup prawie nilpotentnych. Słynny problem o istnieniu grup o wzroście posrednim, czyli pomiędzy wielomianowym i wykładniczym, postawiony przez Milnora w 1968 roku [27], został rozwiązany w 1984 roku przez R. Grigorchuka, który podał pierwszy przykład grupy pośredniego wzrostu [10]. Przez ponad dwadzieścia lat wszystkie znane przykłady takich grup (np. [1], [12], [29]) były grupami rezydualnie skończonymi. Jednak w 2002 roku A. Erschler skonstruowała pierwsze przykłady grup wzrostu pośredniego, które nie są rezydualnie skończone [9]. Grupy te są lokalnie gradowane, ponieważ zgodnie z ([9], Theorem 1) są one skończonymi rozszerzeniami rezydualnie skończonych grup Grigorchuka, a klasa grup lokalnie gradowanych jest zamknięta względem rozszerzeń.

Wprowadzimy numery dla oznaczenia obszarów.



Numery obszarów po prawej stronie Grouplandu, gdzie grupy zawierają wolną podpółgrupę, mają (dla wygody adresowania) gwiazdki. Obszar 1 składa się z grup wzrostu pośredniego, a obszary 11-14 – z grup o wzroście wielomianowym. Pozostałe obszary zawierają grupy o wzroście wykładniczym.
Obszary 12, 13 i 7* zawierają grupy policykliczne. Grupę nazywamy policykliczną jeśli posiada ona szereg subnormalny o cyklicznych ilorazach. Grupy policykliczne są rezydualnie skończone ([23] 32.1). W ([28] 4.7) pokazano, że skończenie generowane grupy rozwiązalne nie zawierające $\mathcal{F}_2$ muszą być policykliczne, a stąd, zgodnie z ([28] 4.12), muszą być prawie nilpotentne. Jako przykład grupy policyklicznej zawierającej $\mathcal{F}_2$ mamy grupę zaproponowaną przez B. Neumanna

$$G = \langle a, b, c \mid [a, b] = 1, a^c = ab, b^c = a^2 b \rangle,$$

która, jak pokazano w ([23] 32.35), generuje całą rozmaitość grup metabelowych, oznaczaną przez $\mathfrak{A}^2$. Wynika stąd, że G nie może być prawie nilpotentna, więc musi zawierać $\mathcal{F}_2$.

Jest możliwe, że wiele pytań mających negatywne odpowiedzi w ogólności, mają odpowiedź pozytywną w klasie grup lokalnie gradowanych. Na przykład, pytanie *czy każda n-engelowa grupa jest lokalnie nilpotentna* jest znane od roku 1936, kiedy to Zorn udowodnił, że skończona n-engelowa grupa jest nilpotentna. Pozytywne odpowiedzi były znalezione dla rozwiązalnych grup n-engelowych (Gruenberg, 1953), rezydualnie skończonych grup n-engelowych (Wilson, 1991), proskończonych grup n-engelowych (Wilson i Zelmanov, 1992), patrz [6]. Problem jest nadal otwarty w ogólności. Jednak Kim i Rhemtulla w [16] pokazali, że każda lokalnie gradowana grupa n-engelowa jest lokalnie nilpotentna.

Słynny Problem postawiony przez Burnside'a z 1902 roku dotyczy grup o n generatorach, spełniających tożsamość $x^k = 1$ (patrz np. [2]). Grupy te nazywane są teraz grupami Burnside'a i oznaczane $B(n, k)$. Pytanie brzmi, czy taka grupa może być nieskończona. Dopiero w 1968 roku udowodnione było przez Novikova i Adiana istnienie nieskończonych grup Burnside'a dla dużych k i dowolnego $n > 1$.

Możemy udowodnić, że w klasie grup lokalnie gradowanych powyższy Problem Burnside'a ma rozwiązanie pozytywne, czyli, że każda lokalnie gradowana, skończenie generowana grupa G, spełniająca tożsamość $x^k = 1$, musi być skończona. Rzeczywiście, z prac E. Zelmanova wynika, że każda grupa z tożsamością $x^k = 1$ ma tylko skończenie wiele grup ilorazowych skończonych, więc musi mieć minimalny dzielnik normalny N, skończonego indeksu w G ($|G : N| < \infty$). Zatem, na podstawie ([15] 14.3.2.), podgrupa N jest skończenie generowana. Jeśli $N \neq \{e\}$, to leżąc w grupie lokalnie gradowanej, N musi posiadać podgrupę właściwą H (to znaczy $N \supsetneqq H$), skończonego indeksu w N ($|N : H| < \infty$). Stąd $|G : H| = |G : N| \cdot |N : H| < \infty$, czyli $|G : H| < \infty$. Wtedy, na podstawie Twierdzenia ze strony 196 w [19], H posiada podgrupę K charakterystyczną w G (a więc normalną w G), która ma skończony indeks w G ($|G : K| < \infty$). Mamy więc że N i K są dzielnikami normalnymi w G, o skończonych indeksach. Przy tym N jest minimalny o tej własności, a jednocześnie:

$$G \supseteq N \supsetneqq H \supseteq K.$$

Przeczy to minimalności N. Pozostaje więc przypadek $N = \{e\}$. Ponieważ N jest podgrupą skończonego indeksu, oznacza to, że G jest grupą skończoną co kończy dowód.

Grupa Burnside'a $B(n, k)$ jest izomorficzna z grupą F/F^k rangi n. Nieskończone grupy Burnside'a nie są lokalnie gradowane, ponieważ na podstawie prac E. Zelmanova, posiadają minimalny dzielnik normalny skończonego indeksu. Wynika stąd że nieskończone grupy Burnside'a (na przykład grupa F/F^{665}) leżą w obszrze 15 Grouplandu. Dla $k = 5$ powyższy problem Burnside'a jest nadal otwarty. Gdzie leży grupa F/F^5 nie jest znane. Może ona być w obszarze 15 lub w obszarze 13 jeśli jest skończona, bo musi wtedy mieć rząd nieparzysty i, na podstawie Twierdzenia Feita i Tomsona, musi być rozwiązalna, a zatem policykliczna.

Zadanie 1 Dla każdego obszaru znaleźć przykład grupy należącej do niego.

Zadanie 2 W jakich obszarach nie ma grup skończenie generowanyh lub nie ma grup nieskończenie generowanych?

Zadanie 3 W jakich obszarach nie ma grup relatywnie wolnych?

Literatura

[1] S. V. Alesin, *Finite automata and the Burnside problem for periodic groups*, Mat. Zametki **11** (1972), 319–328.

[2] C. Bagiński, *O problemach Burnside'a*, Wiadomości Matem. **33** (1997), 53–74.

[3] C. Bagiński, *Wstęp do Teorii Grup*, Wyd. SCRIPT, Warszawa 2002.

[4] G. Baumslag, *A finitely presented solvable group that is not residually finite*, Math. Z. **133** (1973), 125–127.

[5] R. G. Burns, O. Macedońska, Y. Medvedev, *Groups Satistying Semigroup Laws, and Nilpotent-by-Burnside Varietes*, J. Algebra **195** (1997), 510–525.

[6] R. G. Burns, Y. Medvedev, *A note on Engel groups and local nilpotence*, J. Austr. Math. Soc. (Series A) **64** (1998), 92–100.

[7] R. G. Burns, Y. Medvedev, *Group laws implying virtual nilpotence*, J. Austr. Math. Soc. **74** (3) (2003), 295–312.

[8] Černikov, *Infinite nonabelian groups with an invariance condition for infinite nonabelian subgroups* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **194** (1970), 1280–1283.

[9] Anna Erschler, *Not residually finite groups of intermediate growth, commensurability and non-geometricity*, J. Algebra **272** (2004), 154–172.

[10] R. I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), 939–985 (także Math. USSR Izv., **25** (2) (1985), 259–300).

[11] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publs. Math. Inst. hautes etud. sci. **53** (1981), 53–73.

[12] N. Gupta, S. Sidki, *On the Burnside problem for periodic groups*, Math. Z. **182** (1983), 385–388.

[13] P. Hall, *On the finiteness of certain soluble groups,* Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 595–622.

[14] G. Higman, *A finitely generated infinite simple group* J. London Math. Soc. **26** (1951), 61–64.

[15] M. I. Kargapołow, J. I. Mierzlakow, *Podstawy teorii grup*, PWN, Warszawa 1976.

[16] Y. Kim, A. H. Rhemtulla, *On locally graded groups*, Groups–Korea '94 (Pusan), 189–197, de Gruyter, Berlin, 1995.

[17] The Kourovka Notebook: unsolved problems in group theory, *14th ed., Inst. Math. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk Rossii, Novosibirsk, 1999.*

[18] Jacques Lewin, Tekla Lewin, *Semigroup laws in varietes of soluble groups,* Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 1–9.

[19] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, Combinatorial Group Theory, *Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1977.*

[20] O. Macedońska, *Groupland*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **305** (2003), 400-404.

[21] A. I. Malcev, *Nilpotent semigroups*, Ivanov. Gos. Ped. Inst. Uc. Zap. Fiz. Mat. Nauki, **4** (1953), 107–111.

[22] J. Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups* J. Differential Geometry, **2** (1968), 447–449.

[23] H. Neumann, *Varietes of Groups,* Springer-Verlag New York (1967).

[24] B. H. Neumann, T. Taylor *Subsemigroups of nilpotent groups*, Proc. Royal Soc. (Series A) **274** (1963), 1–4.

[25] Olshanskii, A.Yu. *Geometry of defining relations in groups*; Mathematics and its applications (Soviet Series), 70; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1991.

[26] A. Yu. Olshanskii, A. Storozhev, *A group variety defined by a semigroup law,* J. Austral. Math. Soc. (Series A) **60** (1996), 255–259.

[27] E. A. Power, John Milnor, L. Carlitz, R. A. Struble, R. E. Shafer, A. Wilansky, R. E. Maas, Neal Felsinger, J. M. S. Simoes, *Problems and Solutions: Advanced Problems*, Amer. Math. Monthly **75** (6) (1968), 685–687.

[28] J. M. Rosenblatt, *Invariant measures and growth conditions,* Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974), 33–53.

[29] V. I. Sushchanskii, *Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **247** (1979), 557–561.

[30] J. A. Wolf, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry, **2** (1968), 421–446.