

JERZY KOTOWSKI  
MAREK OLESIAK  
INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

#### GRADIENTOWE METODY OPTIMALIZACJI PARAMETRÓW SIECI WODOCIĄGOWEJ

Praca zawiera opis zadania statycznej optymalizacji parametrów złożonej sieci wodociągowej pracującej na potrzeby aglomeracji miejsko-przemysłowej oraz analizę jego własności. Posłużyły one autorom do opracowania szeregu algorytmów obliczeniowych, służących do rozwiązania sformułowanego zadania optymalizacji. W końcowej części pracy zamieszczono opis tych algorytmów, wyniki przeprowadzonych testów porównawczych oraz wnioski dotyczące możliwości oraz zasadności aplikacji tych metod w praktyce. Przedstawione rezultaty są częścią zakrojonych na szerszą skalę prac poświęconych opracowaniu komputerowo wspomaganego systemu sterowania złożonymi sieciami rozprowadzania wody.

#### 1. WSTĘP

W pracy rozpatrywany jest problem budowy algorytmów dla potrzeb optymalnego sterowania systemem zaopatrzenia w wodę odbiorców. Zagadnienie to ogólnie sformułowane zostało w pracy [3], w której przyjęto, jako kryterium sterowania, średnią wartość kosztów związanych z eksploatacją systemu w dłuższym horyzoncie czasu rzędu 1 doby. Model matematyczny systemu uwzględniał dynamikę związaną z funkcjonowaniem zbiorników sieciowych, losowość natężenia poboru wody przez odbiorców oraz zróżnicowanie cen za energię elektryczną. W takim ujęciu zagadnienie optymalnego sterowania zaopatrzeniem w wodę stanowi wyjątkowo złożony problem.

W cytowanej już pracy zaproponowano procedurę rozwiązania wykorzystującą ideę dekompozycji. Koncepcja ta prowadzi do podziału zadania sterowania. Na pierwszym poziomie rozwiązywany jest problem dynamicznej optymalizacji, w rezultacie czego uzyskuje się harmonogram współpracy zbiorników sieciowych z siecią wodociągową. Harmonogram ten określa natężenie przepływu wody pomiędzy zbiornikami sieciowymi a siecią wodociągową w pewnych elementarnych (rzędu 1 godz.) przedziałach czasu rozpatrywanego horyzontu optymalizacji. Podstawą funkcjonowania pierwszego poziomu sterowania jest zagregowany model sieci wodociągowej, oraz pro-

babilistyczna informacja o wielkościach poborów wody przez odbiorców. Należy nadmienić, że rezultatem obliczeń na pierwszym poziomie jest algorytm sterowania dany w postaci funkcji uzależniającej natężenie przepływu pomiędzy zbiornikiem i siecią, a ilością wody zgromadzonej aktualnie w zbiorniku.

Na drugim poziomie sterowania określane są optymalne punkty pracy poszczególnych zespołów pompowych. Obliczenia prowadzone są tutaj w oparciu o szczegółowy model matematyczny sieci wodociągowej przedstawiony w pracy [6]. Wykorzystywana jest przy tym informacja o prognozowanych na najbliższy okres wartościach poboru wody przez odbiorców oraz ustalone na I poziomie sterowania natężenie przepływu wody do lub ze zbiorników sieciowych.

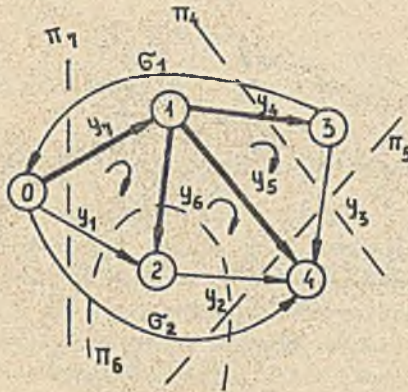
Wyznaczone na tym poziomie optymalne punkty pracy zespołów pompowych stanowią bezpośrednią podstawę określania ilości i rodzaju pomp, które powinny być włączone do pracy oraz ich ewentualnej, o ile jest to możliwe, regulacji. Zakłada się, że działania sterujące w rezultacie funkcjonowania II poziomu następować będą w krótkich odstępach czasu rzędu 1/2-1 godz. Stawia to wysokie wymagania dotyczące głównie czasu obliczeń realizowanych na tym poziomie. W niniejszej pracy analizowane będą metody pozwalające na uruchomienie algorytmów i programów II poziomu optymalizacji spełniających wymagania dotyczące zarówno czasu jak i dokładności obliczeń.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI PARAMETRÓW SIECI WODOCIĄGOWEJ

Problem parametrycznej optymalizacji sieci wodociągowej sformułowany jest jako zadanie polegające na minimalizacji strat energetycznych związanych z transportem wody w sieci. Przy rozwiązywaniu tego zadania należy uwzględnić szereg ograniczeń związanych z koniecznością spełnienia równań wynikających z modelu matematycznego sieci wodociągowej, uzyskania odpowiednich ciśnień w wybranych punktach sieci oraz zapewnienia odpowiedniej wartości natężenia przepływu wody do odbiorców i zbiorników sieciowych. Przykładowy schemat sieci wodociągowej przedstawiono na rys. 1. Ma on postać zamkniętej struktury powstałej przez dołączenie jednego fikcyjnego wierzchołka.

Ograniczenia wynikające z prawa zachowania ciągłości przepływu oraz z warunków zachowania energii można sformułować teraz w sposób szczególny, wykorzystując pojęcie drzewa  $T$ . Niech sieć wodociągowa posiada  $m$  wierzchołków (nie licząc wierzchołka fikcyjnego) oraz  $n$  łuków, które odpowiadają nieznanym przepływom. Drzewo  $T$  zawiera wówczas  $m$  łuków, wyznaczając jednoznacznie dokładnie  $m$  przekrojów w sieci. Rys. 1. stanowi ilustrację tej konstrukcji. Łuki należące do drzewa narysowane są grubszą linią, przekroje  $\Pi_i$  oznaczono linią przerywaną. Przyjmijemy dodatkowo zasadę, że numerację łuków rozpoczynamy od tych, które nie na-

leżą do drzewa, przy czym numery  $1, 2, \dots, n-1$  przyporządkowane są łukom sieci, zawierającym zespoły pompowni nie należące do drzewa. Pompowni należące do drzewa przyporządkujemy numer  $n$ , tj. ostatni numer spośród wszystkich łuków sieci.



Rys. 1. Schemat sieci wodociągowej z wyróżnionym drzewem  $T$ .

Ograniczenia związane z zachowaniem ciągłości przepływu można teraz uzyskać z równań bilansowych, dotyczących każdego z wyróżnionych przekrojów. Przykładowo dla przekroju  $\Pi_7$  równanie to ma postać

$$y_1 + y_7 - \sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad (2.1)$$

Ogólnie, dzięki przyjętemu sposobowi numeracji, uzyskuje się równania w następującej macierzowej postaci

$$[-C, I_m] \cdot \begin{bmatrix} y_I \\ y_{II} \end{bmatrix} = D\sigma, \quad (2.2)$$

gdzie:  $I_m$  - macierz jednostkowa o wymiarach  $m \times m$ ,  
 $C$  - macierz  $m \times (n-m)$  o elementach 1, -1 lub 0,  
 $D$  - macierz  $m \times p$  o elementach 1, -1 lub 0,  
 $y_I = (y_1, y_2, \dots, y_{n-m})^T$  - wektor przepływów w łukach nie należących do drzewa  $T$ ,  
 $y_{II} = (y_{n-m+1}, \dots, y_n)^T$  - wektor przepływów w łukach należących do drzewa  $T$ .

Rozważmy obecnie równania wynikające z prawa zachowania energii. Równania te orzekają, że w zamkniętych konturach sieci suma spadków ciśnienia i wysokości podnoszenia zespołów pompowych jest równa zero. Wprowadźmy wielkość  $x_i$  oznaczającą spadek ciśnienia na  $i$ -tym łuku sieci,

który scharakteryzowany jest oporem hydraulicznym  $k_i$  oraz różnicą wysokości geodezyjnej pomiędzy końcami łuku  $d_i$

$$x_i = k_i \cdot |y_i|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} y_i + d_i \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\operatorname{sgn} y_i = \begin{cases} 1 & y_i \geq 0 \\ -1 & y_i < 0 \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n,$$

$\alpha$  - parametr stały, przyjmuje się na ogół  $\alpha = 3$ .

Można zauważyć, że wybór drzewa T w sposób jednoznaczny określa zamknięte kontury sieci. Dołączenie bowiem do drzewa T któregośkolwiek łuku spoza drzewa powoduje powstanie jednego, ściśle określonego konturu sieci. Rozpoczynamy proces budowy równań, dołączając łuki o numerach  $1, 2, \dots, n-1$ . Są to jednocześnie, zgodnie z przyjętymi wcześniej ustaleniami, numery zespołów pompowych nie należących do drzewa. Wysokość podnoszenia tych zespołów oznaczana będzie przez  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ . Zespół pompowy, należący do drzewa, posiada numer n, a jego wysokość podnoszenia oznaczana jest przez  $H_n$ .

W rezultacie przyjętych oznaczeń i sposobu wyboru konturów uzyskuje się następującą postać równań

$$Bx = \begin{bmatrix} H - \mathbf{1}_{n-1} \cdot H_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

gdzie: B - macierz incydencji konturów sieci powstałych w rezultacie wyboru drzewa T,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - wektor strat ciśnienia,

$H = (H_1, H_2, \dots, H_{n-1})^T$  - wektor wysokości podnoszenia zespołów pompowych należących do drzewa,

$H_n$  - wysokość podnoszenia zespołu pompowego należącego do drzewa,

$\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^T$  - wektor o wymiarze n,

$0 = (0, 0, \dots, 0)^T$  - wektor zerowy.

Okazuje się, że [2], [6] przy zachowaniu przyjętego powyżej sposobu budowy równań macierz B posiada szczególną postać ściśle związaną z macierzą występującą w ograniczeniu (2.2)

$$B = \begin{bmatrix} I_{n-n} & C^T \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

gdzie:  $I_{n-n}$  - macierz jednostkowa o wymiarach  $(n-n) \times (n-n)$ ,

C - macierz transponowana do macierzy wprowadzonej w ograniczeniu (2.2).

Przedstawiona powyżej technika budowy ograniczeń pozwala wyeliminować pewne nieznanne zmienne z zadania optymalizacji. Można zauważyć, że dzięki postaci (2.2) ograniczeń związanych z zachowaniem ciągłości przepływu uzyskuje się

$$y_{II} = C \cdot y_I + D\sigma. \quad (2.6)$$

Wektor przepływów  $y$  zależy więc od wektora przepływów  $y_I$  nie należących do drzewa  $T$

$$y = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ C \end{bmatrix} \cdot y_I + \begin{bmatrix} 0 \\ D\sigma \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Korzystając ze wzoru (2.5), określającego postać macierzy konturów  $B$ , otrzymuje się

$$y = B^T \cdot y_I + \bar{c}, \quad (2.8)$$

gdzie

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ D\sigma \end{bmatrix}.$$

Wektor  $y_I$ , w skład którego wchodzi przepływy spoza drzewa  $T$ , określany będzie w dalszym ciągu jako wektor zredukowany. Zależność (2.8) umożliwia zmniejszenie wymiaru zadania polegającego na minimalizacji strat energetycznych w sieci wodociągowej. Zadanie to opisane było szczegółowo w pracy [2,6]. Ma ono następującą postać:

$$(P) \quad \min \left\{ f(y) = \sum_{i=1}^n r_i(y_i) \right\}, \quad (2.9)$$

$$Ay = b, \quad (2.10)$$

$$B_2 x = M \cdot H, \quad (2.11)$$

$$B_1 x + H_n \cdot \mathbf{1} \geq p^x, \quad (2.12)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y_n \geq 0, \quad (2.13)$$

gdzie  $f_i(y_i) = x_i y_i$  - moc tracona w  $i$ -tym odcinku sieci wodociągowej.

Korzystając z zależności (2.3) uzyskuje się następującą postać tej funkcji

$$f_i(y_i) = [k_i | y_i]^\alpha + d_i \cdot y_i. \quad (2.14)$$

Dla  $\alpha > 1$  jest to funkcja ściśle wypukła i dwukrotnie różniczkowalna. W dalszym ciągu pracy analizowany będzie taki właśnie przypadek.

Ograniczenia występujące w zadaniu (P) mają następującą interpretację: (2.10) jest ograniczeniem związanym z prawem zachowania ciągłości przepływu, (2.11) wynika z zasady zachowania energii, (2.12) określa minimalną wartość ciśnienia w wybranych punktach sieci, (2.13) precyzuje kierunek przepływu w łukach zawierających zespoły pompowe.

Skorzystamy obecnie z własności zadania (P) wykazanej w pracy a polegającej na tym, że z zadania (P) wyeliminować można ograniczenia (2.11), (2.12). Dodatkowo w pracy [7] pokazano, że jeśli do drzewa  $T$  zaliczony będzie zespół pompowy o najwyższej wysokości geodezyjnej, to możliwe jest wyeliminowanie ograniczenia określającego kierunek przepływu

$$y_n \geq 0.$$

W rezultacie tej własności zadanie (P) może być zastąpione przez następujący problem (PZ). Nazywany on będzie zadaniem zredukowanym:

$$(PZ) \quad \min \left\{ f(y) = \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \right\}, \quad (2.15)$$

$$Ay = b,$$

$$y_1, y_2, \dots, y_{s-1} \geq 0.$$

Po uzyskaniu optymalnego wektora przepływów  $y$  można określić optymalne wartości wysokości podnoszenia w poszczególnych zespołach pompowych. Wartość  $H_n$  uzyskuje się jako minimalną liczbę spełniającą ograniczenie (2.12). Pozostałe wartości  $H_i$  określa się rozwiązując liniowy układ równań (2.11). Obliczenia te prowadzone są dla wartości  $\bar{x}_i$  określonych dla optymalnych przepływów  $\bar{y}_i$

$$\bar{x}_i = k_i |\bar{y}_i|^{d-1} \cdot \text{sgn } \bar{y}_i + d_i. \quad (2.16)$$

Zauważmy teraz, że korzystając z wprowadzonego wcześniej sposobu budowy ograniczeń opierających się o pojęcie drzewa  $T$  zadanie (PZ) może być znacznie uproszczone. Skorzystamy z zależności (2.8), eliminując w ten sposób przepływy  $y_{II}$  z zadania (PZ). Otrzymamy następujący problem zredukowany:

$$(PZ) \quad \min \left\{ g(y_I) = f(B^T y_I + c) \right\} \quad (2.17)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_{s-1} \geq 0.$$

Zawiera on jedynie ograniczenia na znak części zmiennych wchodzących w skład wektora zredukowanego  $y_I$ . Nie występują tu żadne inne ograniczenia. Zgodnie z uwagami dotyczącymi wypukłości i co najmniej dwukrotnej różniczkowalności funkcji  $f_i(y_i)$  możemy zauważyć, że (PZ) jest problemem

wypukłym, do rozwiązania którego można stosować metody gradientowe, jak też wykorzystujące hesjan funkcji celu. Gradient zredukowanej funkcji celu  $g(y_I)$  można określić następującym wzorem

$$\nabla g(y_I) = B \nabla f(B^T y_I + |c), \quad (2.18)$$

gdzie  $\nabla f = (\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dots, \dot{f}_n)^T$  - gradient funkcji  $f(x)$ .

Hesjan funkcji zredukowanej  $g(y_I)$  ma postać:

$$\nabla \nabla g(y_I) = B \cdot \nabla \nabla f(B^T y_I + |c) \cdot B^T, \quad (2.19)$$

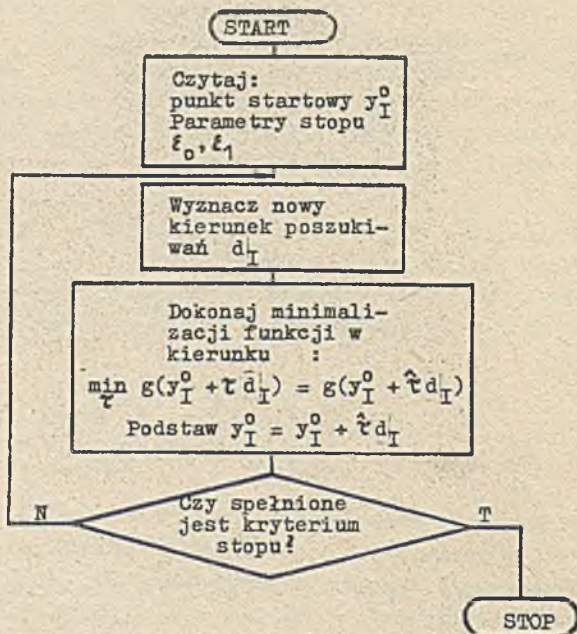
gdzie  $\nabla \nabla f$  jest hesjanem funkcji  $f(y)$  i ze względu na jej addytywność ma postać macierzy diagonalnej o wymiarach  $n \times n$

$$\nabla \nabla f = \text{diag} \{ \ddot{f}_1, \ddot{f}_2, \dots, \ddot{f}_n \}. \quad (2.20)$$

### 3. ANALIZA ALGORYTMÓW OBLICZENIOWYCH

Sprawne rozwiązanie zadania (2.17) zależy nie tylko od własności samego algorytmu optymalizacji, ale również od pomocniczych procedur służących do wyznaczania wartości funkcji celu, jej gradientu oraz ewentualnie hesjanu. Operacje takie, jak widać to z podanych w poprzednim rozdziale zależności (2.8), (2.18) i (2.19), wymagają formalnie wykonywania między innymi takich działań, jak mnożenie macierzy przez wektor oraz macierzy przez macierz. W każdej z tych zależności występuje macierz  $B$ , która, jak wynika z (2.2) oraz (2.5), posiada jedynie elementy 0, 1 i -1. Łatwo zauważyć, że w takim przypadku wykonanie wszystkich operacji występujących we wzorach (2.8), (2.18) i (2.19) wymaga jedynie dodawania i odejmowania odpowiednio wybranych przepływów oraz składowych gradientu i hesjanu zredukowanej funkcji celu (2.17). Takie podejście do zagadnienia jest szczególnie celowe, ponieważ dodatkowo eliminuje fikcyjne operacje mnożenia przez zero, a co za tym idzie w istotny sposób skraca sumaryczny czas obliczeń wykonywanych przez maszynę cyfrową. Celowe jest zatem wyposażenie programu obliczeniowego we wstępną procedurę wyznaczającą przepisy pozwalające na realizację omawianych operacji w podany powyżej sposób. Procedura taka została w ramach niniejszej pracy opracowana. Przeprowadzone badania testowe wykazały, że czas pracy takiej procedury dla sieci o rozsądnych rozmiarach (rzędu 100 łuków) nie przekracza 1% sumarycznego czasu obliczeń. Pozostają zatem do omówienia poszczególne elementy samego algorytmu optymalizacji, a konkretnie; procedura minimalizacji w kierunku, procedura wyznaczania nowego kierunku poszukiwań oraz reguły zakończenia obliczeń.

Wymienione powyżej elementy są charakterystyczne dla wszystkich metod optymalizacji, które noszą w teorii nazwę metod kierunków poprawy [1]. Ogólny schemat każdej metody z tej grupy został przedstawiony na rysunku 2.



Rys.2. Ogólny schemat metody kierunków poprawy

Alternatywną grupą metod do metod kierunków poprawy są tzw. metody poszukiwań prostych [1]. W pracy będą omawiane tylko algorytmy z grupy metod kierunków poprawy, ponieważ:

- metody te są znacznie sprawniejsze od metod poszukiwań prostych,
- spełnione są w przypadku analizowanego zadania wszystkie warunki, które umożliwiają ich zastosowanie [1].

Praktycznie, każdy z trzech zasadniczych elementów algorytmu z grupy kierunków poprawy może być analizowany osobno. Wybór ostatecznej wersji każdej procedury zależy od własności rozwiązywanego zadania implikujących zarówno efekty, jak i z drugiej strony niezbędne nakłady obliczeniowe.

Cyklicznie powtarzana procedura poszukiwania minimum funkcji celu w kierunku zgodnie z rys. 2. polega na rozwiązaniu jednowymiarowego zadania optymalizacji statycznej

$$\min_{\tau} h(\tau) = \min_{\tau} g(y_I^0 + \tau d_I) = g(y_I^0 + \hat{\tau} d_I). \quad (3.1)$$

We wzorze (3.1)  $y_I^0$ , w zależności od numeru iteracji, jest albo wczytywa-



nym punktem startowym, albo wynikiem minimalizacji w kierunku uzyskanym w iteracji poprzedniej przez podstawienie

$$y_I^0 =: y_I^0 + \hat{\tau} |d_I. \quad (3.2)$$

Kierunek poszukiwań  $d_I$  powinien być tak dobrany, aby spełniony był warunek

$$(\exists \tau_0 > 0)(\forall 0 < \tau < \tau_0)(h(\tau) < h(0)). \quad (3.3)$$

Problem wyboru wektora  $d_I$  zostanie szczegółowo omówiony w następnej części rozdziału.

Funkcja  $h(\tau)$  określona wzorem (3.1) spełnia, jeżeli prawdziwy jest warunek (3.3), następujące własności:

- jest funkcją ściśle wypukłą,
- posiada dokładnie jedno minimum w punkcie  $\hat{\tau}$  takim, że  $\hat{\tau} > 0$ ,
- jest funkcją różniczkowalną na całej osi,
- jej pochodna wyraża się wzorem

$$h'(\tau) = \left\langle \nabla g(y_I) \Big|_{y_I = y_I^0 + \tau |d_I}, d_I \right\rangle, \quad (3.4)$$

gdzie  $\langle a, b \rangle$  jest iloczynem skalarnym wektorów  $a$  i  $b$ .

Autorzy pracy przebadali praktycznie dwa warianty procedury minimalizacji w kierunku:

- procedurę bezgradientowej minimalizacji w kierunku z aproksymacją zredukowanej funkcji celu parabolą, oraz
- procedurę gradientową, polegającą na poszukiwaniu pierwiastka równania

$$h'(\tau) = 0, \quad (3.5)$$

gdzie  $h'(\tau)$  jest dane wzorem (3.4).

W przypadku procedury wykorzystującej aproksymację kwadratową większość ponoszonych nakładów obliczeniowych związanych jest z wyznaczaniem wartości funkcji  $h(\tau)$  dla kolejnych wartości argumentu  $\tau$ . Analogicznie, w drugim przypadku większość czasu obliczeń pochłania wyznaczanie wartości pochodnej  $h'(\tau)$ . Jak wynika z dokładniejszej analizy czasu te są w porównaniu takie same. Teoretycznie procedura gradientowa charakteryzuje się jednak znacznie lepszą zbieżnością, co potwierdziły zresztą przeprowadzone testy obliczeniowe. W związku z tym odpowiednio krótszy jest w tym przypadku czas, jaki upływa pomiędzy dwiema kolejnymi modyfikacjami kierunku poprawy.

W obu przypadkach niezbędne jest w oparciu o zespół zależności

$$y_I = y_I^0 + \tau d_I \quad (3.6)$$

oraz (2.6) odtworzenie składowych wektora  $y_{II}$  odpowiadających każdej nowej wartości  $\tau$ . Jeżeli wyznaczenie minimum w kierunku wymaga wykonania takich operacji dla przynajmniej dwóch wartości  $\tau$ , można zmniejszyć liczbę operacji w oparciu o zamieszczone poniżej przekształcenia.

Na podstawie (2.6) i (3.6) można napisać

$$\begin{aligned} y_{II} &= C^T y_I + D\epsilon = C^T(y_I^0 + \tau d_I) + D\epsilon = \\ &= [C^T y_I^0 + D\epsilon] + \tau [C^T d_I + 0] = y_{II}^0 + \tau d_{II}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Stąd

$$y = \begin{bmatrix} y_I \\ y_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_I^0 \\ y_{II}^0 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} d_I \\ d_{II} \end{bmatrix} = y^0 + \tau d, \quad (3.8)$$

gdzie

$$y^0 = \begin{bmatrix} y_I^0 \\ C^T y_I^0 + D\epsilon \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_I \\ C^T d_I + 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Jak widać w tym przypadku wystarcza na początku każdej iteracji wyznaczyć, przy pomocy procedury identycznej jak dla wzoru (2.6), wektory  $y^0$  oraz  $d$ , określone zależnościami (3.9), a następnie korzystać jedynie z zależności (3.8).

Analizując możliwości wyznaczania kolejnych kierunków poprawy, autorzy ograniczyli się do przebadania własności metody kierunków sprzężonych Fletchera-Reevsa oraz zmodyfikowanej metody Newtona [4] modyfikowanych przy pomocy procedury rzutowania gradientu na zbiór rozwiązań dopuszczalnych Rosena [1]. Algorytm rozwiązywania zadania sformułowanego w rozdziale 2, oparty na metodzie Fletchera-Reevesa, opisano szczegółowo w pracach [2,7]. Wybór tej metody optymalizacji został podyktowany prostotą wyznaczania gradientu zredukowanej funkcji celu (2.18), a co za tym idzie prostotą obliczania kolejnych kierunków sprzężonych. W oparciu o przeprowadzone badania testowe przyjęto przy wyznaczaniu nowego kierunku sprzężonego wzór Polaka-Ribiery [4].

Zmodyfikowana metoda Newtona opiera się na idei aproksymacji funkcji celu formą kwadratową, wykorzystującą dodatkowe informacje o funkcji celu, jakie daje jej hesjan (2.19). Każdy kolejny kierunek poszukiwań określony jest zależnością

$$\nabla \nabla G(y_I^0) \cdot d = -\nabla G(y_I^0). \quad (3.10)$$

(3.10) jest układem  $n-m$  równań liniowych z  $n-m$  niewiadomymi składowymi nowego kierunku poprawy  $d$ . Podstawowe trudności, związane z zastosowaniem tej metody, związane są z nakładami czasu potrzebnego do rozwiązania tego układu równań. Ponieważ hesjan zredukowanej funkcji celu jest macierzą rzadką (tzn. posiadającą w praktycznych przypadkach dużą liczbę zer) do rozwiązania układu (3.10) autorzy wykorzystali procedurę opartą

na idei metody eliminacji Gaussa [4]. Uzyskane wyniki badań testowych wskazują wyraźnie na wyższość zmodyfikowanej metody Newtona nad metodą kierunków sprzężonych.

Wybór metody rzutowej Rosena do modyfikacji kierunku poprawy został podyktowany w obu przypadkach głównie postacią ograniczeń nierównościowych w zadaniu PZ (2.17) i związaną z tym prostotą procedury obliczeniowej. Autorzy pracy wykazali, że aplikacja metody rzutowej na potrzeby rozwiązywanego zadania prowadzi wyłącznie do konieczności zerowania tych składowych nowego kierunku poprawy, które mogą doprowadzić do wejścia w obszar rozwiązań niedopuszczalnych.

W obu przypadkach jako regułę stopu przyjęto zależność

$$\|Pr \nabla g(y_T)\| < \xi_0 \quad (3.11)$$

Wyrażenie po lewej stronie nierówności (3.11) jest długością rzutu nowego kierunku poszukiwań na zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Wyrażenie to jest miarą niespełnienia drugiego prawa Kirchhoffa w fikcyjnych i rzeczywistych oczkach sieci. Z jednej więc strony użytkownikowi programu jest łatwe określić interesującą go wartość parametru  $\xi_0$ , a z drugiej sprawdzenie czy warunek (3.11) zachodzi, czy nie, jest łatwe do przeprowadzenia i praktycznie nie obciąża sumarycznego czasu obliczeń.

#### 4. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania porównawcze algorytmów obliczeniowych opracowanych przez autorów z algorytmami bazującymi na metodach opisywanych w literaturze dotyczącej sieci hydraulicznych (algorytm Crossa i Crossa-Łobaczewa) wskazują na wyraźną wyższość tych pierwszych. Charakteryzują się one znacznie krótszym czasem obliczeń, jaki jest potrzebny dla uzyskania rozwiązania z zadaną dokładnością. W wielu zadaniach testowych obserwowano skrócenie czasu obliczeń w granicach jednego rzędu. Korzyści tej wielkości stwarzają jakościowo nowe możliwości zarówno w obszarze projektowania, jak i sterowania złożonymi sieciami rozprowadzania wody.

#### 5. LITERATURA

- [1] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, Warszawa 1977.
- [2] Gawrych-Żukowski A., Kotowski J., Olesiak M.: Algorytm wyznaczania minimalno-energetycznego sterowania złożoną siecią rozprowadzania wody, Nowa technika w Inżynierii Sanitarnej, Wodociągi i Kanalizacja, Zeszyt 17 (w druku).

- [3] Kotowski J., Olesiak M.: The optimization of the energy wastes in the complex water supply systems, Proceedings of the 6th IFAC/IFIP International Conference of Digital Computer Applications to Process Control, Düsseldorf, 14-17 October 1980 (w druku).
- [4] Mantuffel K., Seiffart S.: Wstęp do algebry liniowej i programowania liniowego, BNI, Warszawa 1975.
- [5] Mielcarzewicz E.W.: Obliczanie systemów zaopatrzenia w wodę aglomeracji miejsko-przemysłowych, Arkady, Warszawa 1976.
- [6] Nych E., Olesiak M., Serek G.: Model matematyczny systemu zaopatrzenia w wodę odbiorców i jego wykorzystanie do optymalizacji. Część I i II. Gaz, Woda i Technika Sanitarna, tom L II, Nr 4 i 5, 1978.
- [7] Praca zbiorowa: Opracowanie modelu układu rozprowadzania wody w aglomeracji miejsko-przemysłowej dla celów komputerowo-wspomagane go sterowania systemem. Raport nr 52/80, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej (Kierunek 01 PR-7).

GRADIENT ALGORITHMS FOR OPTIMIZATION OF THE WATER SUPPLY SYSTEMS PARAMETERS

Abstract

In this paper authors present the mathematical model of the energy losses minimization in the water supply systems at first. Next they discuss the main properties of the formulated problem and use them for constructing of the optimization procedure. The numerical results can easily show the ability of the worked out optimization method.

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ.

Резюме :

Работа содержит описание задания статической оптимизации параметров сложной водопроводной сети работающей городско-промышленного центра а также анализ его свойств. Служат они авторам для разработки ряда расчётных алгоритмов решения сформулированного задания оптимизации. В работе даётся описание этих алгоритмов, результаты проведённых сравнительных тестов, а также выводы по отношению к возможности и целесообразности применения этих методов на практике. Представленные результаты являются частью более широких работ по внедрению вспомогательных компьютером систем управления сложными водопроводными сетями.