

Politechnika Śląska  
Wydział Mechaniczny Technologiczny  
Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn

Andrzej KATUNIN

**Ocena trwałości  
zmęczeniowej  
laminatów  
polimerowych  
w stanie  
lepkosprężystym  
z uwzględnieniem  
zjawisk cieplnych**

Gliwice 2012

*Recenzenci*

Prof. dr hab. inż. Zbigniew Dąbrowski, Politechnika Warszawska

Prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński, Politechnika Śląska

*Redaktor zeszytów*

Wojciech Cholewa

*Redaktor techniczny*

Marek Wyleźół

*Projekt okładki*

Wojciech Cholewa, Marek Wyleźół

*BibTeX*

```
@BOOK{, title = {Ocena trwałości zmęczeniowej laminatów polimerowych  
w stanie lepkosprężystym z uwzględnieniem zjawisk cieplnych}, publisher =  
{Politechnika Śląska, Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn}, year  
= {2012}, author = {Katunin, A.}, volume = {146}, series =  
{Zeszyty}, address = {Gliwice}}
```

Znaczące fragmenty pracy zrealizowano w ramach projektu badawczego własnego  
N N504 282137 finansowanego przez MNiSW.

**ISBN 978-83-60759-21-9**

*Wydawca*

Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn

Wydział Mechaniczny Technologiczny

Politechnika Śląska

ul. Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice

tel. (32) 237-14-67, fax (32) 237-13-60

<http://kpk.m.polsl.pl>

# Od autora

Zeszyt został opracowany na podstawie rozprawy doktorskiej, którą wykonałem pod kierunkiem prof. dra hab. Wojciecha Moczulskiego. Publiczna obrona rozprawy odbyła się 21. maja 2012 roku przed Komisją Mechaniki powołaną przez Radę Wydziału Mechanicznego Technologicznego. Znaczące fragmenty pracy zrealizowano w ramach projektu badawczego własnego N N504 282137 finansowanego przez MNiSW. Kierownikiem projektu jest promotor rozprawy.

Składam serdeczne podziękowania recenzentom rozprawy doktorskiej, prof. dr. hab. inż. Zbigniewowi Dąbrowskiemu oraz prof. dr. hab. inż. Tadeuszowi Burczyńskiemu za cenne uwagi, które starałem się uwzględnić w niniejszym zeszycie.

Pragnę wyrazić swoją wdzięczność mojemu promotorowi prof. Wojciechowi Moczulskiemu nie tylko za cenne wskazówki, inspirację i wsparcie podczas przygotowywania rozprawy doktorskiej, ale również za intensywną i wszechstronną opiekę naukową podczas studiów magisterskich i w trakcie przygotowywania rozprawy doktorskiej. Składam serdeczne podziękowania Koleżankom i Kolegom z Katedry Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej za okazaną mi pomoc i życzliwość w czasie wykonywania pracy.

Niniejszą książkę dedykuję moim rodzicom oraz moim przyjaciołom, dziękując za ich wsparcie i wyrozumiałość.

*Gliwice, lipiec 2012*

*Andrzej Katunin*



# Spis treści

<b>Wykaz ważniejszych oznaczeń</b>	<b>9</b>
<b>Lista skrótów</b>	<b>13</b>
<b>Rozdział 1. Wstęp</b>	<b>15</b>
<b>Rozdział 2. Przegląd i ocena istniejącego stanu wiedzy</b>	<b>21</b>
2.1. Budowa i właściwości zbrojonych laminatów polimerowych . . . . .	21
2.1.1. Materiały do produkcji laminatów . . . . .	21
2.1.2. Sposoby wytwarzania laminatów i postacie zbrojenia . . . . .	22
2.2. Mechanika laminatów polimerowych . . . . .	23
2.2.1. Związki konstytutywne warstwy ortotropowej . . . . .	23
2.2.2. Klasyczna teoria laminacji . . . . .	24
2.2.3. Właściwości cieplne laminatów . . . . .	26
2.3. Modele stosowane do opisu zachowania laminatów polimerowych. . . . .	27
2.3.1. Modele klasyczne . . . . .	27
2.3.2. Klasyczne modele reologiczne . . . . .	28
2.3.3. Uogólnione modele reologiczne . . . . .	30
2.3.4. Nieklasyczne modele reologiczne . . . . .	32
2.4. Dyssypacja energii mechanicznej w laminatach polimerowych . . . . .	33
2.4.1. Warunki inicjacji procesów dyssypacyjnych i efekt samorozgrzania .	34
2.4.2. Badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące efektu samo- rozgrzania w polimerach . . . . .	36
2.5. Modele zmęczeniowe laminatów polimerowych . . . . .	38
2.5.1. Modele oparte na redukcji sztywności . . . . .	39
2.5.2. Modele oparte na kumulacji uszkodzeń . . . . .	40
2.5.3. Modele oparte na funkcji zniszczenia . . . . .	41
2.5.4. Modele uwzględniające lepkość i efekty cieplne . . . . .	42
2.6. Występowanie zmęczenia z efektem samorozgrzania w praktyce inżynier- skiej . . . . .	43
2.7. Podsumowanie . . . . .	44
<b>Rozdział 3. Problem badawczy</b>	<b>47</b>
3.1. Identyfikacja problemu badawczego . . . . .	47

3.2. Cel rozprawy .....	47
3.3. Tezy rozprawy .....	48
<b>Rozdział 4. Modele teoretyczne opisujące efekt samorozgrzania</b>	<b>49</b>
4.1. Podstawy teoretyczne i założenia wstępne .....	49
4.2. Efekt samorozgrzania w belce obciążonej cyklicznie .....	51
4.3. Efekt samorozgrzania w płycie obciążonej cyklicznie .....	52
4.4. Efekt samorozgrzania w płycie przy drganiach rezonansowych .....	55
4.5. Podsumowanie .....	57
<b>Rozdział 5. Relacje termokinetyczne i charakterystyki dynamiczne laminatu</b>	<b>59</b>
5.1. Podstawy teoretyczne .....	59
5.2. Przygotowanie i realizacja eksperymentów .....	61
5.2.1. Przygotowanie próbek .....	62
5.2.2. Statyczne testy weryfikacyjne .....	62
5.2.3. Parametry eksperymentu DMA .....	65
5.3. Analiza wyników eksperymentalnych .....	65
5.3.1. Wyznaczenie energii aktywacji .....	65
5.3.2. Wyznaczenie współczynników przesunięcia poziomego i konstruowanie krzywych wiodących .....	69
5.3.3. Porównanie krzywych wiodących uzyskanych metodami symulacyjnymi i eksperymentalnymi .....	71
5.4. Podsumowanie .....	72
<b>Rozdział 6. Eksperymentalna ocena zachowania dynamicznego laminatu</b>	<b>75</b>
6.1. Zagadnienia podstawowe .....	75
6.2. Przygotowanie i realizacja eksperymentów .....	76
6.2.1. Przygotowanie próbek i aparatury badawczej .....	76
6.2.2. Realizacja eksperymentów .....	78
6.3. Opracowanie i analiza wyników eksperymentu .....	79
6.3.1. Analiza zmian siły wymuszenia .....	79
6.3.2. Analiza zmian temperatury samorozgrzania .....	84
6.4. Porównanie wyników teoretycznych i eksperymentalnych efektu samorozgrzania .....	90
6.5. Podsumowanie .....	91
<b>Rozdział 7. Ocena zmęczenia laminatów polimerowych</b>	<b>93</b>
7.1. Wstępna koncepcja modelu zmęczeniowego .....	93
7.2. Eksperymentalna ocena zmęczenia laminatów polimerowych .....	95
7.2.1. Przygotowanie i realizacja eksperymentów zmęczeniowych .....	95
7.2.2. Określenie faz zmęczenia .....	97
7.2.3. Analiza profili i rozkładów temperatury .....	98

---

7.2.4. Analiza parametryczna zmienności historii obciążeń i pętli histe- rezy .....	100
7.2.5. Analiza parametryczna zmienności temperatury .....	101
7.2.6. Wyznaczenie temperatur krytycznych .....	103
7.3. Modele zmęczenia laminatów z uwzględnieniem efektu samorozgrzania ...	104
7.3.1. Empiryczny model zmęczenia .....	105
7.3.2. Model teoretyczno-empiryczny zmęczenia i algorytm wyznaczania cyklu życia laminatu .....	105
7.3.3. Porównanie wyników eksperymentalnych z modelem teoretyczno- empirycznym .....	108
7.4. Podsumowanie .....	109
<b>Rozdział 8. Podsumowanie i wnioski</b>	<b>111</b>
8.1. Wnioski ogólne .....	111
8.2. Wnioski szczegółowe .....	112
8.3. Kierunki dalszych badań .....	113
<b>Bibliografia</b>	<b>130</b>
<b>Streszczenie</b>	<b>131</b>
<b>Summary</b>	<b>132</b>
<b>Резюме</b>	<b>133</b>





# Wykaz ważniejszych oznaczeń

## Symbole łacińskie

<b>A</b>	macierz sztywności tarczowej
$a_\theta$	współczynnik przesunięcia poziomego
$b$	szerokość płyty
$b_\theta$	współczynnik przesunięcia pionowego
<b>B</b>	macierz sztywności sprzężonej
$c_p$	ciepło właściwe
$d$	przemieszczenia
<b>D</b>	macierz sztywności płytowej
$D'$	sztywność zachowawcza
$D''$	sztywność stratna
$e$	stała Eulera
$e_{appr}$	dokładność aproksymacji
$E_a$	energia aktywacji
$E_i$	moduły Younga
$E_g$	moduł Younga przy zginaniu
$E'$	dynamiczny moduł zachowawczy
$E''$	dynamiczny moduł stratny
$f$	częstotliwość
$f_0$	współczynnik przedeksponencjalny we wzorze Arrheniusa
$f_r^i$	częstotliwości drgań rezonansowych, $i = 1, 2, 3$
$G_{ij}$	moduły Kirchhoffa
$h$	grubość belki/płyty
$K(t - t')$	jądro pełzania
$l$	długość belki/płyty
$l_e$	długość robocza płyty
$\Delta l$	wydłużenie
$M_i$	momenty

$n_b$	liczba cykli do zniszczenia
$n_c$	liczba cykli do osiągnięcia temperatury krytycznej $\theta_c$
$N_i$	siły
$P$	siła wymuszenia
$P_m$	siła występująca przy zrywaniu
$Q_{ij}$	składowe macierzy sprężystości
$\mathbf{Q}_k$	macierz sprężystości dla $k$ -tej warstwy laminatu
$\overline{\mathbf{Q}}_k$	macierz sprężystości dla $k$ -tej warstwy laminatu po uwzględnieniu tensora transformacyjnego
$Q_d$	energia dyssypacji
$r^2$	współczynnik korelacji
$R(t - t')$	jądro relaksacji
$R$	uniwersalna stała gazowa
$R_m$	wytrzymałość na rozciąganie
$R_g$	wytrzymałość na zginanie
$s_{ij}$	składowe dewiatora naprężeń
$S$	funkcja zniszczenia
$\mathbf{T}$	tensor transformacji lokalnego układu współrzędnych
$t$	czas
$t_R$	czas zniszczenia
$t'$	czas relaksacji/retardacji
$T$	energia kinetyczna
$u, v, w$	przemieszczenia w kierunkach $x, y, z$
$u_0, v_0, w_0$	przemieszczenia powierzchni środkowej w kierunkach $x, y, z$
$U$	energia potencjalna
$V_i$	objętości komponentów laminatu
$w_g$	ugięcie przy zniszczeniu
$W^R$	gęstość energii zmęczenia
$x, y, z$	współrzędne w układzie Kartezjańskim
$(\cdot)^*$	parametr zespolony

## Symbole greckie

$\alpha_{ij}$	współczynniki wymiany ciepła
$\beta$	prędkość grzania
$\beta_r$	wartość odniesienia prędkości grzania
$\beta_\theta$	współczynnik prędkości grzania
$\gamma_{ij}$	składowe tensora odkształceń stycznych
$\delta$	kąt przesunięcia fazowego
$\delta^K$	delta Kroneckera
$\varepsilon_{ij}$	składowe tensora odkształceń normalnych
$\varepsilon_{ij}^0, \gamma_{ij}^0$	składowe tensora odkształceń powierzchni środkowej
$\varepsilon^\theta$	składowa odkształceń spowodowana efektem samorozgrzania
$\zeta$	kąt orientacji zbrojenia w laminacie
$\eta$	lepkość
$\theta$	temperatura
$\theta_0$	temperatura otoczenia
$\theta_a$	temperatura samorozgrzania na granicy I. i II. fazy zmęczenia
$\theta_b$	temperatura samorozgrzania przy zniszczeniu
$\theta_c$	temperatura krytyczna przy zmęczeniu cieplnym
$\theta_g$	temperatura zeszklenia
$\theta_r$	temperatura odniesienia
$\Delta\theta$	przyrost temperatury
$\iota$	kąt nachylenia krzywych temperatury samorozgrzania w II fazie zmęczenia
$\kappa_{ij}$	krzywizny powierzchni środkowej
$\lambda_{ij}$	współczynniki przewodnictwa cieplnego
$\nu_{ij}$	współczynniki Poissona
$\rho$	gęstość
$\sigma_{ij}$	składowe tensora naprężeń normalnych
$\tau_{ij}$	składowe tensora naprężeń stycznych
$\psi$	funkcja widmowa
$\omega$	prędkość kątowna



# Lista skrótów

BPA	Bisfenol-A
KTL	klasyczna teoria laminacji
DMA	dynamiczna analiza mechaniczna (ang. <i>Dynamic Mechanical Analysis</i> )
DMS	dynamiczna spektroskopia mechaniczna (ang. <i>Dynamic Mechanical Spectroscopy</i> )
DSC	skaningowa kalorymetria różnicowa (ang. <i>Differential Scanning Calorimetry</i> )
DTMA	dynamiczna analiza termomechaniczna (ang. <i>Dynamic Thermal Mechanical Analysis</i> )
FRF	funkcja odpowiedzi częstotliwościowej (ang. <i>Frequency Response Function</i> )
FRP	tworzywo sztuczne zbrojone włóknem (ang. <i>Fibre-Reinforced Plastic</i> )
TBBA	cztero-bromek Bisfenolu-A (ang. <i>Tetra-Brom-Bisphenol-A</i> )
TGA	analiza termogravimetryczna (ang. <i>Thermogravimetric Analysis</i> )
TTS	superpozycja czasowo-temperaturowa (ang. <i>Time-Temperature Superposition</i> )
MES	metoda elementów skończonych
WIN	współczynnik intensywności naprężeń
WLF	równanie Williamsa-Landela-Ferry'ego



# Rozdział 1

## Wstęp

Nieustannie wzrastające potrzeby współczesnych gałęzi przemysłu determinują rozwój nowych materiałów, które spełniałyby coraz wyższe wymagania wobec ich własności i obszaru ich zastosowań. Z tego względu materiały konwencjonalne są stopniowo zastępowane materiałami kompozytowymi, szczególnie w takich dziedzinach techniki jak: przemysł lotniczy, samochodowy, budowa środków transportu wodnego oraz przemysł kosmiczny. Zastosowanie materiałów kompozytowych w tych dziedzinach było spowodowane potrzebą uzyskania trwalszych, lżejszych oraz bardziej niezawodnych elementów projektowanych środków technicznych. Początki szerokiego zastosowania materiałów kompozytowych sięgają lat 60. XX wieku (Hyla i Śleziona, 2004), kiedy zaczęto stosować polimery jako materiał konstrukcyjny. Wówczas nastąpił rozwój konstrukcji z zastosowaniem polimerowych kompozytów warstwowych zbrojonych włóknami lub tkaninami, które nazywane są laminatami. Wzrastająca popularność laminatów polimerowych wiąże się z ich wyjątkowymi właściwościami – możliwością przenoszenia naprężeń znacznie przewyższających naprężenia graniczne stali i stopów konstrukcyjnych, niską masą, odpornością na oddziaływanie pól elektrycznych i elektromagnetycznych, a także minimalizacją kosztów produkcji oraz łatwym recyklingiem lub utylizacją. Dodatkowym atutem przemawiającym za stosowaniem laminatów polimerowych jest możliwość projektowania tych materiałów dla specjalistycznych zastosowań w celu nadania im szczególnych właściwości, a także możliwość osadzania w nich układów pomiarowych i wykonawczych.

Cechami charakterystycznymi laminatów polimerowych są właściwości anizotropowe, występowanie zachowania lępkosprężystego oraz silna nieliniowość zjawisk mających miejsce podczas ich eksploatacji. Z tego względu przy charakteryzacji laminatów oraz mechanizmów zachodzących w nich zjawisk potrzeba znacznie większej liczby, zwykle bardziej złożonych, badań, niż w przypadku materiałów konwencjonalnych (Ochelski, 2004).

Na szczególną uwagę zasługują mechanizmy procesów degradacji laminatów podczas ich eksploatacji. Znaczna część elementów konstrukcyjnych jest narażona na obciążenia cykliczne lub drgania, co wiąże się z nieuniknionymi procesami zmęczenia tych elementów. Ze względu na lepkosprężystą naturę większości polimerów, stanowiących osnowę laminatów, w wyniku niewspółfazowości naprężeń i odkształceń powstaje zjawisko histerezy wiążące się z dyssypacją energii mechanicznej. Energia dyssypowana kumuluje się w strukturze zamieniając się w ciepło. Zjawisko to wpływa na właściwości wytrzy-

małościowe laminatu, co wiąże się z przyspieszeniem rozwoju procesów degradacji w wyniku wzrostu temperatury struktury. Opisane zjawisko w dalszej części pracy będzie nazywane *efektem samorozgrzania*, a wzrost temperatury pochodzący od procesów dysypacyjnych – *temperaturą samorozgrzania*. W literaturze krajowej (Ochelski, 2004) temperatura ta jest określana mianem "temperatury samowzbudnej", jednak, zdaniem autora, stosowanie tego miana jest niezgodne z nomenklaturą anglojęzyczną – self-heating temperature (Kreith i Goswami, 2005) i rosyjskojęzyczną – temperatura samorazogreva (Oldyrev, 1967a).

Badania eksperymentalne w zakresie efektu samorozgrzania były zapoczątkowane w zespole naukowców z Instytutu Mechaniki Polimerów ówczesnej Akademii Nauk Łotewskiej SRR w latach 60. XX wieku. Zjawisko było obserwowane w polimerach konstrukcyjnych przy obciążeniach cyklicznych (Ratner i Korobov, 1965; Ratner *i in.*, 1969; Oldyrev i Tamuzh, 1969; Tamuzh, 1969). Na podstawie wyników badań eksperymentalnych były zbudowane modele empiryczne opisujące zjawisko. W dalszych pracach autorzy rozpatrywali wpływ temperatury samorozgrzania na trwałość zmęczeniową polimerów i laminatów polimerowych (Parfeev *i in.*, 1979; Oldyrev, 1987; Ratner i Potapova, 1990) nadal bazując na modelach empirycznych oraz wykorzystując molekularny model kinetyczny Żurkova oparty na równaniu Arrheniusa. Następnym krokiem w zakresie badań efektu samorozgrzania były prace Instytutu Mechaniki ówczesnej Akademii Nauk Ukraińskiej SRR. W pracy (Kovalenko i Karnaukhov, 1969) był sformułowany jednowymiarowy model efektu samorozgrzania dla cienkich powłok walcowych w stanie ustalonym, a następnie ci autorzy zaproponowali zlinearyzowaną teorię termolepkosprężystości (Kovalenko i Karnaukhov, 1972). W dalszych pracach sformułowano metodę przybliżoną dla rozwiązania zagadnień teorii termolepkosprężystości dla przypadku jednowymiarowego (Kovalenko i Karnaukhov, 1973). Następnie teoria jest rozwijana w zastosowaniu do różnych modeli geometrycznych. W pracy (Gumenyuk i Karnaukhov, 1980) autorzy stosują do opisu zjawiska parametry zespolone, a następnie podają adaptację metody elementów skończonych do zagadnień termolepkosprężystości (Karnaukhov *i in.*, 1989). W pracy (Senchenkov *i in.*, 2004) autorzy zaproponowali równania konstytutywne teorii termolepkosprężystości w sformułowaniu przybliżonym oraz dokładnym. Prace teoretyczne w zakresie efektu samorozgrzania w stanie ustalonym były prowadzone w Uniwersytecie Paula Verlaine'a w Metz (Dinzart i Molinari, 2005; Dinzart *i in.*, 2008). Zakres problematyki zjawiska pozwala na prowadzenie dalszych badań w zakresie teorii termolepkosprężystości pod kątem występowania efektu samorozgrzania w nowych materiałach konstrukcyjnych, jak i w nowych zagadnieniach sprzężonych.

W niniejszej pracy rozpatruje się problematykę efektu samorozgrzania w laminatach polimerowych zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym, a w szczególności warunki jego powstania, związki z mechaniką kompozytów i lepkosprężystością, a także wpływ efektu na procesy zmęczeniowe zachodzące podczas eksploatacji laminatów polimerowych. W rozdziale 2. przedstawione zostały podstawy teoretyczne do dalszych rozważań omawiające budowę i właściwości laminatów polimerowych, elementy mechaniki laminatów, modele reologiczne, a także dotychczasowy stan wiedzy w odniesieniu do zagadnień



dotyczących efektu samorozgrzania oraz jego wpływu na procesy zmęczeniowe laminatów. W rozdziale 3. został przedstawiony problem badawczy, określono cel i zakres rozprawy, a także sformułowano tezy rozprawy. Rozdział 4. przedstawia wyniki prac teoretycznych autora – modele matematyczne opisujące efekt samorozgrzania występujące podczas obciążeń cyklicznych oraz drgań rezonansowych prostokątnej płyty laminatowej. W rozdziale 5. przedstawione zostały wyniki badań eksperymentalnych dotyczących identyfikacji modelu reologicznego badanego laminatu oraz wyznaczenia jego charakterystyk dynamicznych. W rozdziale 6. omówione zostały badania eksperymentalne dotyczące obserwacji efektu samorozgrzania. Wyniki eksperymentalne zostały porównane z wynikami uzyskanymi na podstawie modeli matematycznych. W rozdziale 7. omówiono oraz porównano badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące zmęczenia laminatów polimerowych z uwzględnieniem efektu samorozgrzania. Rozdział 8. zawiera podsumowanie przeprowadzonych prac oraz wyznacza kierunki dalszych badań.

Badania autora związane z rozwojem zagadnień teoretycznych i eksperymentalnych efektu samorozgrzania, degradacji laminatów polimerowych i diagnostyki strukturalnej zostały zapoczątkowane pod kierunkiem W. Moczulskiego podczas realizacji projektu badawczego N N504 282137 pt. "Badania symulacyjne i eksperymentalne wpływu temperatury samowzbudnej na własności mechaniczne i proces degradacji laminatów kompozytowych stosowanych w środkach transportu" finansowanego ze środków MNiSW w latach 2009-2012. W ramach projektu badawczego zrealizowano znaczącą część niniejszej pracy. Kierownikiem projektu jest promotor rozprawy. Część badań eksperymentalnych dotyczących pomiarów dynamicznych z wykorzystaniem DMA (Rozdział 5.) została przeprowadzona w Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik TU Dresden (Niemcy).

Badania teoretyczne i eksperymentalne w zakresie kompozytów polimerowych są prowadzone w wielu ośrodkach badawczych w kraju i na świecie. Należy wspomnieć o NASA i ESA, organizacjach, które prowadzą wszechstronne i wysoce zaawansowane badania znajdujące zastosowanie głównie w przemyśle lotniczym i kosmicznym. Centra badań pracujące nad rozwojem prac teoretycznych, technologii, badań i zastosowań kompozytów polimerowych znajdują się praktycznie na każdej uczelni technicznej w świecie, co świadczy o potrzebach wynikających z bezpośrednich zastosowań przemysłowych i postępie rozwoju cywilizacyjnego. Wielu polskich uczonych podjęło się badań w dziedzinie kompozytów polimerowych i ośrodków lepkosprężystych i poświęciło temu dziesięciolecie pracy. Nie sposób wymienić wszystkich badaczy w tej dziedzinie, należy jednak wspomnieć niektórych postaciach przyczyniających się w Polsce do znacznego postępu i rozwoju tej dziedziny.

Wśród teoretyków należy wymienić Prof. Andrzeja Tylikowskiego z Wydziału Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej, który zajmuje się modelowaniem ośrodków lepkosprężystych już od początku swojej kariery naukowej (Tylikowski i Skalmierski, 1966). Swoje zainteresowania badawcze skupia głównie wokół problemów dynamiki i stateczności układów mechanicznych, w tym układów kompozytowych z uwzględnieniem lepkosprężystości (Tylikowski, 1992; Tylikowski, 1996) i zjawisk cieplnych (Tylikowski, 2003). Wiele prac dotyczących modelowania kompozytów w zakresie

lepkosprężystym przedstawili Prof. Andrzej Wilczyński i Prof. Marian Klasztorny z Instytutu Mechaniki i Konstrukcji Politechniki Warszawskiej, którzy pracowali głównie w dziedzinie modelowania konstytutywnego zachowania kompozytów polimerowych z wykorzystaniem parametrów zespolonych (Wilczyński i Klasztorny, 2002), a także zajmowali się problematyką reologii kompozytów, dzięki czemu powstał szereg nowych modeli reologicznych opisujących zachowanie tych materiałów (Klasztorny *i in.*, 2001; Klasztorny i Gieleta, 2002; Klasztorny, 2006). Należy wspomnieć także o pracach Prof. Marcina Kamińskiego pracującego w Katedrze Mechaniki Materiałów Politechniki Łódzkiej oraz A&M Texas University. Jego prace dotyczą problemów homogenizacji kompozytów (Kamiński, 2003a; Kamiński, 2003b) oraz metod modelowania i predykcji zmęczenia kompozytów z wykorzystaniem metod probabilistycznych (Kamiński, 2002; Figiel i Kamiński, 2003; Kamiński, 2010) poruszając również zagadnienia cieplne w kompozytach (Kamiński, 2005a).

W Polsce są rozwijane zaawansowane metody diagnostyki kompozytów polimerowych z wykorzystaniem różnych technik pomiarowych. Wśród licznych uczonych zajmujących się tą tematyką należy wymienić Prof. Wiesława Ostachowicza z Instytutu Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk, który od wielu lat zajmuje się modelowaniem zachowania dynamicznego (Krawczuk *i in.*, 1996; Krawczuk *i in.*, 1997) oraz diagnostyką kompozytów polimerowych z wykorzystaniem analizy modalnej (Żak *i in.*, 2000), układów emitujących fale Lamba (Trendafilova *i in.*, 2006; Kudela i Ostachowicz, 2008), układów czujników piezoelektrycznych (Ostachowicz *i in.*, 2009) oraz włókien optycznych z siatkami Bragga (Mieloszyk *i in.*, 2011; Majewska *i in.*, 2011). Badania w zakresie wibrodiagnostyki maszyn i urządzeń, zwłaszcza w zakresie występujących w nich zjawisk nieliniowych, są prowadzone przez zespół Prof. Zbigniewa Dąbrowskiego z Instytutu Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej. Wraz z zespołem rozwija w ostatniej dekadzie badania dotyczące projektowania i diagnostyki środków technicznych wykonywanych z kompozytów polimerowych. Zajmuje się m.in. diagnostyką jachtów, a w szczególności masztów kompozytowych (Dąbrowski i Dziurdź, 2003; Dąbrowski *i in.*, 2003) oraz ich zachowaniem dynamicznym z uwzględnieniem nieliniowości drgań (Dąbrowski *i in.*, 2007; Batko *i in.*, 2008; Deuszkiewicz *i in.*, 2010). W zespole prowadzone są także badania dotyczące zachowania dynamicznego wałów kompozytowych (Deuszkiewicz, 2008). Zaawansowane prace w zakresie modelowania i diagnostyki kompozytów są również prowadzone przez zespół Prof. Tadeusza Uhla z Katedry Robotyki i Mechatroniki Akademii Górniczo-Hutniczej. W badaniach wykorzystuje on m.in. metody termowizji aktywnej (Szwedo *i in.*, 2009), fale Lamba (Klepka *i in.*, 2010; Ambroziński *i in.*, 2012) oraz metody emisji akustycznej (Aymerich *i in.*, 2010) do celów diagnostyki, a także prowadzi badania w zakresie modelowania procesów starzenia i optymalizacji kompozytów (Młyniec i Uhl, 2011).

Szereg prac naukowo-badawczych prowadzi się na uczelni macierzystej autora rozprawy. Wiele prac z zakresu modelowania teoretycznego i badań eksperymentalnych powstało w zespole emerytowanej już Prof. Izabelli Hyli i Prof. Józefa Śleziony z Katedry Technologii Stopów Metali i Kompozytów Politechniki Śląskiej. Zespół prowadzi prace

dotyczące szerokiego zakresu badań kompozytów polimerowych począwszy od badania właściwości (Hyla i Śleziona, 1977; Hyla i Lizurek, 2002), poprzez aspekty dotyczące technologii ich wytwarzania (Kozioł *i in.*, 2005; Kozioł i Śleziona, 2008) i kończąc na aspektach praktycznych i użytkowych (Hyla *i in.*, 2000; Rutecka *i in.*, 2004; Hyla i Kozioł, 2007). Na uwagę zasługują także prace zespołu Prof. Gabriela Wróbla i Prof. Józefa Stabika z Zakładu Przetwórstwa Materiałów Metalowych i Polimerowych Politechniki Śląskiej. Szeroki zakres badań autorów obejmuje diagnostykę kompozytów polimerowych metodami ultradźwiękowymi (Rojek *i in.*, 2005; Wróbel i Pawlak, 2006; Wróbel i Wierzbicki, 2007) i termowizyjnymi (Muzia *i in.*, 2007; Wróbel *i in.*, 2008), a także badania dotyczące starzenia (Kurzeja *i in.*, 2000; Stabik, 2005). Należy wspomnieć o pracach Dra Witolda Belucha z Katedry Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki Politechniki Śląskiej, w których rozwija zagadnienia optymalizacji struktury laminatów (Beluch, 2007; Beluch *i in.*, 2007; Beluch *i in.*, 2010) oraz wyznaczania parametrów fizycznych laminatów z wykorzystaniem algorytmów ewolucyjnych (Beluch i Orantek, 2010).

Od niedawna badania dotyczące kompozytów polimerowych są prowadzone w Katedrze Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej. W ramach współpracy z Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik TU Dresden prowadzono badania dotyczące wirników kompozytowych z wbudowanymi czujnikami (Hufenbach *i in.*, 2006). W ramach współpracy zostały przygotowane prace dyplomowe dotyczące m.in. analizy modalnej i aktywnego tłumienia drgań w strukturach kompozytowych oraz detekcji uszkodzeń w kompozytach z zastosowaniem metod wizyjnych. Obecnie w Katedrze, oprócz badań w zakresie rozprawy, prowadzone są badania dotyczące modelowania MES zachowania i degradacji struktur kompozytowych (Katunin, 2008; Katunin i Moczulski, 2008; Katunin i Moczulski, 2009b; Katunin, 2010e), optymalnego rozmieszczenia wbudowanych systemów pomiarowych w tarczach kompozytowych (Katunin i Wysogład, 2009) oraz badania dotyczące diagnostyki i identyfikacji uszkodzeń w kompozytach polimerowych z zastosowaniem transformacji falkowej (Katunin i Moczulski, 2010; Katunin, 2010c; Katunin, 2011b) i wymiaru fraktalnego (Katunin, 2010b).



## Rozdział 2

# Przegląd i ocena istniejącego stanu wiedzy

Z uwagi na szeroki wachlarz możliwości i sposobów wytwarzania laminatów polimerowych cechują się one dużą różnorodnością makrostruktury, morfologii oraz cech fizycznych. Specyficzne technologie produkcyjne pozwalają na projektowanie struktur laminatowych pod względem uzyskania właściwości potrzebnych w konkretnym zastosowaniu. Aby móc prowadzić dalsze rozważania należy wprowadzić definicję laminatu. *Laminatem nazywamy produkt wytworzony poprzez połączenie lub uformowanie dwóch lub więcej warstw materiałów* (Rosato i Rosato, 2000). Efektem połączenia tych materiałów powinien być materiał o nowych (lepszych) właściwościach w stosunku do komponentów użytych osobno.

### 2.1. Budowa i właściwości zbrojonych laminatów polimerowych

Biorąc pod uwagę zapotrzebowanie na laminaty jako materiały konstrukcyjne w budowie maszyn i środków transportu w tej części pracy ograniczono się do rozpatrzenia laminatów zbrojonych o osnowie polimerowej.

#### 2.1.1. Materiały do produkcji laminatów

Możliwości stwarzane przez technologię laminacji pozwalają na produkcję laminatów o różnorodnych właściwościach głównie dzięki zastosowaniu różnego rodzaju materiałów osnowy i zbrojenia.

Jako materiał osnowy laminatów do zastosowań konstrukcyjnych najczęściej stosowane są żywice termoutwardzalne i chemoutwardzalne. W zastosowaniach technicznych głównie stosuje się dwie grupy polimerów: duroplasty i termoplasty (Boczkowska *i in.*, 2003). Do najważniejszych grup tych żywic należą żywice poliestrowe, silikonowe i epoksydowe (Hyla i Ślężona, 2004). Inne polimery, takie jak melaminowe i fenolowe, mają ograniczone zastosowanie. Najlepsze własności użytkowe (w tym wytrzymałościowe,

elektroizolacyjne itd.) z wymienionych żywic posiadają żywice epoksydowe (Kulshreshtha i Vasile, 2002). Ze względu na niski koszt ich produkcji laminaty o osnowie epoksydowej znajdują szerokie zastosowanie w produkcji elementów maszyn. Dzięki różnym technologiom utwardzania, czasom wygrzewania oraz stosowanym napełniaczom powstaje możliwość kontroli własności użytkowych materiału stosowanego jako osnowa w laminacie, chociaż w niewielkim zakresie. Istotnymi parametrami technologicznymi przy produkcji żywic jest nadanie im odpowiedniej lepkości oraz dobrej przyczepności w celu zapewnienia adhezji pomiędzy osnową i zbrojeniem. Osnowa w laminatach zbrojonych spełnia dwa podstawowe zadania: utrzymanie zbrojenia w odpowiednim układzie i postaci oraz przenoszenie obciążeń na elementy zbrojące, a w przypadku zerwania włókna zbrojącego przenoszenie obciążeń na sąsiednie włókna.

Dobór zbrojenia jest najważniejszy w procesie projektowania kompozytów, gdyż w głównej mierze materiał zbrojenia, a także jego układ i udział objętościowy decyduje o właściwościach wytrzymałościowych laminatu. Podstawowe kryteria doboru włókien zbrojących to ich wytrzymałość na rozciąganie oraz gramatura. W laminatach polimerowych najczęściej stosuje się zbrojenie z włókien ceramicznych (szklane, węglowe) oraz polimerowych (aramidowe, polietylenowe, poliamidowe) (Hyla i Śleziona, 2004). Do najbardziej wytrzymałych włókien należą włókna węglowe oraz aramidowe (Kevlar - nazwa handlowa, DuPont). Włókna szklane znajdują się w grupie o najniższej wytrzymałości granicznej, jednak kompozyty zbrojone włóknem szklanym w stosunku do materiałów konwencjonalnych cechują się znacznie wyższym stosunkiem wytrzymałości do masy. Dodatkowymi zaletami włókna szklanego jest niepalność, zachowanie sprężyste podczas nieznacznych obciążeń statycznych oraz mały wpływ temperatury na jego wytrzymałość.

### 2.1.2. Sposoby wytwarzania laminatów i postacie zbrojenia

Struktura warstwowa laminatów pozwala na kształtowanie ich własności w różny sposób. Jedną z najpowszechniejszych technologii stosowanych do otrzymania laminatów jest preimpregnacja (ang. *preimpregnation*). Polega ona na formowaniu laminatu poprzez połączenie warstw preimpregnatu. Preimpregnat jest wykonywany metodą nasycenia zbrojenia (w postaci rovingu lub tkanin) częściowo spolimeryzowaną żywicą i dostarczany jest jako półfabrykat. Dzięki szybkości wytwarzania, niskim kosztom oraz możliwości formowania różnych kształtów otrzymywanego laminatu technologia uzyskała zastosowanie głównie w przemyśle samochodowym i lotniczym. Znajduje ona zastosowanie również w produkcji kadłubów łodzi i statków, gdzie zazwyczaj przy produkcji stosowane jest formowanie ręczne (Kulshreshtha i Vasile, 2002).

Na wytrzymałość laminatów również ma wpływ sposób zbrojenia i ułożenia warstw. W laminatach zbrojonych pasmami rovingu wyróżnia się zbrojenie jednokierunkowe, dwukierunkowe oraz przestrzenne. Zbrojenie najczęściej nadaje laminatom własności ortotropowe lub anizotropowe. W przypadku laminatów zbrojonych jedno- i dwukierunkowo uzyskuje się warstwy ortotropowe. Umożliwia to dodatkowo zwiększenie wytrzymałości takich laminatów poprzez odpowiednie ułożenie warstw. Wyróżnia się dwa przypadki

szczególne takich laminatów: laminaty typu *cross-ply* składające się z warstw obróconych naprzemiennie o  $0^\circ$  i  $90^\circ$  oraz laminaty typu *angle-ply* składające się z warstw obróconych naprzemiennie o kąt  $+\zeta/ -\zeta$ . Odrębną grupę laminatów stanowią laminaty zbrojone matami lub tkaninami. W tym przypadku na właściwości wytrzymałościowe wpływa zastosowany splot w tkaninie. W zależności od potrzeb splot może być wykonany nierównomiernie, w takim przypadku można uzyskać laminaty gradientowe pozwalające na zwiększenie wytrzymałości w tych obszarach struktury, które będą poddane największym obciążeniom i dodatkowo zredukować masę struktury poprzez zastosowanie zbrojenia o mniejszej gramaturze w obszarach poddanych mniejszym obciążeniom (Shen, 2009).

Technologia laminacji pozwala również na łączenie warstw z różnych materiałów. Laminaty takie są nazywane *sandwichami* (Kulshreshtha i Vasile, 2002) lub *laminatami przekładkowymi* (Hyla i Śleziona, 2004). Podgrupą takich laminatów są *laminaty rdzeniowe* (ang. *core laminates*), w których rdzeń może stanowić piankę polimerową oraz struktury typu *plaster miodu* (ang. *honeycomb*) np. w zastosowaniu do elementów systemów tłumienia drgań oraz konstrukcji nośnych. Istnieje także możliwość wprowadzenia w strukturę laminatu układów pomiarowych, diagnostycznych oraz wykonawczych. Obecnie w laminaty integrowane są czujniki i aktulatory piezoelektryczne (Hufenbach *i in.*, 2006), włókna optyczne (Mieloszyk *i in.*, 2011) oraz warstwy z nanorurek węglowych (Thostenson i Chou, 2008). Takie rozwiązania pozwalają śledzić zmiany w strukturze w sposób ciągły, a także wpływać na jej własności wytrzymałościowe, także lokalnie.

## 2.2. Mechanika laminatów polimerowych

Własności mechaniczne laminatów polimerowych w zakresie liniowej teorii sprężystości w ogólnym przypadku opisane są równaniami fizycznymi dla ciał anizotropowych. Jednak dla większości laminatów jest możliwość uproszczenia tych zależności poprzez wprowadzenie pewnych założeń i ograniczeń (szczegółowy opis przedstawiono poniżej). W dalszych rozważaniach zakłada się ponadto, że własności fizyczne laminatów są proporcjonalne do objętościowego udziału ich składników. Założenie to jest zgodne z *regułą mieszanin*, która jest opisana w licznych pracach, np. (Woźniak, 2001; Adams *i in.*, 2003; Hyla i Śleziona, 2004; Ochelski, 2004), i z tego względu jej opis zostanie pominięty.

### 2.2.1. Związki konstytutywne warstwy ortotropowej

Warstwa ortotropowa laminatu stanowi podstawowy element struktury laminatu, a jej charakterystyki sprężyste są podstawą opisu właściwości sprężystych całego laminatu. Gdy rozpatruje się laminat w płaskim stanie naprężenia, związki pomiędzy naprężeniem i odkształceniem mogą być przedstawione na podstawie uogólnionego prawa Hooke'a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

gdzie  $Q_{ij}$  określone są na podstawie zależności:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}. \quad (2.2)$$

Jak wynika z powyższych związków, warstwa ortotropowa w płaskim stanie naprężenia posiada 4 niezależne stałe materiałowe  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$  oraz istnieje dodatkowa relacja

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (2.3)$$

Powyższe zależności są prawdziwe dla *konfiguracji osiowej* warstwy laminatu, co oznacza, że kierunki obciążenia warstwy pokrywają się z kierunkami głównych osi materiałowych laminatu. W przypadku, gdy te kierunki nie pokrywają się ze sobą występuje *konfiguracja nieosiowa*, która inicjuje potrzebę wprowadzenia tensora transformacyjnego:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \zeta & \sin^2 \zeta & 2 \sin \zeta \cos \zeta \\ \sin^2 \zeta & \cos^2 \zeta & -2 \sin \zeta \cos \zeta \\ -\sin \zeta \cos \zeta & \sin \zeta \cos \zeta & \cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

a równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

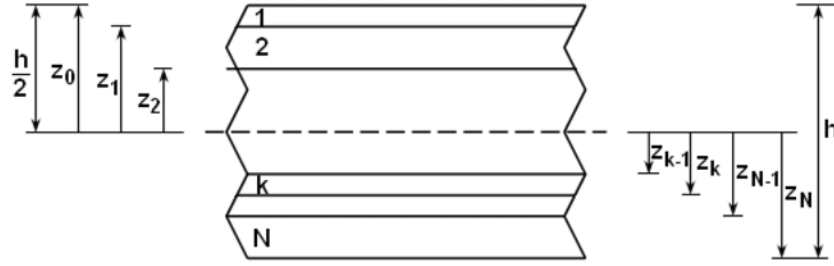
Należy zauważyć, że tensor sprężystości po transformacji kierunków warstw do kierunku osi materiałowych ma wszystkie składowe niezerowe w przeciwieństwie do tensora sprężystości w konfiguracji osiowej. Warstwa ortotropowa w konfiguracji nieosiowej posiada cechy anizotropowe, jednak nadal składowe tensora sprężystości zależą tylko od czterech stałych materiałowych.

### 2.2.2. Klasyczna teoria laminacji

Jak wspomniano powyżej, znaczna część zbrojonych laminatów polimerowych może być opisana zależnościami ortotropii ogólnej i szczególnej. Z tego względu w KTL wprowadza się szereg założeń i uproszczeń. Zakłada się, że warstwy w laminacie są w połączeniu idealnym, tzn. nie występują przemieszczenia względem poszczególnych warstw i można przyjąć, że przemieszczenia na grubości laminatu są ciągłe. Można więc potraktować laminat jako płytę jednowarstwową z powierzchnią środkową w połowie jej grubości. Dodatkowo, płytę laminatową można potraktować jako płytę cieką w świetle hipotezy Kirchhoffa i przyjąć założenie o małych przemieszczeniach. Przemieszczenia  $u$ ,  $v$  i  $w$  dowolnego punktu płyty laminatowej w kierunkach osi współrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$  wyraża się przez przemieszczenia  $u_0$ ,  $v_0$  i  $w_0$  jej powierzchni środkowej:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, w = w_0. \quad (2.6)$$





Rys. 2.1: Struktura warstwowa laminatu

Na podstawie powyższych założeń odkształcenia płyty mogą być zapisane w postaci:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

gdzie odkształcenia powierzchni środkowej wynoszą:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

a krzywizny powierzchni środkowej:

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Zatem relacja naprężenia-odkształcenia z uwzględnieniem (2.5) dla  $k$ -tej warstwy laminatu może być zapisana jako

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \right), \quad (2.10)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{T}$ .

Gdy przyjąć, że współczynniki macierzy sprężystości są stałe dla każdej warstwy równania sił i momentów mogą być zapisane w postaci:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix}_k = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k \left( \int_{-z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix}_k dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}_k z dz \right), \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix}_k = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix}_k z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}_k z^2 dz \right). \quad (2.12)$$

Mając na uwadze, że odkształcenia  $\varepsilon_i^0$  i krzywizny  $\kappa_i$  odnoszą się do powierzchni środkowej płyty i nie zależą od  $z$ , równania (2.11) oraz (2.12) mogą być przekształcone do postaci

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Wielkości opisane wzorami (2.15) są to odpowiednio współczynniki macierzy sztywności tarczowej, macierzy sztywności sprzężonej oraz macierzy sztywności płytowej.

### 2.2.3. Właściwości cieplne laminatów

Laminaty charakteryzują się skokową niejednorodnością poprzeczną, co wynika z ich struktury warstwowej. Na podstawie reguły mieszanin można przyjąć, że charakterystyki cieplne warstwy są stałe we wszystkich kierunkach. Zakładając dodatkowo niezależność charakterystyk cieplnych od temperatury równanie przewodzenia ciepła stanu ustalonego w kierunku poprzecznym można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Rozwiązaniem równania (2.16) jest rozkład temperatury na grubości laminatu. Zgodnie z regułą mieszanin współczynniki przewodnictwa cieplnego w laminacie zbrojonym tkaniną w kierunku stycznym i normalnym wyznacza się następująco:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sum_{i=1}^N V_i \lambda_i, \quad \lambda_{12} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{V_i}{\lambda_i} \right)^{-1}. \quad (2.17)$$

Zmiany pola temperatury laminatu powodują powstawanie naprężeń i odkształceń cieplnych, a także zmiany współczynników rozszerzalności cieplnej warstw i ich komponentów, co prowadzi do anizotropii rozszerzalności laminatu (Hyla i Ślężona, 2004). W świetle KTL zmiany te opisane są w zakresie sprężystym, natomiast pełny opis zachowania laminatów w różnych temperaturach zawiera teoria termolepkosprężystości, która jest przedstawiona w dalszych rozdziałach.

Zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a zależności (2.13) i (2.14) przyjmują zmodyfikowaną postać:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1^\theta \\ N_2^\theta \\ N_{12}^\theta \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1^\theta \\ M_2^\theta \\ M_{12}^\theta \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} N_{ij}^\theta &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (\alpha_{ij})_k \Delta\theta (z_k - z_{k-1}), \\ M_{ij}^\theta &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (\alpha_{ij})_k \Delta\theta (z_k^2 - z_{k-1}^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Należy zauważyć, że powyższe rozważania są prawdziwe jedynie w przypadku małych odkształceń i przy ustalonym polu temperatury. W przypadku nieustalonego przepływu ciepła w kompozytach należy uwzględnić przede wszystkim zależność przewodności cieplnej od temperatury. Model oparty na równaniach konstytutywnych przewodności cieplnej został przedstawiony w pracy (Rylko, 2005).

## 2.3. Modele stosowane do opisu zachowania laminatów polimerowych

Zachowanie materiałów w różnych warunkach pracy, a głównie relacje zachodzące pomiędzy odkształceniami i naprężeniami są opisywane za pomocą różnych modeli, w tym modeli reologicznych. Klasyfikuje się je wg rodzaju materiału, sposobu obciążeń oraz zmienności temperatury (Ochelski, 2004). W niniejszym podrozdziale przedstawiono modele stosowane w opisie zachowania polimerów i kompozytów (w tym laminatów) polimerowych.

### 2.3.1. Modele klasyczne

#### Model Hooke'a

Najprostszym modelem, stosowanym do opisu zachowania laminatów polimerowych jest model Hooke'a będący modelem jednoparametrowym i zakładający idealną sprężystość materiału. Model opisuje zachowanie sprężyny, której odkształcenia wzrastają proporcjonalnie do przyłożonych obciążeń, a związek między odkształceniami i naprężeniami jest liniowy:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.21)$$

Model posiada wiele ograniczeń i może być zastosowany jedynie do opisu obciążeń statycznych przy małych odkształceniach. Jednak znajduje on zastosowanie w przypadku pewnej grupy problemów elastostatyki (Tarnopol'skii i Kincis, 1985).

### Model sprężysto-plastyczny

Model sprężysto-plastyczny jest modelem dwuparametrowym składającym się z ciała Hooke'a oraz ciała Saint-Venanta. O ile ciało Hooke'a charakteryzuje zachowanie liniowe, to ciało Saint-Venanta reprezentowane przez element cierny opisuje nieliniowe zachowanie laminatu, co wiąże się z rozróżnieniem odkształceń sprężystych i odkształceń plastycznych. Duża grupa materiałów polimerowych wykazuje zachowanie sprężyste w zakresie  $\sigma \leq \sigma_y$ , a następnie zachowanie plastyczne, gdy wartość granicy plastyczności zostaje przekroczona. W tym przypadku równanie prędkości odkształceń można zapisać w postaci:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{E_p} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (2.22)$$

Na podstawie tego modelu istnieje możliwość opisu bardziej licznej grupy problemów, jednak nadal ogranicza się do problemów statyki dla zakresu małych odkształceń. Model wykorzystuje się m.in. do opisu statycznego rozciągania i zginania (Shalin, 1995), a także w problemach mechaniki pęknięcia (Balankin *i in.*, 2009; Tian *i in.*, 2010).

## 2.3.2. Klasyczne modele reologiczne

### Lepkosprężystość liniowa

Podstawowym opisem zachowania struktur liniowo-lepkosprężystych jest zasada superpozycji zaproponowana przez Boltzmann (Minenkov i Stasenko, 1977; Ochelski, 2004). Zakłada ona zależność proporcjonalną pomiędzy przyrostami naprężeń i odkształceń uwzględniając przy tym efekty reologiczne. Zgodnie z tą zasadą, zachowanie lepkosprężyste struktury może być opisane w przypadku stałych odkształceń równaniem:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)I_0 + \int_0^t \sigma(t') K(t-t') dt', \quad (2.23)$$

gdzie *jądro pełzania* przedstawia się jako:

$$K(t-t') = \frac{\partial I(t-t')}{\partial t}, \quad (2.24)$$

lub w przypadku stałych odkształceń równaniem:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E_0 + \int_0^t \varepsilon(t') R(t-t') dt', \quad (2.25)$$

gdzie *jądro relaksacji* można zapisać jako:

$$R(t-t') = \frac{\partial E(t-t')}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Taki opis pozwala wprowadzić modele reologiczne opisujące zachowanie lepkosprężyste laminatów.

### Model Maxwella

Większość laminatów konstrukcyjnych wykazuje zachowanie liniowo-lepkosprężyste w zakresie temperatur pomiędzy  $\gamma$ - i  $\alpha$ -przemianą. Lepkosprężysty model Maxwella opisuje materiał zachowujący się częściowo jak ciało Hooke'a (sprężyna) i częściowo jak ciało Newtona (tłumik). Te dwa elementy połączone są ze sobą w sposób szeregowy i opisują relaksację naprężeń ciała lepkosprężystego. Równanie modelu Maxwella może być zapisane następująco:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (2.27)$$

Powyższe równanie może być rozwiązane dla różnych warunków odkształceń: pełzanie, relaksacja naprężeń, rozciąganie, odkształcanie dynamiczne (Bakar, 2009), jednak ze względów praktycznych najczęściej jest rozwiązywane dla opisu relaksacji naprężeń w laminatach. Całkując (2.27) dla warunków  $t = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  można otrzymać *krzywą relaksacji* opisaną równaniem:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right). \quad (2.28)$$

Relacja zachodzi przy  $\varepsilon = \text{const}$ , a stosunek  $\frac{\eta}{E}$  w równaniu (2.28) określa czas relaksacji. Interpretując (2.28) można stwierdzić, że materiał opisany modelem Maxwella zachowuje się jak materiał sprężysty, gdy  $t \ll t'$ , natomiast przy  $t \gg t'$  – jak materiał lepki, a gdy  $t \rightarrow 0$ , to  $\sigma \rightarrow 0$ .

### Model Kelvina-Voigta

Model Kelvina-Voigta jest również modelem dwuparametrowym opisującym lepkosprężystość, w którym elementy (sprężyna i tłumik) są połączone ze sobą równolegle. Oznacza to, że odkształcenia w tym modelu są równe, natomiast naprężenia są sumą naprężeń sprężyny i tłumika. Ze względu na tę właściwość model najczęściej wykorzystywany jest do opisu pełzania. Równanie modelu Kelvina-Voigta można zapisać w postaci:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2.29)$$

Analogicznie, jak w przypadku modelu Maxwella, całkując równanie dla warunków  $t = 0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  uzyskuje się *krzywą retardacji* opisaną równaniem:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) \right], \quad (2.30)$$

gdzie stosunek  $\frac{\eta}{E}$  określa *czas retardacji*. Z równania (2.30) wynika, że gdy  $t \rightarrow \infty$ , to  $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}$ .

### Model Zenera

Model Zenera nazywany również modelem standardowym jest modelem trójparametrowym składającym się z modelu Maxwella połączonego równolegle z modelem Hooke'a.

Pozwala on na opis materiału charakteryzującego się natychmiastowymi odkształceniami, a następnie odkształceniami pełzania. Model znajduje zastosowanie w analizie i przewidywania zachowania usieciowanych polimerów (Bakar, 2009). Równanie modelu jest następujące:

$$\left( \frac{\eta}{E_H + E_M} \right) \frac{d\sigma}{dt} = \left( \frac{E_H E_M}{E_H + E_M} \right) \varepsilon + \left( \frac{\eta E_H}{E_H + E_M} \right) \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2.31)$$

gdzie  $E_H$  i  $E_M$  oznaczają odpowiednio moduły sprężystości w elemencie Hooke'a i Maxwella. Całkując powyższe równanie dla warunków  $t = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  otrzymuje się *równanie relaksacji naprężeń*, a dla warunków  $t = 0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  *równanie pełzania*:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{E_H + E_M}{E_H E_M} - \frac{1}{E_M} \exp \frac{-t E_M}{\eta} \right), \quad (2.32)$$

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 \left[ \frac{E_M}{E_H + E_M} + \frac{E_H}{E_H + E_M} \exp \frac{-t (E_H + E_M)}{\eta} \right]. \quad (2.33)$$

W procesie relaksacji naprężenia zmniejszają się od wartości  $\sigma_0$  przy  $t = 0$  do wartości  $\sigma_\infty$  przy  $t \rightarrow \infty$ .

### Model Bürgersa

Ostatnim klasycznym modelem reologicznym jest czteroparametrowy model Bürgersa pozwalający opisywać zarówno relaksację naprężeń, jak i pełzanie laminatów polimerowych. Model reprezentuje szeregowe połączenie modelu Maxwella i modelu Kelvina-Voigta. Dobrze opisuje materiały wykazujące natychmiastowe odkształcenia sprężyste z jednoczesnym płynięciem lepkiem oraz odkształcenia sprężystości opóźnionej (Ochelski, 2004). Równanie modelu może być wyrażone następująco:

$$\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{E_{KV}}{\eta_M \eta_{KV}} \sigma + \left( \frac{E_{KV}}{E_M \eta_{KV}} + \frac{1}{\eta_{KV}} + \frac{1}{\eta_M} \right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{E_M} \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \quad (2.34)$$

gdzie  $E_{KV}$  i  $E_M$  są modułami sprężystości, a  $\eta_{KV}$  i  $\eta_M$  są lepkościami odpowiednio w elementach Kelvina-Voigta i Maxwella. Równanie opisujące odkształcenia w czasie dla modelu Bürgersa można przedstawić w postaci:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_M} + \frac{\sigma_0}{E_{KV}} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t E_{KV}}{\eta_{KV}} \right) \right] + \frac{t \sigma_0}{\eta_M}, \quad (2.35)$$

gdzie  $\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}$  określa czas retardacji elementu Kelvina-Voigta.

### 2.3.3. Uogólnione modele reologiczne

Opisując zachowanie materiałów lepkosprężystych trudno ograniczyć się do opisów modelami klasycznymi dla lepkosprężystości posiadających wartość skalarną czasu relaksacji/retardacji. Biorąc pod uwagę różne stany, w których mogą się znajdować laminaty polimerowe (stan szklisty, stan kauczukopodobny, stan ciekły) (Bakar, 2009) oraz z uwagi na procesy starzenia (Ochelski, 2004) należy wprowadzić wartości czasów relaksacji/retardacji nazywanych *widmem czasów relaksacji/retardacji*. Kompleksowy opis materiałów lepkosprężystych zapewniają uogólnione modele reologiczne.

### Model Maxwella-Wiecherta

Model Maxwella-Wiecherta nazywany też uogólnionym modelem Maxwella stanowi równoległe połączenie  $N$  modeli Maxwella, w którym  $E_i$  oraz  $\eta_i$  oznaczają odpowiednio element sprężysty oraz element lepki w  $i$ -tym elemencie Maxwella. W przypadku relaksacji naprężeń każdy element modelu można scharakteryzować równaniem (2.28). Sumując elementy Maxwella można otrzymać następujące równanie:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^N E_i \exp\left(-\frac{tE_i}{\eta_i}\right). \quad (2.36)$$

W przypadku, gdy wartości czasów relaksacji stają się różniczkowe ( $N \rightarrow \infty$ ) równanie 2.36 można przekształcić do postaci całkowej:

$$E(t) = \int_0^\infty H(t') \exp\left(-\frac{t}{t'_i}\right) dt', \quad (2.37)$$

gdzie  $H(t')$  jest widmem czasów relaksacji.

### Uogólniony model Kelvina-Voigta

Podobnie jak w przypadku modelu Maxwella-Wiecherta nie jest możliwy ilościowy opis zachowania materiału lepkosprężystego w warunkach pełzania na podstawie modelu Kelvina-Voigta. Dlatego należy rozpatrzyć większą liczbę elementów Kelvina-Voigta połączonych szeregowo i tworzących model uogólniony. Odształcenia  $i$ -tego elementu modelu opisuje równanie (2.30). Po zsumowaniu tych elementów uzyskuje się równanie:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t'_i}\right)\right]. \quad (2.38)$$

Gdy liczba elementów modeli podąża do nieskończoności, a czasy relaksacji przyjmują wartości rzędu różniczkowego sumę w (2.38) można przekształcić w równanie całkowe:

$$\frac{1}{E(t)} = \int_0^\infty L(t') \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t'_i}\right)\right] dt', \quad (2.39)$$

gdzie  $L(t')$  jest widmem czasów retardacji.

Należy zauważyć, że postać równań (2.37) i (2.39) jest nazywana *szeregami Prony'ego* i ma szerokie zastosowanie przy definiowaniu właściwości lepkosprężystych materiałów w programach MES, np. w MSC.Marc/Mentat (MSC, 2007).

Wytwarzanie nowych materiałów powoduje rozwój modeli reologicznych do opisu ich zachowania. Z tego względu wprowadzono również modele uogólnione Zenera i Bürgersa. Uogólniony model Zenera jest reprezentowany poprzez połączenie równoległe  $N$  elementów Zenera, natomiast uogólniony model Bürgersa posiada jeden element Maxwella i  $N$  elementów Kelvina-Voigta połączonych szeregowo. Równania naprężeń-odkształceń zostały pominięte, można je znaleźć w pracy (Carcione, 2007) (uogólniony model Zenera) oraz (Marcovich i Villar, 2003) (uogólniony model Bürgersa).

### 2.3.4. Nieklasyczne modele reologiczne

Pewna grupa materiałów polimerowych wykazuje zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami, których nie da się opisać żadnym z modeli klasycznych lub uogólnionych. Dlatego powstają coraz to nowsze modele reologiczne, które są nieustannie rozwijane.

#### Ułamkowe modele reologiczne

Niektóre polimery wykazują pewne anomalne zachowania w procesie relaksacji i nie mogą być opisane zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Pożądany opis może być uzyskany poprzez zastosowanie równań różniczkowych z pochodnymi ułamkowymi (ang. *fractional derivatives*). Idea takich modeli była zaproponowana przez Rabotnova (Rabotnov, 1977) i następnie rozwijana przez liczne ośrodki naukowo-badawcze. Modele te są konstruowane ze zmodyfikowanych elementów Hooke'a i Newtona tworząc różne konfiguracje połączeń i znajdują zastosowanie w opisie zachowań dynamicznych materiałów lepkosprężystych. Dzięki różnym sposobom połączenia elementów uzyskuje się różne właściwości modeli, sformułowanie zwodyfikowanych modeli Maxwella, Kelvina-Voigta oraz Zenera opartych na równaniach różniczkowych z pochodnymi ułamkowymi można znaleźć w pracy (Schessel *i in.*, 1995).

Prace dotyczące reologii polimerów i kompozytów były prowadzone przez zespół Wilczyńskiego. W wyniku tych prac powstał model Wilczyńskiego (Wilczyński, 1990), będący modyfikacją modelu Kelvina-Voigta, w którym własności elementów są opisane wykładniczymi funkcjami ułamkowymi Rabotnova (Klasztorny, 2004), a następnie jego liczne modyfikacje, np. (Klasztorny *i in.*, 2000; Klasztorny i Gieleta, 2002).

Interesującą grupą modeli reologicznych opartych na równaniach różniczkowych z pochodnymi ułamkowymi są modele fraktalne. Elementy takich modeli są połączone w sposób rekurencyjny tworząc strukturę samopodobną. W pracy (Heymans i Bauwens, 1994) opisane są dwa takie modele: ogólny model drzewa fraktalnego oraz model Laddera.

#### Modele wielkoskalowe

W pewnej klasie rozpatrywanych materiałów o złożonej i zróżnicowanej budowie przy dodatkowo występujących złożonych stanach naprężenia wykorzystywanie klasycznych modeli mechaniki ośrodków ciągłych do opisu ich zachowania może prowadzić do znaczących różnic w stosunku do zachowania rzeczywistego tych materiałów. Wynika to z występującej zależności ich właściwości od struktury mikrofizycznej. Rezygnując z pewnych założeń klasycznej koncepcji ośrodków odkształcalnych możliwe jest uwzględnienie zachowania ośrodka w skali mikro. Mianowicie, pojawia się możliwość modelowania dyslokacji, wewnętrznych niestabilności, pęknięć w skali mikro, możliwe staje się modelowanie ruchu ciał, w których występują oddziaływania coulombowskie i grawitacyjne, a także pojawia się możliwość modelowania ośrodków z wewnętrzną mikrostrukturą oraz ośrodków wieloskładnikowych, w tym kompozytów (Rymarz, 1993). Modelowanie zachowania ciał w ramach teorii ośrodków mikrostrukturalnych jest zalecane przy niektórych proble-



mach mechaniki ośrodków ciągłych, np. w przypadku, gdy powstają duże gradienty sił w danym punkcie (należy wtenczas uwzględnić tzw. naprężenia momentowe).

Zgodnie z (Rymarz, 1993) można wprowadzić podział ośrodków uwzględniających wewnętrzną mikrostrukturę ze względu na sposób modelowania – na ośrodki mikromorficzne zakładające odkształcalność mikrociał oraz ośrodki mikropolarne (inaczej ośrodki Cosseratów), przy których zakłada się, że mikrociała są nieodkształcalne.

W przypadku modelowania kompozytów polimerowych z wykorzystaniem teorii ośrodków mikrostrukturalnych (momentowej teorii lepkosprężystości) podstawy fizyko-matematyczne są dopiero w trakcie tworzenia, jednak wzmianki o niej sięgają końca lat 60. XX wieku (Savova, 1968). W nawiązaniu do rozpatrywanej w niniejszej pracy grupy problemów należy wymienić pracę (Pobedria i Omarov, 2007), w której przedstawione zostały równania konstytutywne momentowej teorii lepkosprężystości oraz sposób wyznaczenia funkcji materiałowych dla ośrodka lepkosprężystego. Problem termomechaniczny ośrodka kompozytowego został przedstawiony w pracy (Nemirovskii i Yankovskii, 2009), w której autorzy definiują problem termosprężystości dla włóknistego kompozytu warstwowego. Zastosowanie i rozwój momentowych teorii ośrodków są jednak ograniczone przez bardzo skomplikowany aparat matematyczny oraz znaczne trudności z eksperymentalnym wyznaczeniem stałych/funkcji materiałowych.

### **Modele Takayanagi**

W praktyce często można spotkać się z sytuacją, gdy osnowę laminatu stanowi mieszanka kilku polimerów o różnych właściwościach fizykochemicznych, a przenikające się sieci tych polimerów stanowią odrębne fazy. Modele Takayanagi pozwalają na opis takich materiałów dzięki wprowadzeniu współczynników uwzględniających udział objętościowy danego polimeru w mieszance. W pracy (Sperling, 2006) zostały przedstawione modyfikacje modeli Maxwella, Kelvina-Voigta oraz Zenera, istnieje jednak możliwość rozbudowy tych modeli do bardziej skomplikowanych.

## **2.4. Dyssypacja energii mechanicznej w laminatach polimerowych**

Zjawisko dyssypacji energii mechanicznej w polimerach i laminatach polimerowych może występować w różnych warunkach pracy elementów konstrukcyjnych. Często zjawisko to jest zjawiskiem niepożądanym z uwagi na towarzyszący mu efekt samorozgrzania. W wyniku samorozgrzania zachodzą nieodwracalne reakcje termokinetyczne, co powoduje obniżenie sztywności i wytrzymałości elementów konstrukcyjnych, a w konsekwencji – ich przyspieszoną degradację.

### 2.4.1. Warunki inicjacji procesów dyssypacyjnych i efekt samorozgrzania

Wiele elementów konstrukcyjnych poddawanych jest intensywnym obciążeniom cyklicznym lub drganiom podczas swojej pracy. Wymuszenie cykliczne elementów wykonanych z materiałów lepkosprężystych powoduje różnicę w fazie pomiędzy przebiegami amplitudy naprężeń i odkształceń wynikającą z tłumienia wiskotycznego materiału, co powoduje występowanie histerezy. Ze względu na sposób obciążenia można wyróżnić dwa scenariusze rozwoju zjawiska (Ochelski, 2004), zakładając, że ośrodek cechuje się idealną charakterystyką liniowo-lepkosprężystą oraz przy założeniu braku zakłóceń w układzie pomiarowym. Pierwszy z nich opiera się na programie wymuszeń dynamicznych, czyli z kontrolą stałego poziomu naprężeń:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t, \quad (2.40)$$

który spowoduje odkształcenia w postaci

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta). \quad (2.41)$$

Drugi scenariusz rozwoju zjawiska jest oparty na programie wymuszeń kinematycznych (przy stałych odkształceniach):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad (2.42)$$

w wyniku których powstaną naprężenia w postaci

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t - \delta). \quad (2.43)$$

W zależności od programu obciążenia zjawisko będzie przebiegać w odmienny sposób (Ratner i Korobov, 1965). W przypadku, gdy wymuszenia mają charakter dynamiczny, obserwowany jest ciągły wzrost ilości energii dyssypowanej o różnym gradiencie w różnych stadiach obciążenia. Natomiast w przypadku wymuszenia kinematycznego obserwowany jest szybki wzrost ilości energii dyssypowanej, a następnie jej stabilizacja przy pewnej wartości.

#### Lepkosprężystość w dziedzinie zespolonej

Biorąc pod uwagę, że rozpatrywany proces jest procesem dynamicznym należałoby wprowadzić parametry dynamiczne opisujące rozpatrywaną strukturę. Moduł zespolony można wyznaczyć na podstawie (2.42) i (2.43) jako (2.44):

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma^*}{\varepsilon_0} = E'(\omega) + iE''(\omega). \quad (2.44)$$

Może on być rozłożony na dwie składowe: *moduł zachowawczy*  $E'(\omega)$  opisujący zachowanie sprężyste oraz *moduł stratny*  $E''(\omega)$  opisujący zachowanie lepkie materiału. Między składowymi modułu zespolonego istnieje dodatkowa relacja opisująca współczynnik stratności mechanicznej określanej jako tangens kąta przesunięcia fazowego:

$$\tan \delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}. \quad (2.45)$$

Wprowadzenie parametrów zespolonych pozwala także na przekształcenie równań opisujących lepkosprężystość do postaci operatorowej przy różnych programach obciążenia poprzez zastosowanie do nich transformacji Fouriera. Równania (2.23) i (2.25) przyjmują postać:

$$\varepsilon(\omega) = K^*(\omega)\sigma(\omega), \quad (2.46)$$

$$\sigma(\omega) = R^*(\omega)\varepsilon(\omega). \quad (2.47)$$

Uwzględniając wpływ temperatury można przejść do opisu termolepkosprężystego materiału (Kovalenko i Karnaukhov, 1973). Wtedy parametry zespolone będą zależeć również od temperatury, a przykładowo równanie (2.44) przyjmie postać:

$$E^*(\omega, \theta) = E'(\omega, \theta) + iE''(\omega, \theta), \quad (2.48)$$

gdzie

$$\begin{aligned} E'(\omega, \theta) &= \omega \int_0^{\infty} E(t, \theta) \sin \omega t \, dt, \\ E''(\omega, \theta) &= \omega \int_0^{\infty} E(t, \theta) \cos \omega t \, dt. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Moduły dynamiczne jak i współczynnik stratności mechanicznej najczęściej wyznaczone są przy pomocy DMA. Szczegółowy opis badań z wykorzystaniem tej analizy został przedstawiony w Rozdziale 5.2.

### Procesy termokinetyczne

Proces samorozgrzania rozpatrywanych struktur lepkosprężystych podczas obciążeń cyklicznych może być wyjaśniony poprzez występowanie tarcia wewnętrznego na poziomie molekularnym, a opór wynikający z tarcia może być zinterpretowany jako tłumienie wiskotyczne. Dyssypacja energii wiąże się z występowaniem nieodwracalnych reakcji termokinetycznych z wytwarzaniem energii cieplnej. Ze względu na niskie wartości współczynnika przewodzenia ciepła większości polimerów i laminatów konstrukcyjnych energia cieplna nie jest odprowadzana do otoczenia poprzez konwekcję w całości i jest magazynowana w strukturze. Prowadzi to do wzrostu temperatury samorozgrzania w strukturze.

Istotnym faktem w przypadku laminatów bazujących na żywicach polimerowych (szczególnie – na termo- i duroplastach) jest niska temperatura przejścia fazowego  $\alpha$  lub inaczej, temperatura zeszklenia. Wzrost temperatury samorozgrzania może spowodować przybliżenie się do temperatury zeszklenia, co doprowadzi do degradacji struktury. W ogólnym przypadku zachowanie materiałów lepkosprężystych, w szczególności polimerów amorficznych, w różnych temperaturach jest opisywane przez tzw. sześć przedziałów temperaturowych (Sperling, 2006). Pomiędzy przedziałami znajdują się temperatury charakterystyczne determinujące przejście z jednego stanu w drugi. W pierwszym przedziale polimer znajduje się w stanie szklistym i jest zazwyczaj kruchy, obserwowane są lokalne ruchy w łańcuchach molekuł polimeru. Po zakończeniu pierwszego przedziału następuje

przejście  $\gamma$ , przy temperaturze  $\theta_\gamma$ . Drugi przedział jest przedziałem zeszklenia, a łańcuchy polimerowe są rozciągane i zginane. Po zakończeniu tego przedziału następuje przemiana  $\beta$  przy temperaturze  $\theta_\beta$ . Trzeci przedział charakteryzuje się bardzo nieznaczną zależnością wytrzymałości od temperatury ze względu na to, że w łańcuchach polimerowych tworzą się tzw. *grupy boczne* i kończy się przemianą  $\alpha$  przy temperaturze  $\theta_\alpha$  lub  $\theta_g$ . W czwartym przedziale obserwowany jest nagły spadek wytrzymałości, tworzy się łańcuch makromolekularny. W piątym przedziale następuje *wysokoelastyczna stabilizacja* (ang. *rubbery plateau*), wynikająca w zachodzących procesów sieciowania. W ostatnim przedziale obserwuje się kolejny spadek sztywności, spowodowany ślizganiem się łańcuchów polimerowych, aż do osiągnięcia temperatury mięknięcia  $\theta_m$  (Gooch, 2010). Model sześciu przedziałów temperaturowych jest modelem ogólnym i, w zależności od typu polimeru, pewne przedziały mogą nie występować. Z uwagi na to, że rozpatrywane są laminaty konstrukcyjne pierwszy przedział będzie zawsze przedziałem stanu szklonego struktury. Przedział ten zawiera się zazwyczaj pomiędzy temperaturami nieco niższymi od temperatury pokojowej a temperaturą zeszklenia. Po przekroczeniu temperatury zeszklenia moduł spada około tysiąckrotnie w przedziale  $20 \div 30^\circ\text{C}$  (Sperling, 2006), co eliminuje kolejne przedziały temperaturowe z zakresu przedmiotu rozprawy z uwagi na nieprzydatność materiału o wspomnianych właściwościach wytrzymałościowych do zastosowań konstrukcyjnych. Wyjaśnieniem zjawiska  $\alpha$ -przemiany jest osłabienie potencjału Lennarda-Jonesa pomiędzy parą molekuł powodujące możliwość ich przemieszczania się (Sperling, 2006).

Wartości modułów dynamicznych w funkcji temperatury, jak i sama wartość temperatury zeszklenia, są silnie zdominowane zarówno przez wiele parametrów procesu wytwarzania materiału (skład substratów i ew. katalizatorów, metoda wytwarzania), jak i parametrów użytkowych (częstotliwość wymuszenia, prędkość wzrostu temperatury), co zostanie omówione na podstawie przeprowadzonych badań w dalszej części pracy.

#### 2.4.2. Badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące efektu samorozgrzania w polimerach

Pierwsze wzmianki o badaniach dotyczących dyssypacji energii w materiałach można znaleźć w pracach (Farren i Taylor, 1925; Taylor i Quinney, 1934). Autorzy pracy opisywali występowanie histerezy podczas odkształceń plastycznych w metalach i wykazali, że większa część energii dyssypacji jest zamieniana w ciepło. Badania w zakresie efektu samorozgrzania materiałów polimerowych zapoczątkował zespół autorów z Instytutu Mechaniki Polimerów Łotewskiej Akademii Nauk w Rydze. W pracach (Ratner i Korobov, 1965; Ratner *i in.*, 1969; Tamuzh, 1969; Oldyrev i Tamuzh, 1969) na podstawie doświadczeń przedstawili oni modele empiryczne opisujące zjawisko ilościowo. Temperatura samorozgrzania była wyznaczana dla różnych poziomów naprężeń i dla różnych materiałów polimerowych włącznie z kompozytami zbrojonymi włóknem długim. Jednym z problemów obok zbadania natury efektu samorozgrzania był problem jego eliminacji przy próbach zmęczeniowych (Ratner i Korobov, 1965; Tamuzh, 1969) oraz jego wykorzysta-

nie do przyspieszenia prób zmęczeniowych (Oldyrev, 1967b). Autorzy wyznaczyli regiony krzywej wzrostu temperatury samorozgrzania podczas obciążeń cyklicznych, a także zaproponowali opis fizyczny dla każdego z tych regionów. Badania te, oparte na licznych wynikach eksperymentalnych dla szerokiego zakresu polimerów i kompozytów polimerowych, stały się podstawą do dalszych badań. Równoległe badania dotyczące efektu samorozgrzania i jego wpływu na proces zmęczenia materiałów polimerowych były prowadzone w zachodnich ośrodkach naukowych. W pracach (Riddell *i in.*, 1966; Constable *i in.*, 1970) autorzy rozpatrują wpływ efektu samorozgrzania na właściwości mechaniczne termoplastów. Autorzy rozpatrują zachowanie próbek z polimetylmetakrylatu (PMMA) poddawanych obciążeniom cyklicznym i podają empiryczne zależności dla temperatury samorozgrzania w stosunku do naprężeń podczas obciążenia. W serii eksperymentów określili oni, że w elementach poddawanych naprężeniom o wartości powyżej 35% wartości granicy plastyczności temperatura samorozgrzania może osiągać temperaturę zeszklenia i wg tych obserwacji wprowadzają podział procesów zmęczeniowych na zmęczenie mechaniczne i zmęczenie cieplne, podobnie jak autorzy (Ratner i Korobov, 1965).

Badania teoretyczne w sensie mechaniki ośrodków ciągłych były zapoczątkowane w zespole autorów z Instytutu Mechaniki Ukraińskiej Akademii Nauk w Kijowie. Pierwsze prace (Kovalenko i Karnaukhov, 1969) przedstawiały rozwiązanie przypadków szczególnych termolepkoelastostatyki. W pracach (Bykov *i in.*, 1971; Kovalenko i Karnaukhov, 1972; Kovalenko i Karnaukhov, 1973) zaproponowano uogólnioną postać równań konstytutywnych teorii termolepkosprężystości. Zaproponowano metodę dokładną oraz przybliżoną (opartą na parametrach zespolonych) rozwiązywania zagadnień teorii termolepkosprężystości. Prace nad metodami rozwiązywania zagadnień termolepkosprężystości były prowadzone również w Moskiewskim Instytucie Budownictwa (Filippov i Filippova, 1979). Dalsze prace koncentrowały się głównie na rozwiązywaniu problemów termolepkosprężystości dla różnych modeli geometrycznych (Kucher i Karnaukhov, 1981; Senchenkov i Kirichok, 1987; Senchenkov *i in.*, 1992). Badania dotyczące efektu samorozgrzania są prowadzone również przez zespół autorów z Uniwersytetu Paula Verlaine'a w Metz. W pracy (Molinari i Germain, 1996) autorzy rozpatrzyli aspekty teoretyczne powstawania efektu samorozgrzania w polimerach podczas cyklicznych obciążeń ściskających oraz zbadali problem stabilizacji temperatury samorozgrzania na poszczególnych etapach rozwoju efektu. Autorzy pracy (Dinzart *i in.*, 2008) rozpatrzyli również belkę obciążoną osiowo i poddaną cyklicznemu prostemu zginaniu. W wyżej wymienionej pracy zaproponowali rozwiązanie problemu stacjonarnego rozkładu temperatury samorozgrzania przy pomocy zmodyfikowanych funkcji Bessela. Przedstawiony był również problem stateczności belki z uwzględnieniem wpływu temperatury samorozgrzania. Rozwijane są także sformułowania teorii termolepkosprężystości metodą elementów skończonych dla różnych modeli reologicznych (Holzapfel i Reiter, 1995; Ramkumar *i in.*, 2010).

Badania eksperymentalne dotyczące efektu samorozgrzania są realizowane w wielu ośrodkach. Liczne prace dotyczące badań efektu samorozgrzania oraz jego wpływu na mechanizmy zmęczenia oraz inicjacji i propagacji pęknięć materiałów polimerowych przedstawił D. Rittel. W pracy (Rittel, 1998a) autor proponuje modele empiryczne przyrostu

temperatury samorozgrzania i jej wpływu na propagację pęknięć w kwadratowych płytach z otworem wykonanych z PMMA, które zostały poparte badaniami eksperymentalnymi. W pracy (Rittel, 1998b) autor rozpatruje również wpływ temperatur ujemnych na dynamiczne pękanie i zmęczenie materiałów z uwzględnieniem efektu samorozgrzania. Praca (Rittel, 1999) przedstawia badania dotyczące współczynnika konwersji energii mechanicznej w energię cieplną w polimerach, jednak ma charakter raportu i ogranicza się do opisanego przyczyn powstania nieliniowych zmian współczynnika względem przyrostu odkształceń. Dalsze prace autora i jego zespołu (Rittel, 2000; Rittel i Rabin, 2000; Rittel *i in.*, 2003; Moisa *i in.*, 2005) skupiają się wokół badań dotyczących efektu samorozgrzania w termoplastach (głównie PC i PMMA) podczas obciążeń cyklicznych oraz ich wpływu na zmęczenie. Badania dotyczące omawianego zjawiska są często przeprowadzane jako badania pochodne względem podstawowych badań zmęczeniowych polimerów i kompozytów polimerowych. W pracy (Liu *i in.*, 2004) autorzy obserwują efekt samorozgrzania podając ogólne zależności jego powstania bez dalszej analizy. Autorzy (Bellenger *i in.*, 2006) przedstawiają efekt samorozgrzania jako efekt uboczny występujący przy zmęczeniu zginanej belki. W pracach (Luo *i in.*, 2000; Steinberger *i in.*, 2006) efekt samorozgrzania jest wykorzystywany do wykrywania uszkodzeń przy pomocy metod termografii. Model numeryczny i wyniki eksperymentalne efektu samorozgrzania przedstawiono w pracy (Jeyaraj *i in.*, 2009), gdzie badano płyty epoksydowe zbrojone włóknem węglowym. W pracy podano także sposób wyznaczania krytycznych temperatur samorozgrzania (patrz Rozdział 7.2).

W kraju, według dostępnej literatury, dotychczas nie prowadzono badań dotyczących efektu samorozgrzania. Zespół z Politechniki Krakowskiej pracuje nad określeniem wpływu dyssypacji energii mechanicznej na zmęczenie kompozytów polimerowych opierając się na teorii kinetycznej Żurkowa (Porębska, 2008; Porębska, 2009a; Porębska, 2009b; Porębska i Mazurkiewicz, 2009), jednak badania mają charakter empiryczny i nie uwzględniają efektu samorozgrzania. O badaniach w zakresie efektu samorozgrzania wspomina się w pracach zespołu z Wojskowej Akademii Technicznej (Gieleta *i in.*, 2000; Ochelski, 2004), jednak nie przedstawiono wyników badań w tym zakresie. Zespół autorów z Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy przedstawił pracę mającą charakter przeglądu (Topoliński, 2001), w której opisują oni m.in. efekt samorozgrzania, a w pracy (Cieszyński i Topoliński, 2006) zaprezentowano wstępne wyniki badań z uwzględnieniem i kontrolą energii dyssypacji.

## 2.5. Modele zmęczeniowe laminatów polimerowych

Degradacja laminatów polimerowych poddanych obciążeniom zmęczeniowym jest procesem skomplikowanym, przebiegającym w wielu fazach i zależącym od dużej liczby czynników. Proces zmęczenia może być interpretowany na różne sposoby, m.in. można go opisywać na podstawie redukcji sztywności, redukcji trwałości zmęczeniowej lub redukcji nośności pozostałej (Bełzowski, 2002a); na podstawie kumulacji uszkodzeń oraz na podstawie funkcji zniszczenia. Podobna klasyfikacja została wprowadzona w pracy

(Kamiński, 2002). Istniejące modele zmęczeniowe mogą być podzielone na trzy grupy: modele deterministyczne, modele stochastyczne oraz modele z kombinacją parametrów deterministycznych i stochastycznych. Dobór odpowiedniego modelu opisującego degradację rozpatrywanej struktury zależy od rodzaju i ilości zgromadzonych danych dotyczących m.in. parametrów wytrzymałościowych, historii obciążeń oraz innych czynników mających wpływ na degradację struktury. Degradacja laminatów polimerowych może być przedstawiona poprzez różne zależności pomiędzy parametrami modelu. Jednym z najczęściej spotykanych sposobów reprezentacji wyników są krzywe Wöhlera i ich pochodne reprezentujące naprężenia w funkcji liczby cykli. Istnieją także relacje reprezentujące spadek modułu sprężystego w funkcji liczby cykli lub zależności określające stosunek wartości aktualnej modułu sprężystego do jego wartości pierwotnej (Kamiński, 2002). Inną interesującą metodą jest obserwacja zmiany pętli histerezy (zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami) w funkcji liczby cykli obciążenia (Leda, 2000). Poniżej przedstawiono wybrane modele zmęczeniowe wykorzystywane do opisu degradacji kompozytów polimerowych.

### 2.5.1. Modele oparte na redukcji sztywności

Jedną z pierwszych prac w zakresie modelowania zmęczenia warstwowych kompozytów zbrojonych przedstawili Broutman i Sahu (Broutman i Sahu, 1972), w której zaproponowali model oparty o naprężenia resztkowe na podstawie przeprowadzonych prób na rozciąganie. Model zakłada liniowy spadek naprężeń resztkowych podczas przebiegu procesu zmęczenia z wartości początkowej sztywności do wartości sztywności, przy której występuje uszkodzenie:

$$\sigma_i^* = \sigma_{UTS}^{i-1} - (\sigma_{UTS}^0 - \sigma_i) \frac{n_i}{N_i}, \quad (2.50)$$

gdzie  $\sigma_i^*$  jest sztywnością resztkową kompozytu przy  $i$ -tym poziomie naprężeń podczas obciążeń cyklicznych,  $\sigma_{UTS}^{i-1}$  jest wytrzymałością graniczną przy rozciąganiu przed osiągnięciem poziomu naprężeń  $\sigma_i$ , a  $\sigma_{UTS}^0$  jest wartością sztywności początkowej kompozytu.

Model, zaproponowany w pracy (Chou i Kroman, 1978), uwzględnia rozkład statystyczny początkowej sztywności oprócz funkcji spadku naprężeń. Równanie naprężeń resztkowych zaproponowane przez autorów ma postać:

$$y^\alpha = x_\gamma^\alpha - (x_\gamma^\alpha - S^\alpha)^{1-i} (n^{\alpha_1})^i, \quad (2.51)$$

gdzie  $x_\gamma$  jest parametrem rozkładu kumulacyjnego wytrzymałości statycznej  $1 - \gamma$ ,  $S$  stanowi przyłożone naprężenie,  $n$  jest liczbą cykli,  $\alpha$  jest parametrem kształtu rozkładu Weibulla dla sztywności początkowej,  $\alpha_1$  jest parametrem kształtu krzywej zmęczeniowej.

Przedstawiony w pracach (Schaff i Davidson, 1997a; Schaff i Davidson, 1997b) model zmęczeniowy dla kompozytów jest jednym z najbardziej znanych modeli, który opiera się na nieliniowym spadku wytrzymałości resztkowej podczas zmęczenia:

$$R(n) = R_0 - (R_0 - S_p) \left( \frac{n}{N} \right)^\nu, \quad (2.52)$$

gdzie  $R(n)$  jest wytrzymałością resztkową,  $R_0$  – statyczną wytrzymałością początkową,  $S_p$  jest wartością szczytową przyłożonego cyklicznie naprężenia,  $n$  jest liczbą cykli przy naprężeniu  $S_p$ ,  $N$  jest liczbą cykli do osiągnięcia stanu uszkodzenia,  $\nu$  jest parametrem dopasowania wytrzymałości resztkowej. W pracy wprowadzono także parametr opisujący zależność przyłożonego naprężenia od częstotliwości wymuszenia. Model był porównany z innymi modelami zaprezentowanymi wcześniej, a także poparty badaniami własnymi autorów.

Jednym z modeli zmęczeniowych dla kompozytów warstwowych obciążanych cyklicznie opartych na redukcji sztywności jest model rozwijany przez Whitwortha. Model w postaci (Whitworth, 1998):

$$\frac{d\left(\frac{E(n)}{E(N)}\right)}{dn} = \frac{-a}{(n+1)\left(\frac{E(n)}{E(N)}\right)^{m-1}}, \quad (2.53)$$

gdzie  $E(n)/E(N)$  jest stosunkiem wartości sztywności pozostałej do wartości sztywności przy uszkodzeniu,  $n$  jest liczbą cykli,  $a$  i  $m$  są parametrami modelu zależnymi od przyłożonych naprężeń, częstotliwości obciążenia i warunków otoczenia. Model był zweryfikowany eksperymentalnie i wykazywał zadawalającą zbieżność do wyników pomiarowych.

Znaczny wkład do problematyki zmęczenia polimerowych kompozytów warstwowych był zrobiony przez Talreję. W artykule przeglądowym (Talreja, 2008) przedstawia on ewolucję modelowania zmęczenia i wykorzystywanych koncepcji dla kompozytów polimerowych w ciągu ostatnich 25 lat opierając się również na własnych pracach. Opisuje on przejście od prostych równań opierających się na ogólnie pojmowanej redukcji sztywności (Talreja, 1981), poprzez modele mikromechaniczne (Akshantala i Talreja, 2000), do modeli wieloskalowych z uwzględnieniem wielu dodatkowych zjawisk i parametrów (Talreja, 2006), a przede wszystkim – z uwzględnieniem lepkości i zależności od temperatury (Ahci i Talreja, 2006).

### 2.5.2. Modele oparte na kumulacji uszkodzeń

Istnieje wiele modeli zmęczeniowych opierających się na relacji propagacji uszkodzeń w funkcji liczby cykli.

Jednym z podstawowych modeli opisujących proces zmęczenia laminatów opartych na metodzie energetycznej jest prawo Parisa (Hyla i Śleżiona, 2004). Opisuje ono przyrost uszkodzenia w zależności od WIN:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m, \quad (2.54)$$

gdzie  $a$  jest długością szczeliny,  $N$  – liczbą cykli,  $\Delta K$  – jest przyrostem WIN, a  $C$  i  $m$  są stałymi materiałowymi. Prawo to pozwala na precyzyjny opis przyrostu liczby uszkodzeń przy założeniu, że przyrost ten jest liniowy w czasie. Innymi modelami wartymi uwagi, które również opierają się na metodzie energetycznej są modele Cherepanova (Cherepanov, 1979) i Bolotina (Bolotin, 1999).



Druga grupa modeli opiera się na przemieszczeniach przy rozwarciu szczeliny (ang. *crack opening displacement*). Fundamentalny model uwzględniający powyższą zależność został zaproponowany przez Rice'a w pracy (Rice, 1968). Całka Rice'a (znana również pod nazwą całki  $J$ ) opisuje w modelu intensywność pól naprężeń w wierzchołku szczeliny poprzez analizę zmian energetycznych (Hyla i Śleżiona, 2004):

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i u_i \frac{\partial u}{\partial x} ds \right), \quad (2.55)$$

gdzie  $W$  jest gęstością energii odkształcenia,  $T$  i  $u$  – odpowiednio wektorami naprężenia i odkształcenia, działającymi w obszarze całkowania  $\Gamma$ . Oba modele znajdują zastosowanie w wielu programach do obliczeń numerycznych, np. w środowisku MSC.Marc/Mentat są one integralną częścią techniki wirtualnego zamknięcia szczeliny (ang. *virtual crack closure technique*) oraz metody opartej na całce  $J$  (MSC, 2007). Modele te uległy wielu modyfikacjom w zależności od potrzeb opisu różnych materiałów i zjawisk towarzyszących oddziaływaniu na nie.

### 2.5.3. Modele oparte na funkcji zniszczenia

Funkcja zniszczenia jest kryterium, które jest często stosowane do opisu zmęczenia laminatów polimerowych. Najstarszym i najprostszym modelem opisującym zmęczenie jest model Palmgren-Minera stosowany zarówno w opisie materiałów konwencjonalnych i jednorodnych, jak i kompozytów. Funkcję zniszczenia  $D$  określa się z poniższej zależności (Kamiński, 2002):

$$D = \frac{n}{N}, \quad (2.56)$$

gdzie  $n$  jest numerem cyklu zmęczenia, a  $N$  określa liczbę cykli do zniszczenia.

Zgodnie z obserwacjami empirycznymi ustalono, że modele opisujące zmęczenie najlepiej opisują funkcje potęgowe, dlatego zaproponowano zmodyfikowaną postać (2.56):

$$D = \left( \frac{n}{N} \right)^C, \quad (2.57)$$

gdzie  $C$  jest stałą niezależną od przyłożonych naprężeń, która wyznaczana jest empirycznie. Istnieje kilka innych modeli bazujących na (2.56), ale wykorzystujących funkcje logarytmiczne (model Srivatsavana-Subramanyana) lub eksponencjalne (model Fonga) (Kamiński, 2005b).

Grupa modeli bazująca na funkcji zniszczenia wykorzystuje w opisie moduły sprężystości, jak np. model Fitzgeralda-Wanga:

$$D = 1 - \frac{E}{E^*}, \quad (2.58)$$

gdzie  $E$  jest wartością modułu sprężystości w danym cyklu, a  $E^*$  jest modułem odniesienia.

Przedstawione modele, w zależności od potrzeb, są rozbudowywane o dodatkowe stałe, aczkolwiek często mają charakter wyłącznie empiryczny.

#### 2.5.4. Modele uwzględniające lepkosprężystość i efekty cieplne

Ze względu na wzrost zastosowania polimerów i kompozytów polimerowych zaistniała potrzeba modelowania ich zachowania w procesie zmęczenia. Pierwsze modele polimerów obciążanych cyklicznie były zaproponowane w pracach (Oldyrev, 1967b; Oldyrev, 1987), które uwzględniały wpływ temperatury samorozgrzania. Modele były oparte na koncepcji funkcji zniszczenia, która zawierała moduły sprężystości dla różnych faz zmęczenia. Model przedstawiony w pracy (Oldyrev, 1967a) opisuje zmęczenie w fazie liniowego przyrostu temperatury samorozgrzania i opiera się na aproksymacji wyników eksperymentalnych. Autorzy pracy (Ratner i Potapova, 1990) zaproponowali model dla kruchych polimerów w oparciu o kinetyczną koncepcję Żurkowa.

W ostatnim dwudziestoleciu powstał szereg modeli zmęczeniowych dla kompozytów polimerowych w oparciu o równania konstytutywne lepkosprężystości. Jednym z prekursorów tych badań był Schapery. W swoich pracach koncentrował się głównie na opisie materiałów liniowo- i nieliniowo-lepkosprężystych (Schapery, 1997), a także na opisie inicjacji i propagacji uszkodzeń w tych materiałach (Schapery, 1999). Oryginalne badania eksperymentalne przedstawiono w pracy (Zhang i Hartwig, 2002), gdzie za kryterium oceny zmęczenia przyjęto energię dyssypacji i zmianę wartości modułów dynamicznych kompozytu polimerowego. Należy wymienić tutaj pracę (Kumar i Talreja, 2003), w której autorzy zaproponowali model zmęczeniowy dla ortotropowych liniowo-lepkosprężystych kompozytów, opierający się na wyznaczeniu degradacji stałych materiałowych. W pracach (Guedes, 2004; Guedes, 2007) autor zaproponował modele zmęczeniowe w oparciu o równania konstytutywne lepkosprężystości z zastosowaniem prawa liniowego przyrostu uszkodzeń. Autorka pracy (Sullivan, 2008) zaproponowała metodę pseudoodkształceń polegającą na linearyzacji równania Volterra-Boltzmana i zastosowała ją do określenia funkcji zniszczenia na podstawie prawa przyrostu uszkodzeń Kaczanowa. Modele probabilistyczne zaproponowane w pracy (Poncelet *i in.*, 2010) opisują niektóre podstawy fizyki zjawiska zmęczenia z uwzględnieniem efektu samorozgrzania, jednak stałe modeli opierają się głównie na wynikach eksperymentów i z tego względu nie mogą być stosowane bez koniecznych testów laboratoryjnych. Model rozwijany przez międzynarodowy zespół naukowców (Fissolo *i in.*, 2009) bazuje na wielkościach fizycznych i częściowo na równaniach konstytutywnych i opisuje zmęczenie kompozytów pod wpływem temperatury. Jednak model ten opisuje zmęczenie jedynie w przypadku ustalonej temperatury, która nie zmienia się w trakcie procesu zmęczenia, nie uwzględnia natomiast efektu samorozgrzania i dynamiki wzrostu temperatury. W pracy przedstawiono obszerny przegląd kryteriów zmęczenia kompozytów pod wpływem podwyższonej temperatury.

Przedstawione modele jednak nie uwzględniają wpływu temperatury samorozgrzania na proces zmęczenia oraz jej związku ze zmianami sztywności i innymi parametrami fizykalnymi procesu.

## 2.6. Występowanie zmęczenia z efektem samorozgrzania w praktyce inżynierskiej

Efekt samorozgrzania intensyfikujący procesy degradacji i zmęczenia laminatów polimerowych może występować w wielu obiektach inżynierskich. Powodem wystąpienia efektu mogą być błędy na etapie projektowania elementów kompozytowych, ale również ich przeciążenie, zmiany częstotliwości wymuszenia, nagła inicjacja uszkodzeń itd. Efekt ten występuje we wszystkich elementach wykonanych z kompozytów polimerowych, które poddawane są cyklicznie powtarzającym się naprężeniom o dostatecznie dużej amplitudzie.

Problem samorozgrzania powstaje m.in. w elementach silników turboodrzutowych, które poddawane są znacznym chwilowym przeciążeniom (Senchenkov i Karnaukhov, 2001). Ze względu na szybką ewolucję procesu efekt samorozgrzania może doprowadzić do degradacji i uszkodzenia tych elementów i dlatego powinno to być uwzględniane na etapie ich projektowania. Nawet w przypadku, gdy temperatura samorozgrzania wzrasta nieznacznie, co nie powoduje poważnych zmian w materiale, istnieje niebezpieczeństwo intensyfikacji rozwoju powstałych uszkodzeń. Problem ten występuje w wentylatorach śmigłowych i łopatkach turbin, w których rozwój mikropęknięć zmęczeniowych jest intensyfikowany poprzez występowanie efektu samorozgrzania (Adzima *i in.*, 2010). Szczegółowy problem związany z efektem samorozgrzania został przedstawiony w pracy (Roos i Bakis, 2011). Kompozytowy wał Cardana napędzający tylne śmigło w helikopterach Blackhawk na skutek drgań rozgrzewa się, co intensyfikuje zmęczenie i degradację materiału. Eliminacja efektu samorozgrzania w takich przypadkach jest niezwykle istotna, gdyż, jak wykazują badania, zmęczenie cieplne przebiega bardzo szybko, co może doprowadzić do awarii podczas lotu. Problem samorozgrzania występuje także w łopatkach turbin wiatrowych, w których w pewnych specyficznych warunkach (np. pod wpływem dużych prędkości wiatru) wymuszane są drgania dla częstotliwości rezonansowych, co intensyfikuje naprężenia i inicjuje efekt samorozgrzania (Fan i Kang, 2009). Warunki cyklicznych obciążeń występują także w przekładniach zębatych. W przypadku elementów współpracujących w przekładniach wykonanych z materiałów z zastosowaniem polimerów może również dochodzić do dyssypacji energii mechanicznej i samorozgrzania. Wyniki pracy (Ramkumar *i in.*, 2010) wskazują, że kompozytowe koła zębate wykorzystywane głównie w robotyce wykazują się efektem samorozgrzania podczas pracy, a podwyższona temperatura jest obserwowana głównie na wieńcach i uzębieniu kół. Autorzy potwierdzają szybki rozwój degradacji w przypadku wystąpienia uszkodzenia i komunikują, że często w tych przypadkach do uszkodzenia dochodzi przed okresem przeglądów i remontów.

Należałoby także wspomnieć o badaniach przeprowadzonych przez Boyarova (Boyarov i Sumarčenkova, 2008; Boyarov, 2010). W swoich pracach zajął się on badaniami wpływu wzrostu temperatury (w tym spowodowanego efektem samorozgrzania) na bezpieczeństwo zbiorników paliwowych i wykazał, że nawet nieznaczny wzrost temperatury może doprowadzić do samozapłonu i eksplozji. Istotność uwzględnienia efektu samorozgrzania w eksploatacji zbiorników do przechowywania metanolu potwierdzają

także autorzy w pracy (Faghri i Guo, 2005). Materiały lepkosprężyste, w tym kompozyty polimerowe, są wykorzystywane do konstruowania stabilizatorów i wibroizolatorów w maszynach. Oczywistym jest fakt, że są one narażone na drgania i wymuszenia cykliczne i z tego powodu na występowanie efektu samorozgrzania. W pracy (de Cazenove *i in.*, 2012) przedstawiono badania symulacyjne i eksperymentalne dotyczące występowania efektu samorozgrzania w wibroizolatorach lepkosprężystych.

Istotne znaczenie efekt samorozgrzania ma w elementach wykonanych z tzw. *kompozytów inteligentnych* zawierających układy pomiarowe i/lub wykonawcze w postaci tzw. piezo-patchy lub warstw piezoelektrycznych zapewniające ciągłe monitorowanie i aktywny wpływ na element w przypadku zmian parametrów pracy lub wystąpienia uszkodzeń (Guz *i in.*, 2012). Ze względu na to, że takie rozwiązania są stosowane w najbardziej odpowiedzialnych urządzeniach inżynierskich, głównie w przemyśle lotniczym i kosmicznym, efekt samorozgrzania powinien być uwzględniany na etapie modelowania zachowania takich elementów.

Coraz szersze wykorzystanie kompozytów polimerowych w przemyśle motoryzacyjnym także skutkuje powstającym problemami z niepożądanymi zjawiskami. Należy wspomnieć o problemie, gdzie efekt samorozgrzania ma znaczenie krytyczne. W układach wtrysku paliwa w silnikach spalinowych są wykorzystywane elementy z kompozytów polimerowych, które pod działaniem cyklicznie zmieniającego się ciśnienia także są narażone na występowanie efektu samorozgrzania, co prowadzi do degradacji samych elementów oraz niebezpieczeństwa wybuchu. Aspekty związane z redukcją jego wpływu zostały przedstawione w pracy (Sonsino i Moosbrugger, 2008).

Laminaty polimerowe znajdują również szerokie zastosowanie w inżynierii biomedycznej i często są stosowane na implanty. W pracy (Satarkar i Hilt, 2008) autorzy przedstawili badania dotyczące implantowanego układu dostarczania leku, elementy którego wykonane są z hydrożelowych kompozytów magnetycznych. Ze względu na charakter pulsacyjny pracy układu jego elementy polimerowe rozpraszają energię mechaniczną w postaci ciepła, a temperatury pracy mogą osiągać nawet do 70°C, co może zagrażać zdrowiu i życiu człowieka.

## 2.7. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono klasyfikację kompozytów pod względem stosowanych materiałów do ich wytwarzania, jak i typów zbrojenia. Przedstawiono przegląd zagadnień mechaniki kompozytów warstwowych w świetle KTL z rozszerzeniem równań konstytutywnych o właściwości cieplne. Następnie przedstawiono modele reologiczne wykorzystywane w opisie laminatów polimerowych w zależności od zakresu ich wykorzystania. Szczególną uwagę przydzielono opisowi zachowania laminatów podczas obciążeń cyklicznych. Pokazano postać opisu materiału liniowo-lepkosprężystego w dziedzinie zespolonej, pozwalającą na linearyzację równań konstytutywnych lepkosprężystości. Występujące w opisie parametry zespolone, szczególnie moduły oraz sztywności zespolone, będą wprowadzone w modelach omawianych w dalszych rozdziałach.

Przedstawiono opis efektu samorozgrzania spowodowanego przebiegiem procesów dysypacji energii mechanicznej oraz przedstawiono wpływ energii dyssypacji na kinetykę reakcji zachodzących przed i podczas przemian w polimerach. Szczegółowo omówiono badania teoretyczne i eksperymentalne w zakresie efektu samorozgrzania oraz jego wpływu na zachowanie mechaniczne laminatów polimerowych.

Sklasyfikowano i zaprezentowano modele zmęczeniowe wykorzystywane do opisu zachowania laminatów polimerowych podczas obciążeń cyklicznych. Przedstawiono modele klasyczne i powszechnie stosowane w przypadku polimerów i laminatów, jak również przedstawiono przegląd dotychczasowych prac w zakresie opisu zmęczeniowego omawianych struktur z uwzględnieniem ich lepkości i efektu samorozgrzania.

Badania literaturowe wykazały, że dotychczas nie zaproponowano modelu zmęczeniowego, który uwzględniałby wpływ temperatury samorozgrzania wraz z procesami termokinetycznymi w strukturze podczas jej przyrostu, i który jednocześnie opierałby się na równaniach konstytutywnych i parametrach fizycznych.



## Rozdział 3

# Problem badawczy

Mając na uwadze stan dotychczasowej wiedzy w zakresie występowania efektu samorozgrzania, a także jego modelowania matematycznego oraz wpływu na procesy zmęczeniowe można dokonać identyfikacji problemu badawczego, określić cel i zakres niniejszej rozprawy, a także sformułować tezy rozprawy.

### 3.1. Identyfikacja problemu badawczego

W oparciu o dotychczasową wiedzę w zakresie modelowania teoretycznego zjawisk zachodzących podczas obciążeń cyklicznych laminatów polimerowych, jak również w zakresie weryfikacji eksperymentalnej rozważań teoretycznych dotyczących laminatów zarówno podczas krótkotrwałych obciążeń dynamicznych, jak i podczas procesów zmęczeniowych, możliwe jest sformułowanie problemu badawczego, dotyczącego próby odpowiedzi na następujące pytania:

- W jaki sposób można zidentyfikować inicjację efektu samorozgrzania laminatu polimerowego podczas obciążeń cyklicznych i jak wyznaczyć wielkość przyrostu temperatury samorozgrzania i jej powierzchniowy rozkład?
- Jak zmieniają się właściwości dynamiczne rozpatrywanych struktur w zależności od częstotliwości wymuszenia, temperatury i innych parametrów?
- Jaki jest charakter przyrostu temperatury samorozgrzania do osiągnięcia stanu ustalonego i co wpływa na kształt charakterystyki przyrostu temperatury w czasie?
- Jak wpływają parametry obciążenia oraz wartość temperatury samorozgrzania na procesy zmęczeniowe zachodzące w laminatach polimerowych?

Do odpowiedzi na powyższe pytania zastosowano zarówno teoretyczne, jak i eksperymentalne narzędzia badawcze.

### 3.2. Cel rozprawy

Celem podjętych badań w niniejszej rozprawie jest propozycja sposobu opisu teoretycznego rozkładu temperatury samorozgrzania podczas obciążeń cyklicznych laminatu polimerowego przy stałych odkształceniach. Ze względu na to, że w opisie matematycznym

efektu samorozgrzania występuje funkcja dynamicznej sztywności stratnej, istnieje potrzeba określenia wpływu parametrów obciążenia laminatu oraz jego interakcji ze środowiskiem, które mają wpływ na wartości ww. funkcji. Stosując odpowiednie metody eksperymentalne można dokonać weryfikacji zaproponowanych modeli teoretycznych oraz oceny charakteru przyrostu temperatury samorozgrzania w różnych warunkach obciążenia. Dodatkowym celem podjętych badań jest określenie wpływu temperatury samorozgrzania na proces zmęczenia laminatów polimerowych, szczególnie zaś określenie warunków inicjacji procesów zmęczeniowych wynikających z mechanicznej i termomechanicznej degradacji struktury. Opracowane modele teoretyczne i metodyka eksperymentalna powinny umożliwiać ocenę przyrostu temperatury samorozgrzania oraz ocenę degradacji laminatów polimerowych zarówno na etapie projektowania elementów kompozytowych, jak i na etapie ich diagnozowania i monitorowania.

### 3.3. Tezy rozprawy

Mając na uwadze zdefiniowany w Rozdziale 3.1 problem badawczy oraz cel przeprowadzonych badań, sformułowano następujące tezy rozprawy:

1. *Istnieje związek pomiędzy energią dyssypacji powstającą podczas obciążeń cyklicznych i charakterystykami mechanicznymi laminatów polimerowych. Określenie zależności pomiędzy ilością generowanego ciepła a stanem odkształceń laminatu pozwoli na ocenę właściwości mechanicznych laminatu podczas obciążeń cyklicznych.*
2. *Opracowany model zmęczenia laminatu polimerowego, wykorzystujący analityczny model rozkładu temperatury samorozgrzania oraz wyniki empiryczne przyrostu temperatury samorozgrzania i zmian sztywności dynamicznej laminatu, umożliwi kompleksową analizę i ocenę trwałości resztkowej laminatu.*



## Rozdział 4

# Modele teoretyczne opisujące efekt samorozgrzania

Jednym z podstawowych celów niniejszej rozprawy było opracowanie modeli teoretycznych opisujących efekt samorozgrzania. W poniższym rozdziale przedstawiono sposób wyznaczania rozkładu temperatury samorozgrzania w stanie ustalonym w niektórych układach jedno- i dwuwymiarowych poddanych prostemu zginaniu podczas obciążeń cyklicznych. W wyniku rozważań teoretycznych zaproponowano trzy modele opisujące efekt samorozgrzania występujący w laminatach polimerowych. Modele były rozwinięte w oparciu o równania konstytutywne termolepkosprężystości z zastosowaniem koncepcji parametrów zespolonych. W wyniku przeprowadzonych prac otrzymano równania rozkładu temperatury samorozgrzania w belce i płycie w postaci analitycznej.

### 4.1. Podstawy teoretyczne i założenia wstępne

W pracy rozpatrywane są układy jedno- (belki) i dwuwymiarowe (płyty) wykonane z  $k$ -warstwowego laminatu polimerowego. Zakłada się, że własności belki są opisane wg formalizmu Timoshenko, a płyty w świetle hipotez Kirchhoffa-Love'a. Rozpatrywane układy posiadają strukturę warstwową opisaną wg KTL (Rozdział 2.2), gdzie każda warstwa laminatu jest transwersalnie izotropowa, tj. posiada cztery niezależne stałe materiałowe (2.2). Warstwy w laminacie mogą być zorientowane niezgodnie z globalnym układem współrzędnych i obrócone o kąt  $\zeta$ . Stosując (2.4) można sprowadzić lokalne układy współrzędnych warstw do globalnego układu współrzędnych laminatu, przy czym laminat nadal zachowuje właściwości transwersalnej izotropii.

Istnieje potrzeba wprowadzenia homogenizacji laminatu z uwagi na dalszy opis teoretyczny oraz wyniki eksperymentalne przedstawiające sztywność laminatu nie jako składowe macierzy  $\mathbf{D}$  (2.15), a jako wartość skalarną. Podobnie sztywność dynamiczna i jej składowe w DMA są otrzymywane również jako wartości skalarne. Po pewnych przekształceniach, uwzględniając (2.15) i (2.4), zhomogenizowana postać sztywności lami-

natu może być przedstawiona równaniem (Katunin, 2009b):

$$D = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left[ \cos^2 \zeta_k \sin^2 \zeta_k \left( E_1 + E_2 \nu_{21} (22 + \nu_{21}) - \frac{48G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) + \right. \\ \left. + \cos^4 \zeta_k \left( E_1 + E_2 + \frac{G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) + \sin^4 \zeta_k \left( E_1 + E_2 - \frac{G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) \right]. \quad (4.1)$$

Przeprowadzone badania weryfikacyjne przedstawione w pracy (Katunin, 2009c) miały na celu określenie błędu zaproponowanego równania homogenizacji na podstawie porównania częstotliwości własnych płyt kołowych utwierdzonych na brzegu wykonanych z laminatu polimerowego. Porównywane były wyniki teoretyczne uzyskane na podstawie (4.1) z wynikami z symulacji MES z bardzo gęstą siatką elementów skończonych. Wyniki analizy porównawczej wykazały zależność błędu od liczby warstw, błąd ten nie przekroczył 5.5% dla rozpatrzonego przypadku granicznego (36 warstw).

Rozpatrując laminat obciążany cyklicznie należy wprowadzić zależności opisujące jego naturę lepkosprężystą. Przy założeniu liniowej lepkosprężystości i uwzględnieniu zależności od temperatury zachowanie laminatu może być opisane zgodnie z zasadą superpozycji Boltzmanna (por. (Dinzart *i in.*, 2008)):

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)D_0(\theta) - \int_0^t \varepsilon(t')R(t-t', \theta) dt', \quad (4.2)$$

gdzie  $D_0(\theta)$  jest natychmiastową sztywnością zależną od temperatury. Ze względu na małe fluktuacje temperatury w granicach jednego cyklu w dalszych rozważaniach przyjmuje się wartość temperatury uśrednioną w cyklu:

$$\bar{\theta} = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \theta(t) dt. \quad (4.3)$$

Ze względu na występujące sprzężenie termomechaniczne w rozpatrywanym zagadnieniu istnieje potrzeba wprowadzenia założeń dotyczących przewodzenia ciepła. W ogólnym przypadku równanie przewodnictwa cieplnego dla rozpatrywanego zagadnienia może być przedstawione następująco (Majchrzak, 2001):

$$c(\theta)\rho(\theta)\frac{\partial\theta(t)}{\partial t} - \nabla \cdot [\lambda(\theta)\nabla\theta(t)] = Q_d(t), \quad (4.4)$$

gdzie jako funkcja źródła występuje funkcja energii dyssypacji. Zakłada się, że  $Q_d$  jest źródłem ciepła w każdym punkcie rozpatrywanego układu. Równanie (4.4) przedstawia stan nieustalony przewodnictwa cieplnego i z uwagi na zależność  $Q_d$  od czasu nie może być rozwiązane analitycznie. Jednak możliwe jest rozwiązanie powyższego równania dla stanu ustalonego, co daje możliwość wyznaczenia rozkładu temperatury samorozgrzania w etapie końcowym jej przyrostu. Przy założeniu niezależności stałych termomechanicznych od temperatury (ze względu na duże trudności wyznaczenia tych zależności na drodze eksperymentalnej) równanie (4.4) redukuje się do postaci:

$$-\lambda\nabla^2\theta = Q_d. \quad (4.5)$$

W przypadku ustalonego przewodnictwa ciepła  $Q_d$  jest niezależna od czasu.

W dalszej części rozdziału będą przedstawione trzy modele opisu matematycznego rozkładu temperatury samorozgrzania przedstawione w pracach (Katunin, 2009b; Katunin, 2010a; Katunin, 2011c). Modele przedstawione w tych pracach były wynikiem wcześniejszych rozważań zaprezentowanych w (Katunin i Moczulski, 2008; Katunin i Moczulski, 2009a; Katunin, 2009a; Katunin i Moczulski, 2009b; Katunin, 2010d).

## 4.2. Efekt samorozgrzania w belce obciążonej cyklicznie

Rozpatrywana jest  $k$ -warstwowa belka z laminatu polimerowego o długości  $l$  i grubości  $h$  podparta obustronnie. Warunki brzegowe w tym przypadku mają postać:

$$w(0, t) = 0, w(x, t) = 0, D \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -P(t), \quad (4.6)$$

gdzie

$$P(t) = P_0 \sin \omega t, \quad (4.7)$$

$P_0$  jest siłą statyczną. Ponieważ rozpatrywany układ jest układem jednowymiarowym, tensor naprężeń

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}^K, \quad (4.8)$$

może być zredukowany do postaci:

$$\sigma_{11} = \frac{3}{2} s_{11}. \quad (4.9)$$

Biorąc pod uwagę (4.1) i (4.2)  $s_{11}$  można przedstawić w postaci (por. (Dinzart *i in.*, 2008)):

$$s_{11} = 2D_0(\bar{\theta})\varepsilon_{11} + 2 \int_0^t D(t-t', \bar{\theta}) \frac{d\varepsilon_{11}}{dt'} dt'. \quad (4.10)$$

Uwzględniając (4.7), odkształcenia przy obciążeniach cyklicznych można przedstawić jako:

$$\varepsilon_{11}(x, t) = \frac{2w(x)}{h} (\varepsilon_s + \varepsilon_0 \sin \omega t), \quad (4.11)$$

gdzie  $\varepsilon_s$  jest odkształceniem statycznym na podstawie warunków kinematycznych. Po podstawieniu (4.11) do (4.10) otrzymamy:

$$s_{11}(x, t) = \frac{4w(x)}{h} (D_0(\bar{\theta})\varepsilon_s + D'(\omega, \bar{\theta})\varepsilon_0 \sin \omega t + D''(\omega, \bar{\theta})\varepsilon_0 \cos \omega t). \quad (4.12)$$

Mając na uwadze założenie (4.3) można przedstawić równanie energii dyssypowanej:

$$Q_d = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sigma_{11} \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} dt. \quad (4.13)$$

Podstawiając (4.12) do (4.9), a otrzymane wyrażenie do (4.13) otrzymujemy:

$$Q_d(x) = \frac{6\omega\varepsilon_0^2 w^2(x) D''(\omega, \bar{\theta})}{h^2}. \quad (4.14)$$

Powyższa funkcja opisuje dyssypację energii mechanicznej. Dla wyznaczenia rozkładu temperatury samorozgrzania (4.14) przyjmowana jest jako funkcja źródła w równaniu przewodzenia ciepła. Rozpatrywany przypadek jednowymiarowy przewodzenia ciepła pozwala przedstawić (4.5) w postaci:

$$-\lambda \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x)}{\partial x^2} = Q_d(x). \quad (4.15)$$

Przy rozwiązaniu (4.15) powinny być przyjęte termiczne warunki brzegowe w celu uwzględnienia konwekcji energii cieplnej do środowiska:

$$-\lambda \frac{d\bar{\theta}(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\lambda \frac{d\bar{\theta}(x)}{dx} \Big|_{x=\pm \frac{h}{2}} = \alpha (\bar{\theta}(x) - \theta_0), \quad x \in (0, l), \quad (4.16)$$

Rozwiązując (4.15) przy uwzględnieniu (4.16) otrzymamy:

$$\theta(x) = \frac{\omega\varepsilon_0^2 w^2(x) D''(\omega, \bar{\theta}) x}{h\lambda} \left( \frac{3}{2} - \frac{3x}{h} \right) - \frac{2x}{h} (\theta_0 - \alpha\bar{\theta} + \alpha\theta_0) + \theta_0. \quad (4.17)$$

Powyższe równanie przedstawia rozkład temperatury samorozgrzania w stanie ustalonym dla przypadku jednowymiarowego. Jednak, zmieniając warunki brzegowe (4.6) na inne konfiguracje (patrz np. (Niezgodziński i Niezgodziński, 1996; Young i Budy nas, 2002)), można uzyskać rozkład temperatury samorozgrzania stosując algorytm przedstawiony powyżej.

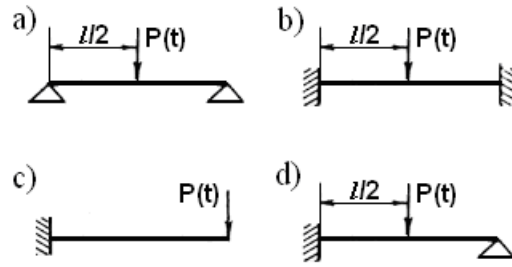
### 4.3. Efekt samorozgrzania w płycie obciążonej cyklicznie

Rozpatrzono  $k$ -warstwową płytę prostokątną o długości  $l$  i szerokości  $b$  o układzie warstw pozwalającym do sprowadzenia płyty do opisu transwersalnej izotropii w świetle KTL, która obciążona jest cyklicznie siłą  $P(t)$ . Płyta poddana jest prostemu zginaniu, co umożliwia rozpatrzenie czterech kombinacji warunków brzegowych:

$$w(0, y, t) = 0, \quad w(l, y, t) = 0, \quad D \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -P(t), \quad (4.18)$$

$$w(0, y, t) = 0, \quad w(l, y, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=0, x=l}, \quad D \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -P(t), \quad (4.19)$$

$$w(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad D \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = -P(t), \quad (4.20)$$



Rys. 4.1: Rozpatrywane przypadki mechanicznych warunków brzegowych płyty

$$w(0, y, t) = 0, w(l, y, t) = 0, \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, D \left. \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l/2} = -P(t), \quad (4.21)$$

gdzie  $P(t)$  przedstawia wzór (4.7). Graficzna interpretacja warunków brzegowych jest przedstawiona na Rys.4.1, gdzie kolejnymi literami oznaczono przypadek płyty obustronnie podpartej, obustronnie utwierdzonej, wspornikowej oraz jednostronnie podpartej i jednostronnie utwierdzonej.

Z uwagi na rozpatrywane przypadki prostego zginania płyt można przyjąć, że tensor naprężeń może być przedstawiony, jak powyżej, wzorem (4.9). Odkształcenia płyt mogą być przedstawione jako iloczyn ugięć maksymalnych  $\varepsilon_{\max}$  zgodnie z (Niezgodziński i Niezgodziński, 1996) oraz funkcji ugięcia  $w(x, y)$  na podstawie (Leissa, 1969) dla danego przypadku warunków brzegowych. Uwzględniając (4.7) otrzymamy:

$$\varepsilon(x, y, t) = \varepsilon_{\max} w(x, y) \sin \omega t, \quad (4.22)$$

gdzie dla warunków brzegowych (4.18)-(4.21) ugięcia maksymalne i funkcje ugięcia wynoszą odpowiednio:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{48D}, w(x, y) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{192D}, w(x, y) = \cos \frac{2\pi x}{l} - 1, \quad (4.24)$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{3D}, w(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2l} - 1, \quad (4.25)$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{7Pl^3}{768D}, w(x, y) = \cos \frac{3\pi x}{2l} - \cos \frac{\pi x}{2l}. \quad (4.26)$$

Funkcja dyssypacji wyznaczona ze wzoru (4.13) przyjmuje postać

$$Q_d(x, y) = \frac{3}{2} \omega \varepsilon_{\max}^2 w^2(x, y) D''(\omega, \bar{\theta}). \quad (4.27)$$

Równanie przewodzenia ciepła w stanie ustalonym ma postać:

$$-\lambda \left( \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x, y)}{\partial y^2} \right) = Q_d(x, y) \quad (4.28)$$

Termiczne warunki brzegowe dla przypadku dwuwymiarowego przewodzenia ciepła przyjmują postać:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial \bar{\theta}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0, x=l} &= \alpha (\bar{\theta}(x) - \theta_0), & y \in (0, b), \\ -\lambda \frac{\partial \bar{\theta}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, y=b} &= \alpha (\bar{\theta}(x) - \theta_0), & x \in (0, l). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Jednym ze sposobów rozwiązania równania (4.28) jest metoda szeregów Fouriera, która daje możliwość przedstawienia rozwiązania w postaci nieskończonych szeregów trygonometrycznych. W przypadku rozważanego zagadnienia obserwowana jest symetria w (4.29) względem płaszczyzn  $x = l/2$  oraz  $y = b/2$ , zatem poszukiwana funkcja  $\Delta \bar{\theta}(x, y)$  jest parzysta względem  $x$  i  $y$ . Dlatego funkcja ta może być rozwinięta w szereg trygonometryczny jedynie przy pomocy cosinusów (Kącki, 1989):

$$\Delta \bar{\theta}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \tilde{M}_m x \cos \tilde{N}_n y. \quad (4.30)$$

Z (4.29) można wyznaczyć  $\tilde{M}_m$  i  $\tilde{N}_n$  jako

$$\tilde{M}_m = \frac{\mu_m}{l}, \tilde{N}_n = \frac{\gamma_n}{b}, \mu_m, \gamma_n > 0, \quad (4.31)$$

gdzie  $\mu_m$  i  $\gamma_n$  są kolejnymi pierwiastkami równań:

$$\mu_m \tan \mu_m = \alpha l, \gamma_n \tan \gamma_n = \alpha b, \quad (4.32)$$

stabelaryzowane wartości których można znaleźć np. w (Galicyn i Žukovskij, 1976). Po uwzględnieniu (4.31) równanie (4.30) przyjmuje postać:

$$\Delta \bar{\theta}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{\mu_m x}{l} \cos \frac{\gamma_n y}{b}. \quad (4.33)$$

Współczynniki  $A_{mn}$  należy dobrać w ten sposób, aby funkcja (4.33) spełniała równanie (4.28). Można tego dokonać wyznaczając drugie pochodne funkcji (4.33), a następnie podstawiając wynik do (4.28). Z otrzymanego równania ograniczonego przedziałami zmiennych  $x \in (0, l), y \in (0, b)$  można wyznaczyć współczynniki  $A_{mn}$ :

$$A_{mn} = \frac{4Q_d(x, y)}{\lambda} \frac{\sin \mu_m \sin \gamma_n}{\mu_m \gamma_n (1 + \operatorname{sinc} 2\mu_m) (1 + \operatorname{sinc} 2\gamma_n) (\xi_m^2 + \xi_n^2)}, \quad (4.34)$$

gdzie  $\xi_m = \mu_m l^{-1}$ ,  $\xi_n = \gamma_n b^{-1}$ . Podstawiając (4.34) do (4.33) można otrzymać:

$$\bar{\theta}(x, y) = \frac{4Q_d(x, y)}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinc} \mu_m \operatorname{sinc} \gamma_n \cos \xi_m x \cos \xi_n y}{\mu_m \gamma_n (1 + \operatorname{sinc} 2\mu_m) (1 + \operatorname{sinc} 2\gamma_n) (\xi_m^2 + \xi_n^2)} + \theta_0. \quad (4.35)$$

Powyższe równanie opisuje rozkład temperatury w stanie ustalonym na powierzchni płyty.

## 4.4. Efekt samorozgrzania w płycie przy drganiach rezonansowych

Rozpatrzono płytę prostokątną z laminatu polimerowego o takich samych parametrach i warunkach obciążenia jak w Rozdziale 4.3 oraz możliwych warunkach brzegowych podanych wzorami (4.18)-(4.21).

Aby rozpatrywać drgania płyty należy wprowadzić równanie ruchu poprzecznego płyty prostokątnej w dziedzinie częstotliwości w postaci:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4.36)$$

gdzie momenty są przedstawione wyrażeniami:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D^*(\omega, \theta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu^*(\omega, \theta) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D^*(\omega, \theta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu^*(\omega, \theta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{12} &= -D^*(\omega, \theta) (1 - \nu^*(\omega, \theta)) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ze względu na nieznaczną zmienność  $\nu^*(\omega, \theta)$  w zależności od parametrów przyjmuje się, że  $\nu^*(\omega, \theta) = \text{const}$ . Przemieszczenia poprzeczne mogą być zdefiniowane następująco:

$$w(x, y, t) = w^*(x, y, \omega, \theta) \exp(i\omega t). \quad (4.38)$$

Na podstawie równania ruchu (4.36) oraz biorąc pod uwagę (4.38), określić można równanie równowagi dla rozpatrywanej płyty w dziedzinie częstotliwości:

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} - \frac{\rho h \omega^2}{D^*(\omega, \theta)} w^* = 0. \quad (4.39)$$

Zgodnie z metodą Warburtona przedstawioną w (Leissa, 1969) rozwiązanie równania (4.39) przy uwzględnieniu warunków brzegowych np. dla płyty utwierdzonej obustronnie (Rys.4.1b):

$$\begin{aligned} w^* \Big|_{x=0, x=l} &= 0, \quad \frac{\partial w^*}{\partial x} \Big|_{x=0, x=l} = 0, \\ -D^*(\omega, \theta) \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0, y=b} &= 0 \\ -D^*(\omega, \theta) \left( \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} \right) \Big|_{y=0, y=b} &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

może być przedstawione w postaci rozłącznych funkcji belkowych przedstawiających postacie drgań:

$$W_{mn}(x, y, t) = w^*(x, y, \omega, \theta) A_{mn} X_n(x) Y_m(y) \exp(i\omega t), \quad (4.41)$$

gdzie

$$X_n = \bar{X}_n \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right), \quad (4.42)$$

$$\bar{X}_n = \begin{cases} \cos \xi_{n+1}^{(1)} + \cosh \xi_{n+1}^{(1)} \frac{\sin(\xi_{n+1}^{(1)}/2)}{\sinh(\xi_{n+1}^{(1)}/2)} & \text{dla nieparzystych } n, \\ \sin \xi_{n+1}^{(2)} - \sinh \xi_{n+1}^{(2)} \frac{\sin(\xi_{n+1}^{(1)}/2)}{\sinh(\xi_{n+1}^{(1)}/2)} & \text{dla parzystych } n. \end{cases} \quad (4.43)$$

Współczynniki  $\xi^{(i)}$  mogą być wyznaczone jako ich kolejne pierwiastki równań:

$$\tan \frac{\xi_n^{(1)}}{2} + \tanh \frac{\xi_n^{(1)}}{2} = 0, \quad \tan \frac{\xi_n^{(2)}}{2} - \tanh \frac{\xi_n^{(2)}}{2} = 0. \quad (4.44)$$

Krawędzie płyty w kierunku osi  $y$  są utwierdzone (patrz (4.40)), dlatego funkcja belkowa w tym kierunku przyjmuje postać:

$$Y_1(y) = 1 - \frac{2y}{b}. \quad (4.45)$$

W celu wyznaczenia częstotliwości rezonansowych drgań płyty wprowadzono równanie częstotliwościowe zbudowane na podstawie metody Rayleigha-Ritza. Metoda opiera się na superpozycji energetycznej pomiędzy wartościami maksymalnymi energii kinetycznej i potencjalnej:

$$U_{\max} - T_{\max} = 0. \quad (4.46)$$

Dla rozpatrywanego przypadku wzory na energię kinetyczną i potencjalną można zapisać następująco:

$$T = \int_0^l \int_0^b \frac{1}{2} \rho h \left( \frac{\partial w^*}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (4.47)$$

$$U = \int_0^l \int_0^b D^*(\omega, \theta) \left[ \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (4.48)$$

a ich wartości maksymalne przyjmują postać:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^l \int_0^b W^2 dx dy, \quad (4.49)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} D^*(\omega, \theta) \int_0^l \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (4.50)$$



Podstawiając (4.49) oraz (4.50) do (4.46) można otrzymać wzór na wyznaczenie częstotliwości rezonansowych:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi p_{mn} D^*(\omega, \theta)}{\rho l^4}, \quad (4.51)$$

gdzie

$$p_{mn}^2 = G_n^4 + G_m^4 \left(\frac{l}{b}\right)^4 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 [\nu H_n H_m + (1 - \nu) J_n J_m]. \quad (4.52)$$

Współczynniki  $G$ ,  $H$  i  $J$  można znaleźć w (Leissa, 1969) dla odpowiednich warunków brzegowych.

Mając wzór na częstotliwości rezonansowe drgań płyty (4.51) można wyznaczyć energię dyssypacji. Zatem wzór (4.27) przyjmuje postać:

$$Q_d(x, y) = \frac{3}{2} \omega_{mn} \varepsilon_{\max}^2 W_{mn}^2(x, y) D''(\omega_{mn}, \bar{\theta}). \quad (4.53)$$

Podstawiając (4.53) do równania przewodzenia ciepła (4.28) i uwzględniając termiczne warunki brzegowe (4.29) można wyznaczyć rozkład temperatury samorozgrzania w stanie ustalonym stosując aparat matematyczny przedstawiony w Rozdziale 4.3.

## 4.5. Podsumowanie

Przedmiotem rozważań w rozdziale były wyniki prac teoretycznych autora w zakresie modelowania matematycznego efektu samorozgrzania w stanie ustalonym belce i płycie przy różnych warunkach obciążenia. Wyróżniono trzy modele opisujące zjawisko: model belki określający rozkład temperatury w laminacie na grubości, model płyty określający pole temperatury na powierzchni przy wymuszeniach cyklicznych oraz model płyty określający pole temperatury samorozgrzania przy wymuszeniu z częstotliwościami rezonansowymi. W modelach przedstawiono algorytmy wyznaczenia funkcji dyssypacji energii mechanicznej dla każdego rozpatrywanego przypadku. Funkcja dyssypacji jest podstawiana do równania przewodzenia ciepła jako funkcja źródła. Po rozwiązaniu równania z uwzględnieniem konwekcji (warunek brzegowy III rodzaju) można wyznaczyć rozkłady temperatury samorozgrzania.

Jedynymi nieznanymi parametrami we wszystkich przedstawionych modelach są moduły dynamiczne zależne od częstotliwości wymuszenia oraz temperatury. Wyznaczenie ich wartości oraz zależności funkcyjnych jest przedmiotem kolejnego rozdziału, gdzie wyznaczono je w drodze eksperymentu.

Modele przedstawione w niniejszym rozdziale zostały zweryfikowane eksperymentalnie. Wyniki otrzymane na podstawie zależności teoretycznych oraz wyniki eksperymentalne zestawiono i porównano w Rozdziale 6.



## Rozdział 5

# Relacje termokinetyczne i charakterystyki dynamiczne laminatu

W niniejszym rozdziale przedstawiono badania eksperymentalne parametrów dynamicznych występujących w modelach przedstawionych w Rozdziale 4. Parametry te stanowią dynamiczne stałe materiałowe badanego laminatu, dlatego istnieje potrzeba wyznaczenia ich wartości i zależności funkcyjnych w celu wyznaczenia wynikowych rozkładów temperatury samorozgrzania oraz ich porównania z wynikami eksperymentalnymi. W rozdziale są przedstawione wyniki statycznych badań wytrzymałościowych niezbędnych do weryfikacji sprężystych stałych materiałowych laminatu, a następnie wyniki dynamicznych analiz termomechanicznych, z których wyznaczono zależności funkcyjne parametrów dynamicznych od zmian częstotliwości obciążenia, temperatury oraz prędkości grzania. Wyniki cząstkowe w zakresie przeprowadzonych badań dynamicznych przedstawiono w pracach (Katunin *i in.*, 2010; Katunin i Gnatowski, 2012).

### 5.1. Podstawy teoretyczne

Wartości parametrów dynamicznych, takich jak moduł zespolony i jego składowe, tangens kąta przesunięcia fazowego itd., zależą przede wszystkim od charakterystycznych temperatur. W przypadku prowadzonych badań jest to temperatura zeszklenia. Do pomiaru wartości temperatury zeszklenia są wykorzystywane różne metody i aparatura badawcza, takie jak DSC (Sobczak *i in.*, 2002; Caban *i in.*, 2007), TGA, DMA/DMTA/DMS (wymienione nazwy są wzajemnie zamienne, w dalszej części pracy używa się nazwy DMA). Jednak do pomiaru parametrów dynamicznych, oprócz temperatury zeszklenia, wykorzystywany jest najczęściej DMA ze względu na stosunkową prostotę przeprowadzenia eksperymentów oraz wysoką dokładność otrzymywanych wyników. Alternatywą dla DMA są testy dynamicznej relaksacji naprężeń i pełzania dynamicznego, gdzie znając wartości modułów statycznych oraz częstotliwość wymuszenia można wyznaczyć wartości parametrów dynamicznych materiału. Wymaga to przeprowadzenia dużej liczby eksperymentów przy różnych częstotliwościach wymuszenia w celu uzyskania widma czasów relaksacji, które przedstawia zbiór wartości czasu relaksacji generowanych przez poszcze-

gólne elementy modelu reologicznego.

DMA jest kombinacją analizy reologicznej i termicznej, która daje możliwość pomiaru właściwości termomechanicznych materiału podczas obciążeń dynamicznych. Urządzenie DMA posiada szereg programów pomiarowych: czasowo-temperaturowe lub częstotliwościowo-temperaturowe zależności wrażliwości parametrów dynamicznych, pełzanie i relaksacja naprężeń, testy przy stałych lub skokowo-zmiennych odkształceniach, skokowo zmiennych częstotliwościach (ang. *multi-frequency test*), a także daje możliwość wyznaczenia temperatur  $\alpha$ -,  $\beta$ - i  $\gamma$ -przemian dzięki szerokiemu zakresowi temperatury w komorze termicznej (zazwyczaj  $-150 \div 600^\circ\text{C}$ ), co pozwala na jego zastosowanie do szerokiej grupy materiałów (*2980 Dynamic Mechanical Analyzer Operator's Manual*, 1997).

W zależności od badanego zakresu temperatur zachowanie materiałów jest opisywane przy pomocy różnych zasad. W przypadku badań prowadzonych w zakresie temperatur nie przekraczających  $\theta_g$  obowiązuje zasada kinetyczna Arrheniusa, która może być przedstawiona w postaci:

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{E_a}{R\theta_r}\right), f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (5.1)$$

gdzie, w tym przypadku,  $\theta_r = \theta_g$ . Modyfikując równanie (5.1) do postaci:

$$\log a_\theta = \frac{E_a \log e}{R} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_r}\right). \quad (5.2)$$

można wyznaczyć współczynniki przesunięcia poziomego dla poszczególnych częstotliwości wymuszenia (Scarborough *i in.*, 2008), co w przypadku materiałów liniowo-lepkosprężystych daje możliwość zastosowania zasady TTS.

Zasada TTS opiera się na empirycznych obserwacjach lepkosprężystego zachowania polimerów przy różnych temperaturach. Ferry zauważył (Ferry, 1980), że zachowanie materiału liniowo-lepkosprężystego przy temperaturze  $\theta_r$  może być odniesione do opisu zachowania tego materiału przy innej temperaturze  $\theta$ , jeśli zmieni się odpowiednio czas eksperymentu lub skalę częstotliwości, czyli wartość danego parametru dynamicznego przy temperaturze  $\theta_r$  wymuszanego przy częstotliwości  $f$  jest równoważna wartości tego parametru przy temperaturze  $\theta$  i częstotliwości  $a_\theta f$ :

$$\cdot(f, \theta) = \cdot(a_\theta f, \theta_r). \quad (5.3)$$

W przypadku, gdy zakres badanych temperatur znajduje się powyżej  $\theta_g$  obowiązuje hipoteza WLF (Ferry, 1980):

$$\log a_\theta = -\frac{C_1(\theta - \theta_r)}{C_2 + (\theta - \theta_r)}, \quad (5.4)$$

gdzie stałe  $C_1$  i  $C_2$  są wyznaczone na podstawie interpolacji otrzymanych wyników eksperymentalnych i dla większości polimerów przyjmują wartości  $C_1 = 17.44^\circ\text{C}$  i  $C_2 = 51.6^\circ\text{C}$ . Ze względu na znaczny spadek własności wytrzymałościowych badanego laminatu po przekroczeniu  $\theta_g$  opis zachowania w tym zakresie nie będzie brany pod uwagę, ponieważ laminat w takim stanie jest nieprzydatny do zastosowań konstrukcyjnych.

W niektórych przypadkach stosowany jest również współczynnik przesunięcia pionowego, opisujący zmiany rozszerzalności cieplnej materiału przy zmianach temperatury:

$$b_{\theta} = \frac{\rho_r \theta_r}{\rho \theta}, \quad (5.5)$$

przedstawiający odwrotnie proporcjonalną zależność pomiędzy gęstością przy temperaturze odniesienia do gęstości przy innej temperaturze. Jednak przy praktycznych pomiarach  $b_{\theta}$  zmienia się w bardzo małym zakresie, który nieznacznie przekracza zakres dokładności aparatury pomiarowej. Poza tym  $b_{\theta}$  ma słabą weryfikowalność teoretyczną (Dealy i Larson, 2006) i z tych względów jest często pomijany przy tego typu analizach.

Innym istotnym parametrem, którego wartości mają wpływ na  $\theta_g$  oraz wartości parametrów dynamicznych, jest prędkość grzania  $\beta = d\theta/dt$ . Norma EN-ISO 6721-1:2002 zaleca przyjmowanie wartości prędkości grzania podczas testów DMA równej 3°C/min, jednak często jest przyjmowana wartość 2°C/min i mniejsza, gdyż wysoka wartość prędkości grzania inicjuje proces sieciowania w polimerze (Urbaniak i Grudziński, 2006). Autorzy pracy (Goertzen i Kessler, 2007; Li, 2000) wykazali, że prędkość grzania może mieć znacznie większy wpływ na  $\theta_g$  i parametry dynamiczne, niż częstotliwość wymuszenia. W badaniach dotyczących efektu samorozgrzania prędkość grzania może być znacznie wyższa od 3°C/min, dlatego istnieje potrzeba zbadania wpływu prędkości grzania na wartości mierzonych parametrów.

Wpływ prędkości grzania może być wyjaśniony przez dominowanie procesów dyfuzji termicznej i materiałowej podczas testów (Flynn, 1990). Badania dotyczące wpływu prędkości grzania na właściwości polimerów były prowadzone przez nielicznych autorów. Proponowane modele zależności  $\theta_g$  od  $\beta$  różnią się. Autorzy pracy (Criado *i in.*, 2003) zaproponowali liniową zależność, a np. autorzy prac (Alves i Mano, 2000; Alves *i in.*, 2003) zależność opartą na wielomianach 3. stopnia. Co więcej, w zależności od badanych materiałów istnieje potrzeba wyznaczenia tej zależności dla badanego laminatu. Pomiary  $\theta_g$  przy zwiększającej się prędkości grzania mogą być nieznacznie zakłócone (Li, 2000). Zakłócenie wynika z bezwładności cieplnej w komorze termicznej urządzenia DMA.

Na podstawie skanów temperaturowych i współczynników przesunięcia poziomego można skonstruować krzywe wiodące. Konstrukcja krzywych polega na przejściu z dziedziny temperatury do dziedziny częstotliwości oraz na przemnożeniu wartości danego parametru dynamicznego przez współczynniki  $a_{\theta}$  odpowiadające poszczególnym temperaturom. Daje to możliwość przedstawienia zależności danego parametru dynamicznego od częstotliwości wymuszenia i temperatury przy pomocy jednej krzywej.

## 5.2. Przygotowanie i realizacja eksperymentów

W niniejszym podrozdziale przedstawiono proces przygotowania próbek do badań, ich własności materiałowe i geometryczne oraz wyniki statycznych testów weryfikacyjnych. Następnie opisana jest metodologia badań, aparatura badawcza oraz etapy przeprowadzenia eksperymentów.

### 5.2.1. Przygotowanie próbek

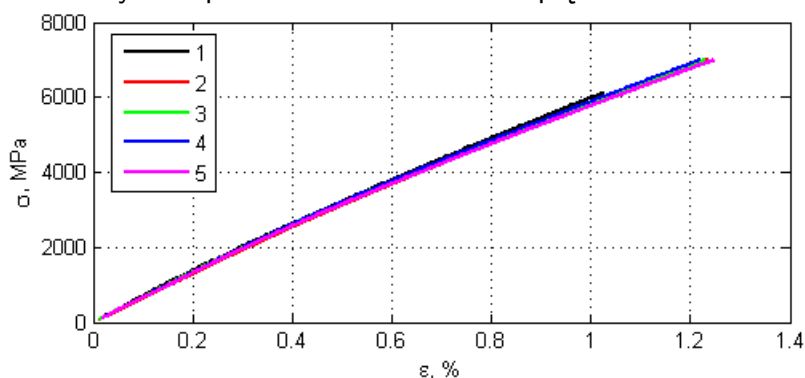
Laminat polimerowy na bazie żywicy epoksydowej zbrojonego jednokierunkowo włóknem szklanym został wykonany w postaci płyt  $1000 \times 1000$  mm przez Zakłady Tworzyw Sztucznych Izo-Erg S.A. w Gliwicach. Laminat typu TSE-2 (EPGC201 wg IEC893, Hgw2372 wg DIN 7735, G-10 wg NEMA) charakteryzuje się temperaturą pracy  $130^{\circ}\text{C}$  (przy danej temperaturze właściwości mechaniczne nie mogą obniżyć się więcej niż o 50%) i jest wykorzystywany do zastosowań konstrukcyjnych i izolacyjnych (Zak, 2008), został wykonany zgodnie z Europejską Normą EN 60893-3-2. Żywica epoksydowa była otrzymana z dwóch prepolimerów: BPA i TBBA. Zbrojenie w postaci tkaniny z włókna szklanego o splocie płóciennym i gramaturze  $200 \text{ g/m}^2$  zostało zaimpregnowane w powlekarce z roztworem prepolimerów w acetonie i suszone w suchym gorącym powietrzu. Płyty z laminatu składające się z 14 warstw o grubości  $2.5 \pm 0.2$  mm były wykonane w prasie hydraulicznej. Próbki do badań były wycięte z wytworzonych płyt na przecinarce.

### 5.2.2. Statyczne testy weryfikacyjne

W celu weryfikacji podstawowych własności mechanicznych badanego laminatu pod kątem spełnienia wymogów obowiązujących wg normy EN 60893-3-2 przeprowadzono testy statyczne w trzech różnych modyfikacjach: wyznaczenie modułu Younga w statycznej próbie rozciągania, określenie wytrzymałości na rozciąganie i maksymalnej siły zrywania oraz określenie własności wytrzymałościowych w statycznej próbie trójpunktowego zginania. Testy były przeprowadzone na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej ZWICK SMZ050/TH3S z użyciem wideoekstensometru CCD.

#### Statyczna próba rozciągania

Test rozciągania był przeprowadzony dla pięciu próbek zgodnie z zaleceniami normy PN-EN ISO 527-4. Rys.5.1 przedstawia zależności naprężeń i odkształceń wywołanych



Rys. 5.1: Zależności odkształceń od naprężeń w próbie rozciągania

rozciąganiem dla poszczególnych próbek. Charakterystyczne wymiary próbek oraz wyznaczone wartości modułu Younga zostały zestawione w Tabeli 5.1.

Jak można zauważyć, zależność odkształceń od naprężeń wykazuje nieznaczne odchylenie od liniowego trendu, co jest spowodowane uplastycznieniem próbek w miejscach

Tab. 5.1: Wartości modułu Younga w statycznej próbie rozciągania

Nr próbki	$b$ , mm	$h$ , mm	$E^+$ , MPa
1	2.300	10.200	29607.946
2	2.300	10.200	27679.622
3	2.300	10.200	28486.558
4	2.300	10.200	28521.905
5	2.300	10.200	28203.193
Średnia	2.300	10.200	28499.845
Odch. stand.	0.000	0.000	705.216

koncentracji naprężeń w wyniku odpowiedzi lepkosprężystej. Podobne zachowanie kompozytów polimerowych zbrojonych różnym typem włókna zaobserwowano i przedstawiono w pracy (Hebda, 2006).

### Statyczna próba zrywania

Próba zrywania została przeprowadzona dla pięciu próbek zgodnie z wymaganiami normy EN ISO 527-1. Zarejestrowano wytrzymałość na rozciąganie oraz maksymalną siłę przy zrywaniu. Próby przeprowadzono przy prędkości rozciągania 1 mm/min, grubość próbek wynosiła 2.39 mm, a szerokość 10.2 mm. Wyniki prób zostały przedstawione w Tabeli 5.2 oraz na Rys.5.2.

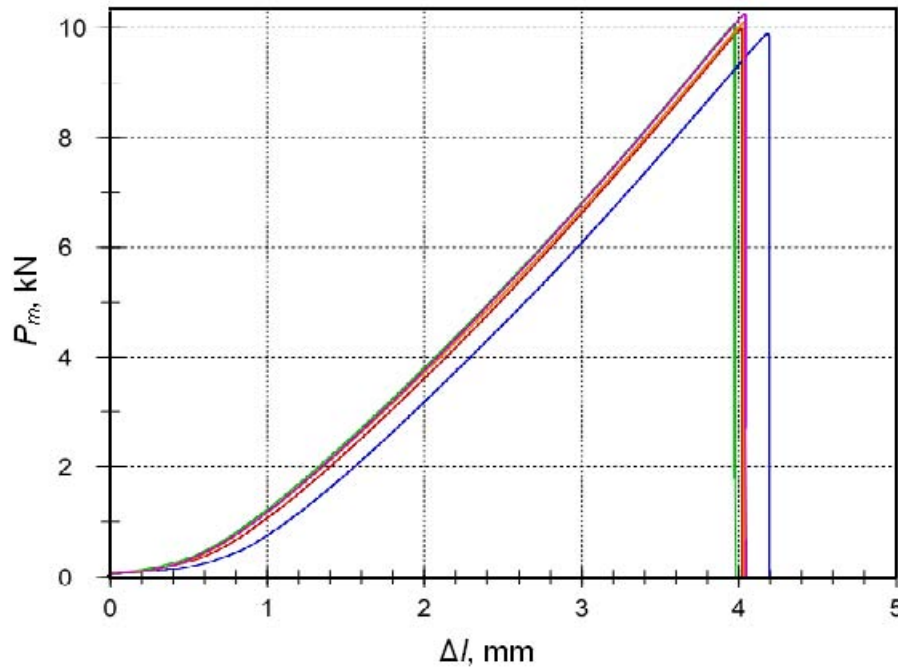
Tab. 5.2: Wartości maksymalnej siły zrywającej oraz wytrzymałości na rozciąganie

Nr próbki	1	2	3	4	5	Średnia	Odch. stand.
$P_m$ , kN	9.98	10.06	9.89	10.10	10.24	10.06	0.13
$R_m$ , MPa	409	413	406	414	420	413	5.40

### Statyczna próba trójpunktowego zginania

Próbę trójpunktowego zginania przeprowadzono dla pięciu próbek według zaleceń normy PN-EN ISO 178:2011. W próbach wyznaczono moduł Younga przy zginaniu, wytrzymałość na zginanie, obciążenie maksymalne oraz ugięcie przy zniszczeniu. Wyniki zestawiono w Tabeli 5.3, a zależności odkształceń od naprężeń przedstawia Rys.5.3.

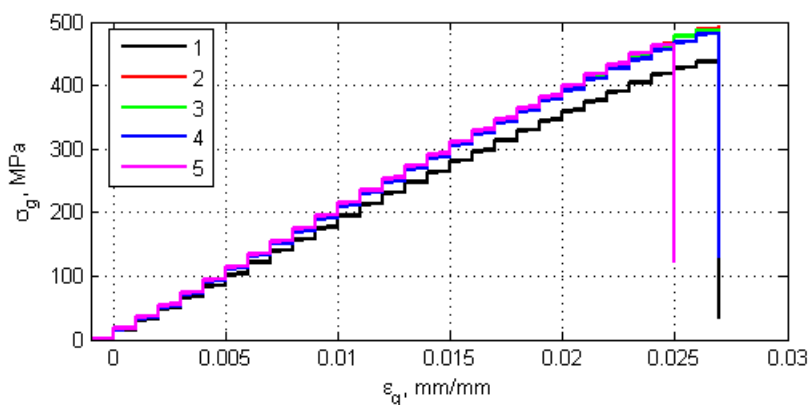
Wyniki przeprowadzonych statycznych testów wytrzymałościowych spełniają wymagania normy EN 60893-3-2 pod względem minimalnych wartości dopuszczalnych. Wartość średnia wytrzymałości na rozciąganie wyniosła 413 MPa, co przewyższa wartość minimalną o 37.67%, średnia wartość modułu Younga wyznaczonego w próbie trójpunktowego zginania wyniosła 24203.61 MPa, co przewyższa wartość minimalną o 0.84%, średnia wartość wytrzymałości na zginanie wyniosła 633.2 MPa i przewyższa wartość minimalną o 86.23%.



Rys. 5.2: Zależności wydłużenia próbek od przyłożonej siły

Tab. 5.3: Własności wytrzymałościowe wyznaczone w próbie trójpunktowego zginania

Nr próbki	$b$ , mm	$h$ , mm	$E_g$ , MPa	$R_g$ , MPa	$P_{max}$ , N	$w_g$ , mm
1	10.200	2.300	24199.485	634.8	439.964	5.248
2	10.200	2.440	23718.367	632.4	493.297	4.945
3	10.230	2.400	24320.303	644.0	487.430	4.930
4	10.200	2.400	24095.658	640.4	483.316	4.975
5	10.200	2.400	24684.237	614.4	463.686	4.582
Średnia	10.206	2.388	24203.610	633.2	473.539	4.936
Odch. stand.	0.013	0.052	350.625	11.5	21.813	0.237



Rys. 5.3: Zależności odkształceń od naprężeń w próbie zginania

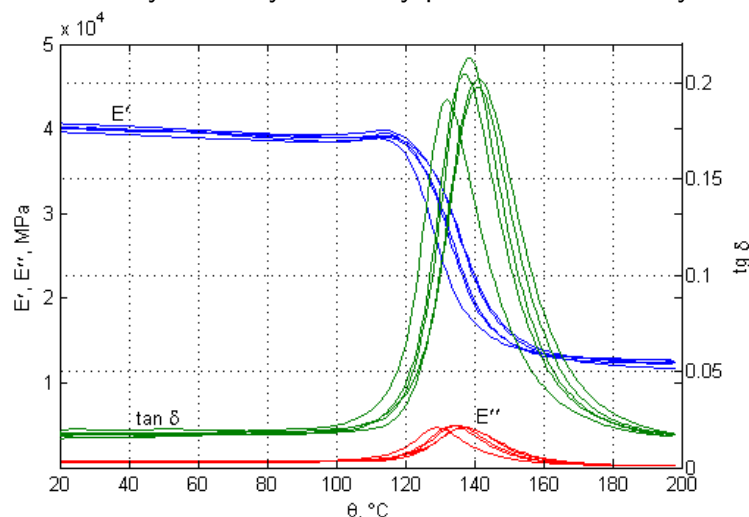


### 5.2.3. Parametry eksperymentu DMA

Testy DMA zostały przeprowadzone na mechanicznym analizatorze dynamicznym DMA 242C firmy Netzsch na próbkach o wymiarach:  $l = 55$  mm,  $b = 10$  mm i  $h = 2.5$  mm. Wszystkie testy zostały przeprowadzone przy trójpunktowym zginaniu dynamicznym przy długości roboczej próbek 50 mm z obciążeniem cyklicznym o amplitudzie 80  $\mu\text{m}$  i z maksymalną siłą 5 N. Testy były przeprowadzone w dwóch etapach: w pierwszym etapie badano zależność parametrów dynamicznych od częstotliwości wymuszenia i temperatury, a w drugim dodatkowo od prędkości grzania.

W pierwszym etapie testy przeprowadzono przy programie jednoczęstotliwościowym dla częstotliwości 1, 10, 20 i 50 Hz. Zakres temperatury obserwacji ustawiono na  $20 \div 200^\circ\text{C}$  przy prędkości grzania  $3^\circ\text{C}/\text{min}$  zgodnie z zaleceniami EN-ISO 6721-1:2002. Dla każdego unikatowego zestawu parametrów analizę przeprowadzono trzykrotnie. W wyniku otrzymano charakterystyki temperaturowe dla  $E'$ ,  $E''$  oraz  $\text{tg } \delta$ .

W drugim etapie przeprowadzono testy przy programie wieloczęstotliwościowym dla częstotliwości 1, 10, 20 i 50 Hz i prędkości grzania 1, 3, 5, 8, 12 i  $15^\circ\text{C}/\text{min}$  dla zakresu temperatury obserwacji  $20 \div 220^\circ\text{C}$ . Przykładowe charakterystyki temperaturowe dla mierzonych parametrów dynamicznych zostały przedstawione na Rys.5.4-5.6.



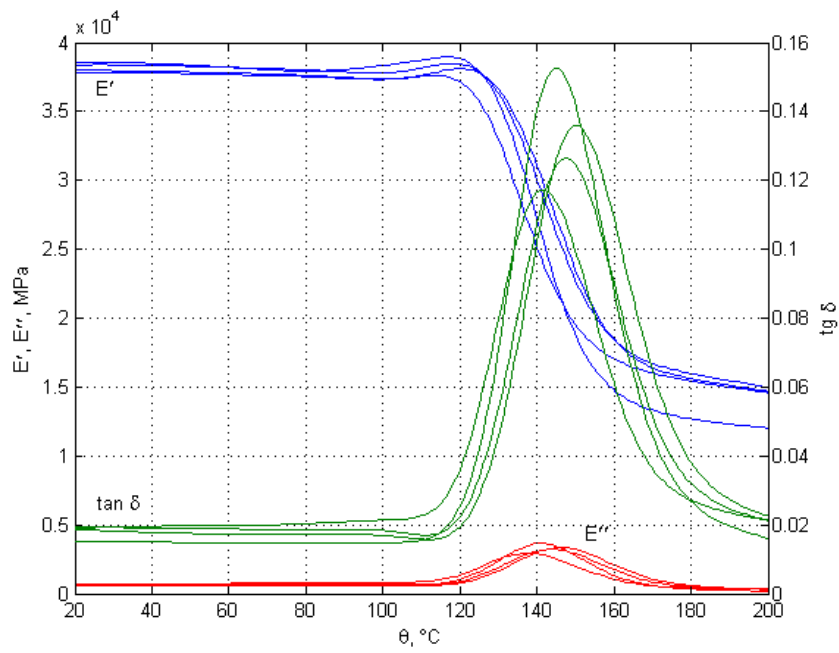
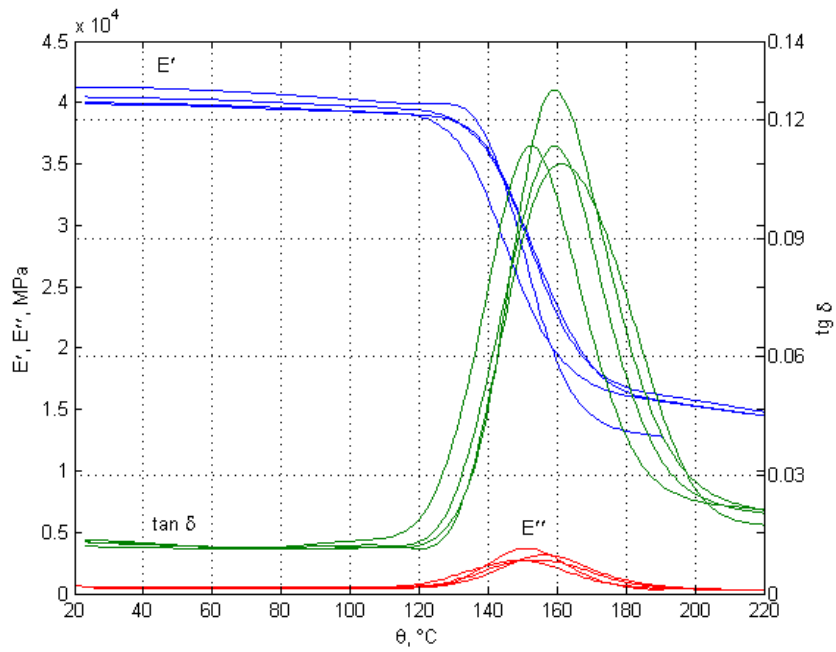
Rys. 5.4: Charakterystyki temperaturowe przy prędkości grzania  $3^\circ\text{C}/\text{min}$

## 5.3. Analiza wyników eksperymentalnych

Po przeprowadzeniu testów DMA otrzymane wyniki zostały przeanalizowane w celu określenia zależności parametrów dynamicznych od częstotliwości wymuszenia, temperatury i prędkości grzania. Poniżej przedstawiono wyniki analiz dla obu etapów eksperymentu.

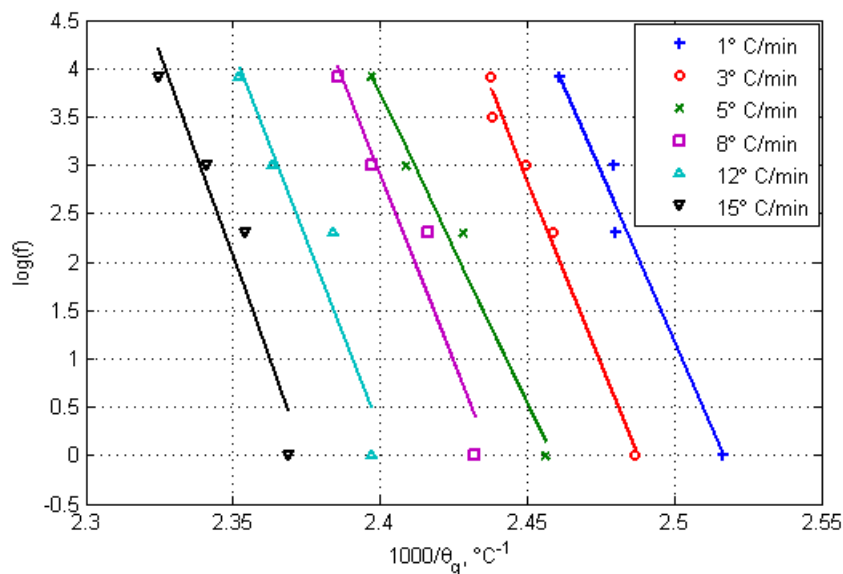
### 5.3.1. Wyznaczenie energii aktywacji

Zgodnie z zaleceniami normy EN ISO 6721-1:2002 wartości  $\theta_g$  zostały wyznaczone na podstawie wartości szczytowych modułu stratnego. Wartości  $\theta_g$  zależne od częstotliwości

Rys. 5.5: Charakterystyki temperaturowe przy prędkości grzania  $8^{\circ}\text{C}/\text{min}$ Rys. 5.6: Charakterystyki temperaturowe przy prędkości grzania  $15^{\circ}\text{C}/\text{min}$

Tab. 5.4: Wartości  $\theta_g$  przy różnych częstotliwościach i prędkościach grzania

$\beta$ , °C/min	1	3	5	8	12	15
$f$ , Hz	$\theta_g$ , °C					
1	124.2	129.0	134.0	138.0	144.0	149.0
10	130.1	133.6	138.7	140.7	146.3	151.6
20	130.2	135.1	142.0	144.0	150.0	154.0
50	133.2	137.1	144.0	146.0	152.0	157.0



Rys. 5.7: Wykres Arrheniusa przy różnych prędkościach grzania

i prędkości grzania zestawiono w Tabeli 5.4.

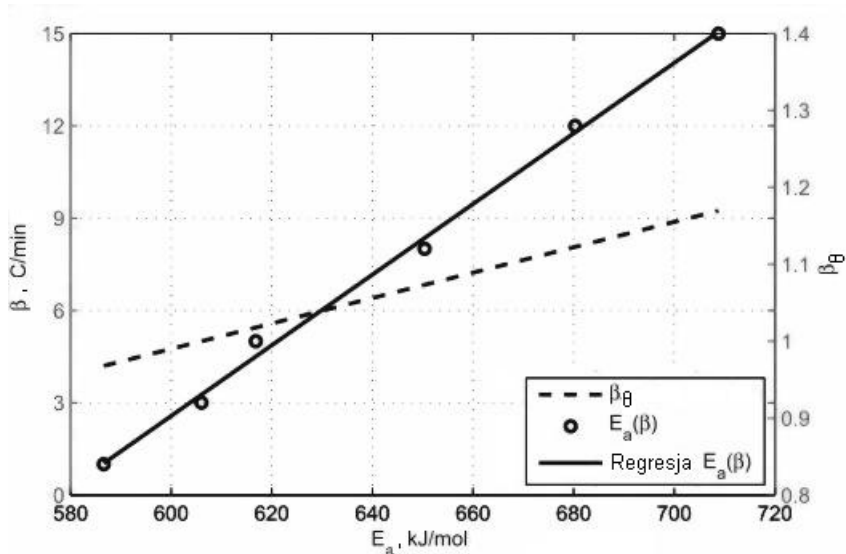
Zgodnie z zależnością Arrheniusa (5.1) wyznaczono energię aktywacji  $\alpha$ -przemiany dla różnych prędkości grzania. Wartości  $1000/\theta_g$  w zależności od zlogarytmizowanej częstotliwości zostały przedstawione na wykresie Arrheniusa (Rys.5.7). W celu wyznaczenia odchylenia otrzymanych wyników od trendu liniowego zastosowano liniową regresję. Wartości energii aktywacji wyznaczono na podstawie analizy współczynników nachylenia prostych uzyskanych po zastosowaniu regresji. Wartości energii aktywacji oraz współczynniki korelacji ( $r^2$ ), wartości średnie i odchylenie standardowe przedstawiono w Tabeli 5.5.

Na podstawie otrzymanych wyników można wyznaczyć zależność pomiędzy  $\theta_g$  i  $\beta$ . Współczynnik  $r^2$  wykazuje dobre dopasowanie wyników eksperymentalnych do trendu liniowego, jednak spada przy wzroście  $\beta$ . Przyczyną jest niebezpośredni kontakt termopary w komorze termicznej urządzenia DMA z próbką, na której jest wykonywany pomiar. Z tego względu czas potrzebny do uzyskania termicznego stanu ustalonego w komorze (z definicji pomiar jest izotermiczny) może być niewystarczający dla wyższych wartości  $\beta$ , co wiąże się z bezwładnością cieplną. Jednak, przedstawiając  $E_a$  w funkcji  $\beta$  obserwuje się liniową zależność (Rys.5.8) ze współczynnikiem dopasowania równym 0.9996.

Biorąc pod uwagę wyniki przedstawione na Rys.5.8 oraz w Tabeli 5.5 można założyć, że energia aktywacji zależy liniowo od prędkości grzania. Na podstawie tego założenia można wprowadzić współczynnik prędkości grzania  $\beta_\theta$ . Na podstawie zaleceń normy EN

Tab. 5.5: Wartości energii aktywacji

$\beta$ , °C/min	$E_a$ , kJ/mol	$r^2$
1	586.59	0.9746
3	606.02	0.9997
5	616.82	0.9779
8	650.40	0.9246
12	680.28	0.8937
15	708.79	0.9165
Średnia	641.48	0.9478
Odch. stand.	42.81	0.0382



Rys. 5.8: Wykres zależności energii aktywacji od prędkości grzania i współczynnika prędkości grzania

ISO 6721-1:2002, gdzie sugerowana wartość  $\beta$  jest równa 3°C/min, wartość  $\beta_\theta$  przyjmuje się równą jedności, a prędkość równą 3°C/min przyjmuje się jako wartość odniesienia  $\beta_r$ . Wartości  $\beta_\theta$  dla  $\beta \neq \beta_r$  mogą być otrzymane ze stosunku wartości  $E_a$  przy  $\beta \neq \beta_r$  i wartości  $E_a$  przy  $\beta = \beta_r$ . Zależność współczynnika prędkości grzania od energii aktywacji przedstawiono na Rys.5.8.

Biorąc pod uwagę powyższe założenia i zależności, zmodyfikowane równanie Arrheniusa (5.2) można uogólnić poprzez wprowadzenie do niego współczynnika prędkości grzania (Katunin i Gnatowski, 2012):

$$\log a_\theta = \frac{\beta_\theta E_a \log e}{R} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_r(\beta_r)} \right), \quad (5.6)$$

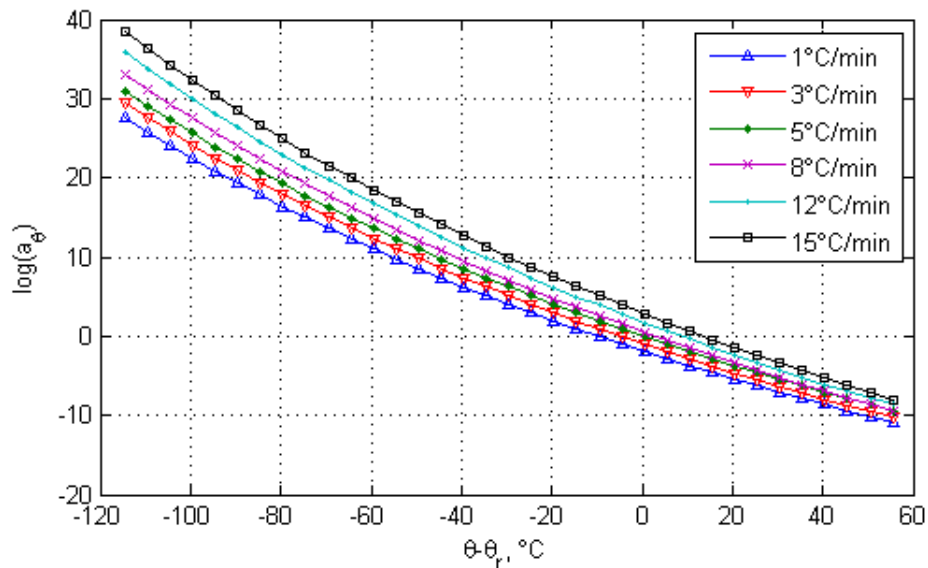
gdzie  $\theta_r(\beta_r)$  jest temperaturą odniesienia dla danej prędkości grzania. Równanie (5.6) daje możliwość uwzględnienia prędkości grzania w dalszych rozważaniach, np. przy wyznaczeniu krzywych wiodących dla parametrów dynamicznych.

### 5.3.2. Wyznaczenie współczynników przesunięcia poziomego i konstruowanie krzywych wiodących

W celu wyznaczenia współczynników przesunięcia poziomego należy określić temperaturę odniesienia. Biorąc pod uwagę różne wartości prędkości grzania, tj. różne wartości temperatury zeszklenia, temperaturę odniesienia należy wyznaczyć dla każdej rozpatrywanej wartości prędkości grzania. Wartość  $\theta_r$  dla wartości odniesienia prędkości grzania  $\beta_r$  przyjęto jako wartość średnią wartości temperatury zeszklenia  $\bar{\theta}_g$ . W ten sam sposób wyznaczono wartości  $\bar{\theta}_g$  dla  $\beta \neq \beta_r$  i zestawiono w Tabeli 5.6.

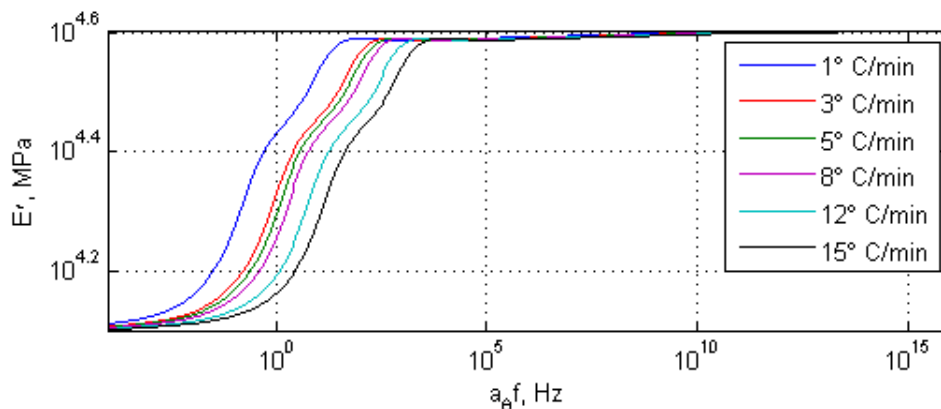
Tab. 5.6: Wartości temperatury odniesienia dla różnych prędkości grzania

$\beta, ^\circ\text{C}/\text{min}$	1	3	5	8	12	15
$\bar{\theta}_g, ^\circ\text{C}$	129.42	134.36	139.67	142.17	148.07	152.90

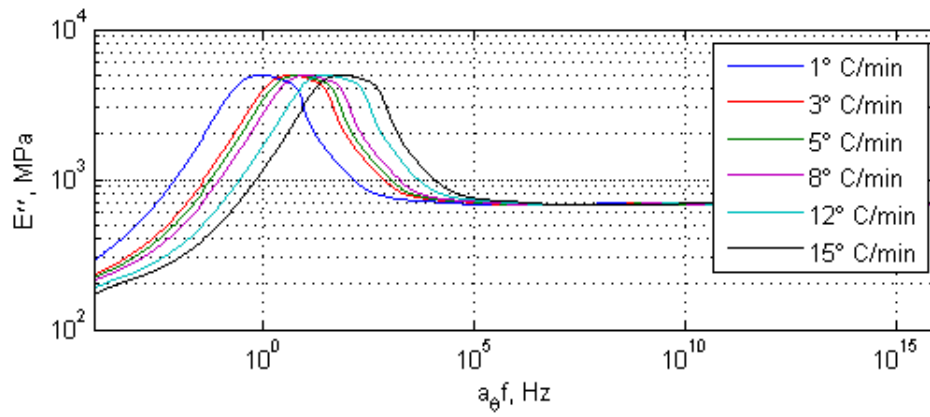


Rys. 5.9: Współczynniki przesunięcia poziomego dla różnych prędkości grzania,  $\theta_r(\beta_r) = 134.36^\circ\text{C}$

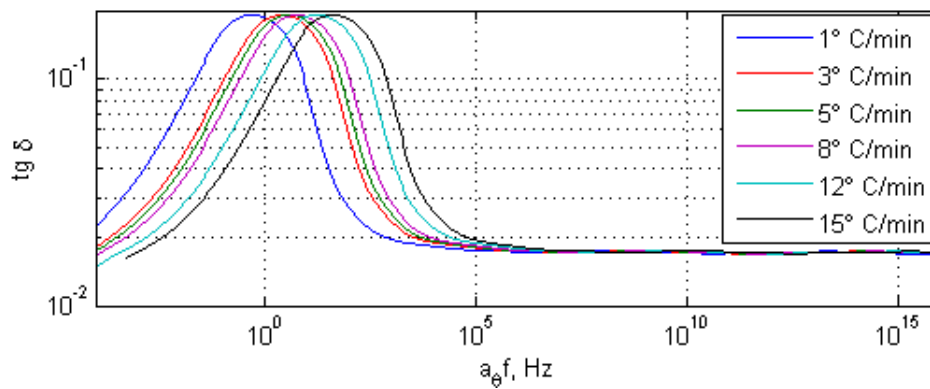
W oparciu o wyniki przedstawione na Rys.5.8 można skonstruować krzywe wiodące dla parametrów dynamicznych poprzez konwersję skanów temperaturowych do dziedziny



Rys. 5.10: Moduł zachowawczy przy różnych prędkościach grzania zgodnie z (5.6)



Rys. 5.11: Moduł stratny przy różnych prędkościach grzania zgodnie z (5.6)



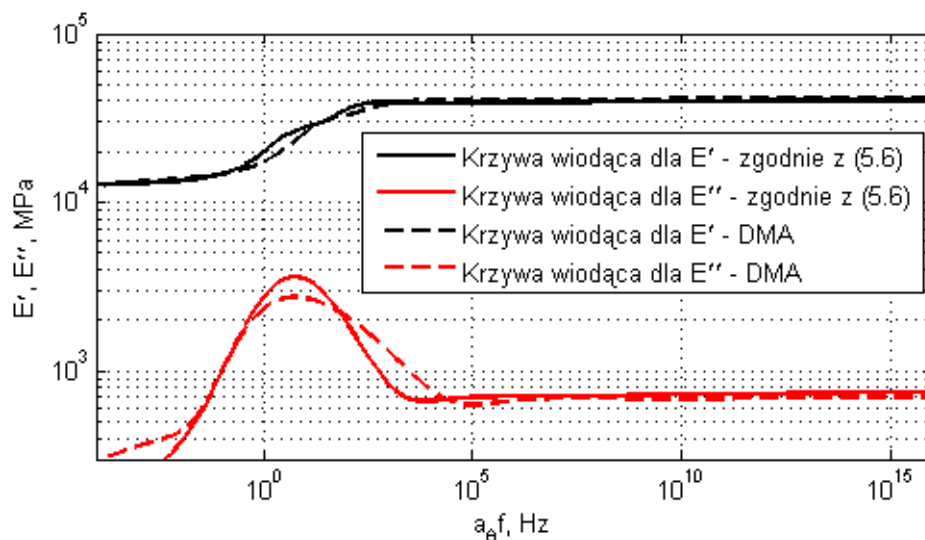
Rys. 5.12: Tangens kąta przesunięcia fazowego przy różnych prędkościach grzania zgodnie z (5.6)

częstotliwości. Na podstawie wartości współczynników przesunięcia poziomego przedstawionych na Rys.5.9 można otrzymać izotermiczne krzywe zależne od częstotliwości przesunięte względem wartości temperatury odniesienia dla każdej rozważanej wartości prędkości grzania. Krzywe wiodące dla modułu zachowawczego, modułu stratnego, tangensa kąta przesunięcia fazowego przedstawiono odpowiednio na Rys.5.10-5.12 na podstawie zmodyfikowanej zależności Arrheniusa (5.6).

Jak można zauważyć na powyższych wykresach, prędkość grzania ma duży wpływ na wartości parametrów dynamicznych i powinna być uwzględniana przy ich wyznaczeniu.

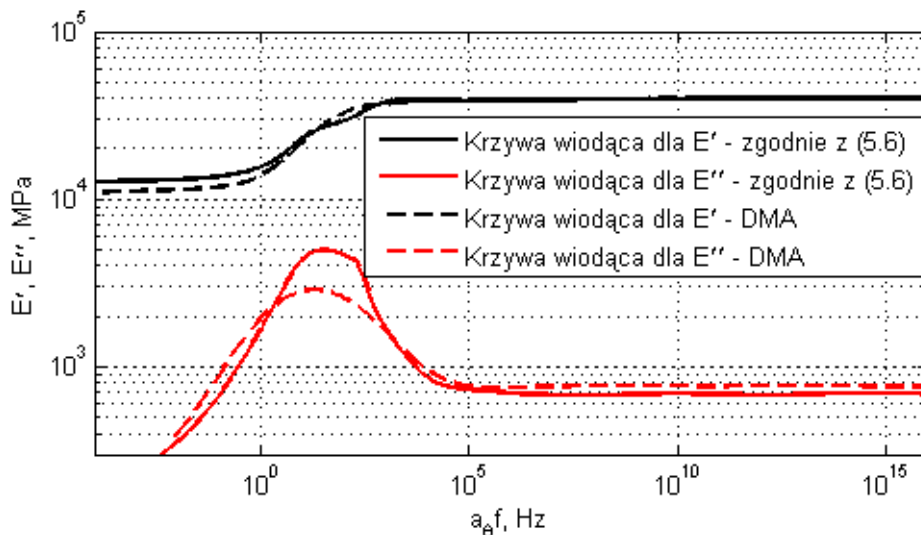
### 5.3.3. Porównanie krzywych wiodących uzyskanych metodami symulacyjnymi i eksperymentalnymi

W celu walidacji zaproponowanej modyfikacji zależności Arrheniusa konieczne jest porównanie wyników otrzymanych z symulacji na podstawie (5.6) z wynikami otrzymanymi w trakcie eksperymentu DMA dla różnych prędkości grzania. Przykładowe krzywe wiodące dla modułów dynamicznych przy różnych prędkościach grzania przedstawiono na Rys.5.13-5.14.



Rys. 5.13: Porównanie wyników symulacyjnych i eksperymentalnych dla modułów dynamicznych przy 5°C/min

Jak można zauważyć, krzywe wiodące dla modułu zachowawczego otrzymane bezpośrednio z pomiarów DMA pokrywają się z krzywymi otrzymanymi na podstawie symulacji. Rozbieżności krzywych występują przy wartościach temperatury bliskich  $\theta_g$ . Przy porównaniu krzywych wiodących dla modułu stratnego można zauważyć większe rozbieżności, ale również dla wartości temperatury bliskich  $\theta_g$ ; wartości szczytowe krzywych wiodących dla modułu stratnego otrzymanych z eksperymentu DMA są niższe od wartości otrzymanych na podstawie zaproponowanego modelu. Można również zauważyć, że rozbieżności pomiędzy krzywymi eksperymentalnymi i modelowymi wzrastają wraz ze wzrostem prędkości grzania.



Rys. 5.14: Porównanie wyników symulacyjnych i eksperymentalnych dla modułów dynamicznych przy 12°C/min

Różnice w zakresie temperatur powyżej  $\theta_g$  mogą być spowodowane przez kilka czynników. Główną przyczyną występujących rozbieżności jest proces sieciowania polimeru, którego intensywność wzrasta wraz ze wzrostem prędkości grzania, co jest wyraźnie widoczne na Rys.5.13-5.14. Małe różnice zarówno w zakresie temperatur poniżej, jak i powyżej  $\theta_g$  mogą być spowodowane bezwładnością termiczną w termicznej komorze pomiarowej DMA, gdyż termopara pomiarowa nie jest w bezpośrednim kontakcie z badaną próbką. Inną przyczyną jest założenie liniowej zależności pomiędzy wartościami energii aktywacji i prędkością grzania: błędy regresji również mają wpływ na obserwowane różnice.

Biorąc pod uwagę, że dla przedstawionych krzywych wiodących obszarem zainteresowania badań w zakresie efektu samorozgrzania jest zakres temperatury dla postaci szklistej laminatu znajdujący się poniżej  $\theta_g$  zaproponowana zmodyfikowana zależność Arrheniusa może być z powodzeniem zastosowana ze względu na dobre pokrywanie się wyników eksperymentalnych i uzyskanych z symulacji.

## 5.4. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych dotyczących wyznaczenia parametrów dynamicznych oraz ich zależności funkcyjnych od częstotliwości wymuszenia, temperatury oraz prędkości grzania. Wyniki otrzymane z pomiarów DMA wskazują na to, że zarówno częstotliwość wymuszenia, jak i prędkość grzania mają decydujący wpływ na wartości temperatury zeszklenia, a więc również na parametry dynamiczne.

W początkowym etapie badań przeprowadzono szereg statycznych testów wytrzymałościowych mających na celu identyfikację parametrów mechanicznych badanego laminatu oraz ich weryfikację z wartościami minimalnymi wg wymagań obowiązujących



norm. Wyniki we wszystkich przeprowadzonych testach wskazują, że wartości każdego z badanych parametrów mechanicznych są wyższe od wartości minimalnych podanych w normach.

W trakcie eksperymentów DMA zauważono, że wykresy Arrheniusa mają podobne nachylenie i są jedynie przesunięte w poziomie w zależności od wartości prędkości grzania. Na tej podstawie klasyczną zależność Arrheniusa rozszerzono o zależność energii aktywacji od prędkości grzania. W celu opisu matematycznego wymienionej zależności wprowadzono współczynnik prędkości grzania  $\beta_{\theta}$ . Na podstawie zmodyfikowanej zależności Arrheniusa zbudowano krzywe wiodące dla wszystkich rozpatrywanych wartości prędkości grzania. Przy porównaniu wyników eksperymentalnych z wynikami wyznaczonymi na podstawie zaproponowanego modelu otrzymano małe rozbieżności w zakresie temperatur poniżej  $\theta_g$ , które mogą być pominięte.

Przedstawiona zmodyfikowana zależność Arrheniusa pozwala na ograniczenie eksperymentów DMA do przypadków przy jednej wartości prędkości grzania, gdyż pozostałe wartości mogą być wyznaczone z modelu. Na podstawie otrzymanych wyników można uzupełnić modele teoretyczne przedstawione w Rozdziale 4. o brakujące dane i wyznaczyć rozkłady temperatury samorozgrzania na powierzchni płyt laminatowych.



## Rozdział 6

# Eksperymentalna ocena zachowania dynamicznego laminatu

W poniższym rozdziale przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych dotyczących oceny zachowania badanego laminatu przy obciążeniach cyklicznych z uwzględnieniem temperatury samorozgrzania. Przeprowadzone badania miały na celu identyfikację modeli teoretycznych pól temperatury samorozgrzania w stanie ustalonym, jak również określenie charakteru zmian i dynamiki parametrów mechanicznych oraz temperatury samorozgrzania, które nie mogą być wyznaczone na podstawie modeli teoretycznych.

W rozdziale przedstawiono opis stanowiska, na którym przeprowadzono eksperymenty; następnie zaprezentowano wyniki badań dotyczących zmian wartości parametrów mechanicznych oraz temperatury samorozgrzania w zależności od częstotliwości wymuszenia i długości próbek. Dla obu przypadków zaproponowano aproksymacyjne modele empiryczne dla krzywych czasowych oraz wyznaczono współczynniki modeli dla badanych zakresów parametrów. Na podstawie modeli aproksymacyjnych dokonano analizy otrzymanych wyników eksperymentalnych. Wyniki przeprowadzonych badań także zostały przedstawione w pracach (Katunin, 2011c; Katunin i Fidali, 2011b; Katunin i Fidali, 2011a).

### 6.1. Zagadnienia podstawowe

Elementy maszyn wykonane z laminatów polimerowych są często poddawane obciążeniom cyklicznym i drganiom, co, w niektórych przypadkach, powoduje inicjację efektu samorozgrzania i prowadzi do nieodwracalnych zmian w strukturze i jej degradacji. Jednym z parametrów mających największy wpływ na wymienione zmiany jest częstotliwość wymuszenia (jak pokazują wyniki badań przedstawionych w Rozdziale 5), jednak występuje również zależność od cech geometrycznych oraz sztywności początkowej elementu (Senchenkov *i in.*, 2004). Efekt samorozgrzania jest spowodowany wzrostem naprężeń w elemencie i jego inicjacja następuje przy wartościach znacznie niższych od wartości krytycznych. Inną przyczyną inicjacji efektu samorozgrzania jest wymuszenie drgań rezonansowych elementu. Mimo że naprężenia w nim występujące w warunkach normalnej

pracy nie przekraczają wartości krytycznych wywołanie drgań rezonansowych powoduje znaczny wzrost amplitud naprężeń. Istnieje wiele czynników mających wpływ na wywołanie drgań elementu dla częstotliwości własnych: błędy technologiczne przy wytwarzaniu, stopniowa degradacja struktury (procesy starzenia polimeru, zmienność warunków pracy), jednak najczęstszą przyczyną jest wystąpienie nagłego uszkodzenia struktury, które zmienia jej odpowiedź częstotliwościową.

Jak wspomniano w Rozdziale 3., zachowanie materiału liniowo-lepkosprężystego może być opisane zgodnie z zasadą superpozycji Boltzmanna (4.2), jednak często taki opis jest niewystarczający dla uwzględnienia wszystkich procesów zachodzących w strukturze podczas obciążeń dynamicznych (Hernández-Jiménez *i in.*, 2002). W przypadku obserwowania szybkiego spadku naprężeń podczas dynamicznego testu relaksacji naprężeń klasyczny model Maxwella przedstawiony w Rozdziale 2.3 nie uwzględnia całego widma czasów relaksacji, a jedynie pojedynczą wartość. Z tego względu w opisie relaksacji naprężeń często stosowany jest model Maxwella-Wiecherta (Li i Garmestani, 2002; Hwang *i in.*, 2006), w którym rozpatruje się zazwyczaj kilka elementów Maxwella połączonych równolegle. Liczba elementów jest dobierana na drodze eksperymentu w ten sposób, aby dopasować dane eksperymentalne.

We wcześniejszych rozdziałach wykazano, że wygodnie posługiwać się parametrami zespolonymi, pozwalającymi na linearyzację równania Volterry-Boltzmanna opisującego lepkosprężystość liniową. Moduł zespolony, opisany wzorem (2.44) może być również przedstawiony następująco (Frampton, 2009):

$$E^* = \frac{\Delta P}{\Delta d}, \quad (6.1)$$

gdzie  $\Delta P$  i  $\Delta d$  oznaczają odpowiednio wartości międzyszczytowe siły i przemieszczeń, a kąt przesunięcia fazowego może być wyznaczony na podstawie:

$$\delta = \frac{2\pi\Delta t}{T}. \quad (6.2)$$

Na podstawie powyższych wzorów istnieje alternatywna możliwość wyznaczenia modułu zespolonego. Zależności te wykorzystano do opisu obserwowanych zjawisk podczas przeprowadzonych eksperymentów z wymuszeniem dynamicznym płyt kompozytowych.

## 6.2. Przygotowanie i realizacja eksperymentów

Eksperymenty zostały zrealizowane w dwóch etapach: najpierw określono częstotliwości i postacie własne metodą eksperymentalną dla badanych płyt laminatowych w celu wyznaczenia częstotliwości rezonansowych, a następnie płyty pobudzano na tych częstotliwościach i mierzono wartości poszczególnych parametrów.

### 6.2.1. Przygotowanie próbek i aparatury badawczej

Do badań eksperymentalnych wytworzono próbki o identycznych parametrach jak w eksperymentach DMA (patrz Rozdział 5.2). W celu zapewnienia statystycznej powta-

rzalności wyników przygotowano 30 próbek o szerokości 10 mm, grubości 2.5 mm oraz długości 200, 225, 250, 275 i 300 mm. Ze względu na mocowanie próbek w uchwytach podczas eksperymentu ich długość robocza była pomniejszona o 20 mm.

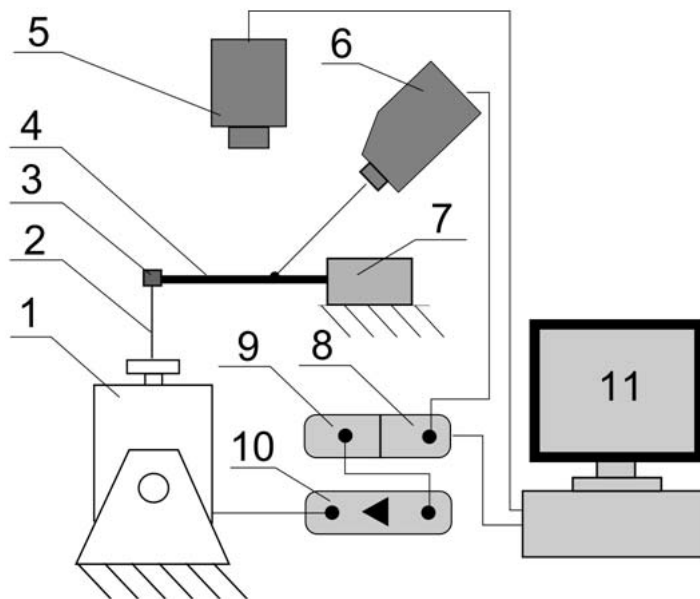
Do realizacji eksperymentów zostało przygotowane stanowisko eksperymentalne przedstawione na Rys.6.1 i Rys. 6.2. Schemat stanowiska przedstawiono na Rys.6.3. Konstrukcja stanowiska była następująca (patrz Rys.6.3): próbki 4 mocowano w uchwycie dużym 7 zapewniającym ich mocowanie przy powtarzalnych warunkach realizowanych poprzez zakręcanie śrub na uchwycie (patrz Rys.6.2) przy pomocy klucza dynamometrycznego z jednakowym momentem. Dodatkowo, zastosowano wkładki z Plexiglasu znajdujące się w bezpośrednim kontakcie z próbką i zapewniające izolację termiczną (niski współczynnik przewodności cieplnej Plexiglasu). Do drgań próbki pobudzano wzbudnikiem elektrodynamicznym 1 w połączeniu ze wzmacniaczem 10, a sygnał wymuszenia był podawany z generatora 9 z wbudowanym analizatorem sygnałów 8. Wymuszenie ze wzbudnika było przekazywane do próbki poprzez popychacz 2, na końcu którego znajdował się piezoelektryczny czujnik siły oraz uchwyt mały 3. Do pomiaru prędkości przemieszczeń oraz do wyznaczenia częstotliwości i postaci własnych wykorzystano wibrometr laserowy skanujący 6 połączony z wielokanałowym analizatorem sygnałów 8 pozwalającym na szybki bezkontaktowy pomiar oraz kontrolę parametrów wymuszenia. Pole temperatury na powierzchni próbek było mierzone przy pomocy kamery termowizyjnej 5. W celu synchronizacji czasowej wykorzystano wyzwalacz, który przy podaniu odpowiedniego napięcia uruchamiał wszystkie urządzenia pomiarowe i rozpoczynał akwizycję danych.



Rys. 6.1: Stanowisko badawcze



Rys. 6.2: Sposób mocowania próbek



Rys. 6.3: Schemat stanowiska badawczego

### 6.2.2. Realizacja eksperymentów

Wyznaczenie częstotliwości i postaci własnych przeprowadzono następująco: na powierzchni próbki umieszczono taśmę skupiającą wiązkę lasera z wibrometru i przy pomocy dedykowanego oprogramowania zdefiniowano siatkę punktów pomiarowych. Wymuszając próbki sygnałem szumu pseudo-losowego w zakresie częstotliwości  $0 \div 2000$  Hz uzyskano FRF o rozdzielczości 1 Hz przy pięciokrotnym uśrednieniu wyników pomiarów. Na podstawie FRF dla każdej zbadanej próbki określono trzy pierwsze częstotliwości rezonansowe drgań giętych.

W następnym etapie badań dla każdego rozpatrywanego przypadku ustawiano czę-

stotliwość otrzymaną w wyniku pierwszego etapu eksperymentów oraz sinusoidalną funkcję wymuszenia. Próbkę wymuszano przy stałej amplitudzie odkształceń realizując testy dynamicznej relaksacji naprężeń. Po włączeniu generatora automatycznie rozpoczynała się akwizycja danych pomiarowych z czujnika siły oraz kamery termowizyjnej dzięki zastosowanemu mechanizmowi synchronizacji. Dane z czujnika siły były otrzymywane z odstępem 1 ms, z wibrometru - 1 ms, a z kamery termowizyjnej - 1 s (przy pomocy specjalistycznego oprogramowania). Czas realizacji pojedynczego eksperymentu wynosił 300 s. Po przeprowadzeniu eksperymentów dane pomiarowe były gromadzone na komputerach i przygotowywane do dalszej analizy.

## 6.3. Opracowanie i analiza wyników eksperymentu

Wyniki eksperymentalne umożliwiają ocenę zachowania dynamicznego laminatu, w tym wyniki analizy modalnej i histerezy, oraz dynamiki temperatury samorozgrzania. W poniższych podrozdziałach przedstawiono analizę otrzymanych wyników.

### 6.3.1. Analiza zmian siły wymuszenia

#### Wyniki analizy modalnej

Podczas pierwszego etapu badań otrzymano FRF na podstawie zmierzonych sygnałów prędkości przemieszczeń dla zdefiniowanej siatki punktów pomiarowych oraz sygnału siły (jako sygnału referencyjnego). W celu kontroli jakości FRF wyznaczono również funkcje koherencji. Przykładowe funkcje przedstawiono na Rys.6.4 i Rys.6.5.

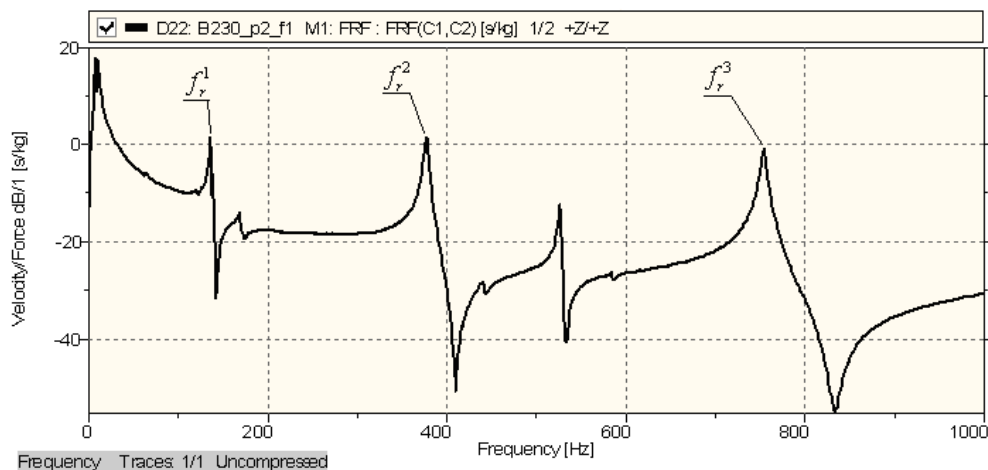
Wyniki analizy modalnej wskazały na obecność zarówno postaci giętych, jak i skrętnych, drgań własnych. W analizie uwzględniono pierwsze trzy postacie gięte drgań i odpowiadające im częstotliwości własne (oznaczone na Rys.6.4). Otrzymane wartości częstotliwości drgań własnych dla próbek o różnej długości zestawiono w Tabeli 6.1.

Tab. 6.1: Częstotliwości własne drgań badanych próbek

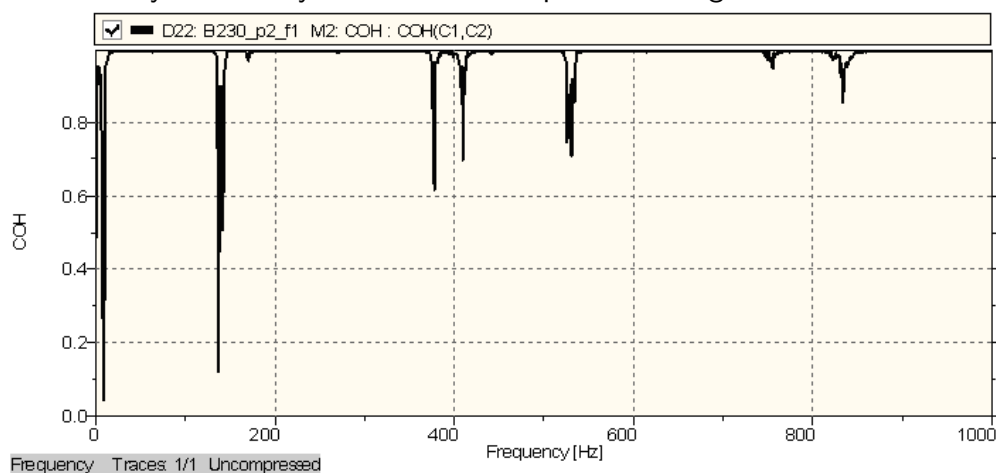
$l_e$ , mm	180	205	230	255	280
$f_r^1$ , Hz	262	161	137	128	108
$f_r^2$ , Hz	733	490	425	301	235
$f_r^3$ , Hz	1238	1061	836	702	480

#### Analiza wyników testów dynamicznych i model empiryczny

Po wyznaczeniu częstotliwości i postaci własnych próbek przeprowadzono testy dynamiczne. Próbkę były pobudzane do drgań przy wyznaczonych częstotliwościach własnych z przyłożoną siłą wymuszenia. Podczas testów dokonywano pomiaru siły i prędkości drgań. Prędkość drgań była mierzona w punkcie zdefiniowanym w miejscu utwierdzenia próbki w uchwycie dużym i po scałkowaniu mierzonych wartości otrzymano przemieszczenia. Korzystając ze wzoru (6.1) i zmierzonych sygnałów  $P$  i  $d$  wyznaczono pętle



Rys. 6.4: Przykładowa FRF dla próbek o długości 250 mm



Rys. 6.5: Przykładowa funkcja koherencji dla próbek o długości 250 mm

histerezy i określono ich zmiany względem czasu realizacji eksperymentu. Na Rys.6.6 przedstawiono zmiany pętli histerezy względem czasu (każda przedstawiona pętla znajduje się w odstępnie 10 s) oraz różnicę pomiędzy pętlami histerezy na początku obserwacji oraz przy jej końcu. Na wykresie zmian pętli histerezy względem czasu oznaczono także wartości szczytowej siły i przemieszczenia pokazujące spadek siły wymuszenia w czasie.

W podobny sposób otrzymano pętli histerezy oraz krzywe wartości międzyszczytowych dla  $P$  i  $d$  dla różnych częstotliwości wymuszenia oraz długości próbek. Obserwując charakter zmian funkcji  $P_{\max}(t) - d_{\max}(t)$  zauważono, że są one typu eksponencjalnego. Dla porównania zależności charakteru zmian funkcji od częstotliwości wymuszenia i długości próbek wprowadzono model dwu-eksponencjalny:

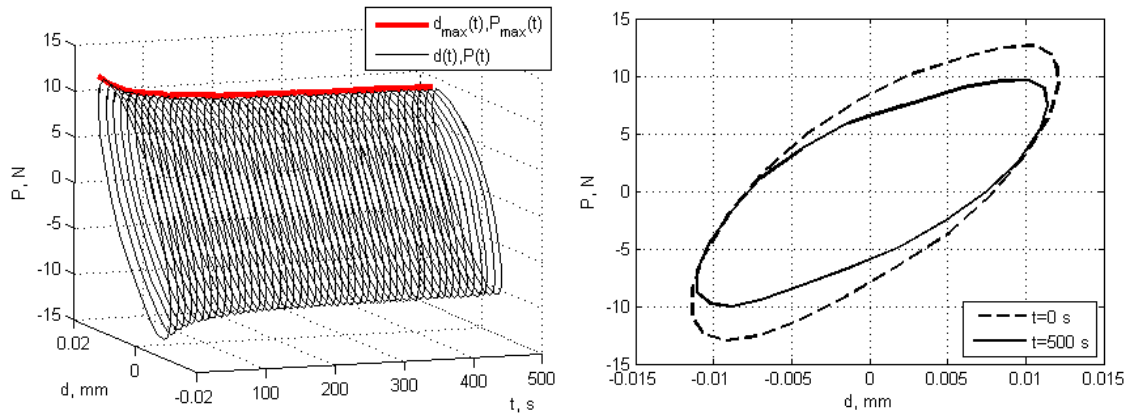
$$P_N(t) = \Omega_1 \exp(\Xi_1 t) + \Omega_2 \exp(\Xi_2 t). \quad (6.3)$$

opierający się na znormalizowanych wartościach siły wymuszenia  $P_N$ :

$$P_N(t) = \frac{P_{p-p}(t)}{\max(P_{p-p}(t))}, \quad (6.4)$$

gdzie  $\Omega_i$ ,  $\Xi_i$  są parametrami modelu, a  $P_{p-p}(t)$  – obwiednią otrzymaną na podstawie war-





Rys. 6.6: Zmiana pętli histerezy względem czasu oraz pętli histerezy na początku i na końcu obserwacji

tości szczytowych sygnału siły, mając na uwadze, że testy przeprowadzono przy stałych odkształceniach.

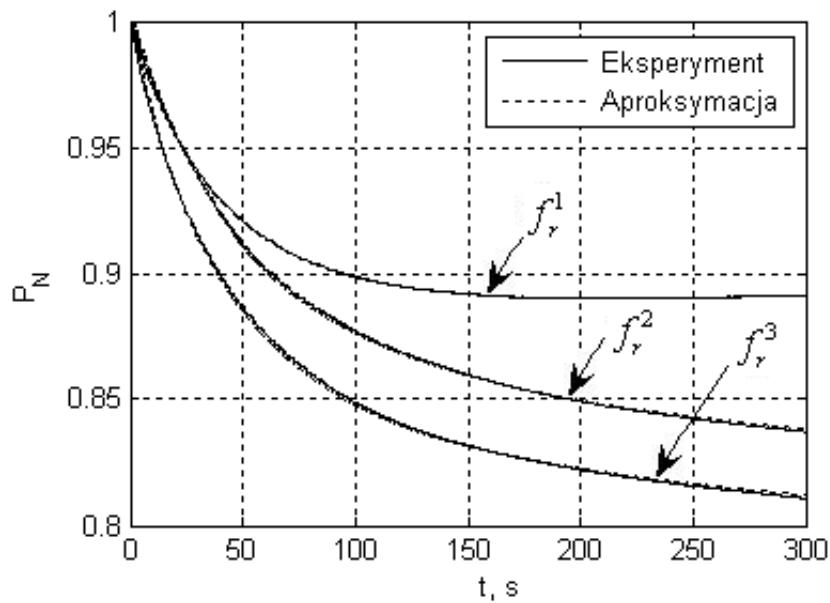
Model z wykorzystaniem funkcji eksponencjalnych został wybrany ze względu na interpretację fizyczną zagadnienia (reologiczny model Maxwella, patrz wzór (2.28)). Wybór modelu dwu-eksponencjalnego wynika z występowania dodatkowej relaksacji naprężeń w materiale, a opis reologii opiera się na modelu Maxwella-Wiecherta (patrz (2.36)). Wybór ten potwierdza analiza błędów uzyskanych przy aproksymacji funkcji  $P_{\max}(t) - d_{\max}(t)$ , gdzie wartości współczynników korelacji  $r^2$  nie obniżyły się poniżej wartości 0.985, a w większości przypadków były bardzo bliskie jedności. Na Rys.6.7 przedstawiono porównanie wyników eksperymentalnych zmian przyłożonej siły wymuszenia dla pierwszych trzech częstotliwości własnych oraz ich aproksymacji na podstawie zaproponowanego modelu (6.3). Wyniki przeprowadzonych eksperymentów mogą służyć do alternatywnego wyznaczenia zmian czasowych modułów dynamicznych: z otrzymanych funkcji  $d(t)$  i  $P(t)$  można wyznaczyć okres  $T$  i kąt przesunięcia fazowego  $\delta$ , a następnie moduł zespolony. Składowe modułu zespolonego, tj. moduł zachowawczy i moduł stratny, mogą być wyznaczone z następujących wzorów:

$$E'(t) = E^*(t) \cos \delta(t), E''(t) = E^*(t) \sin \delta(t). \quad (6.5)$$

Na podstawie modelu empirycznego (6.3) można wyznaczyć jego parametry  $\Omega_i$  i  $\Xi_i$  oraz ich zmianę w zależności od zmiany częstotliwości wymuszenia i długości próbek. Parametry te zestawiono w Tabeli 6.2. Przykładowe wykresy trójwymiarowe zmian  $\Omega_1$  i  $\Xi_1$  w zależności od badanych parametrów dla drugiej częstotliwości własnej  $f_r^2$  przedstawiono na Rys.6.8. Wartości  $\Omega_i$  i  $\Xi_i$  dla  $f_r^i$  przy różnych długościach próbek przedstawiono na Rys.6.9 i Rys.6.10, gdzie poziomy szarości oznaczają wartości danych parametrów.

### Analiza zmian parametrów modelu empirycznego

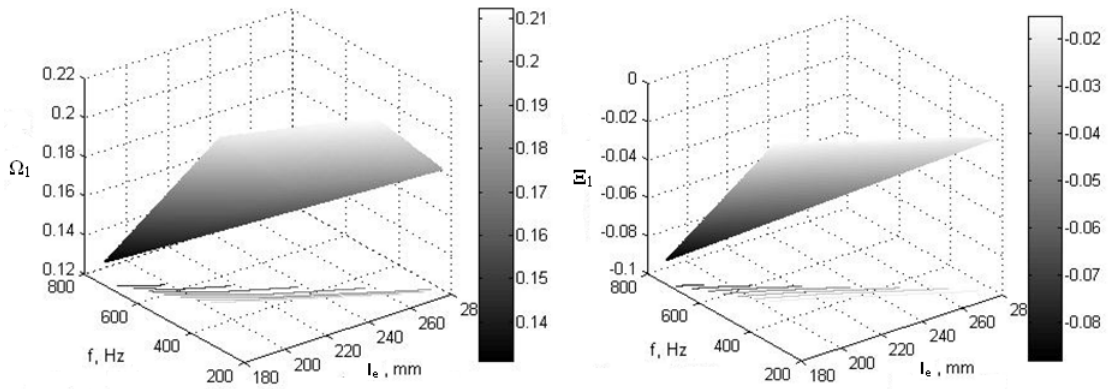
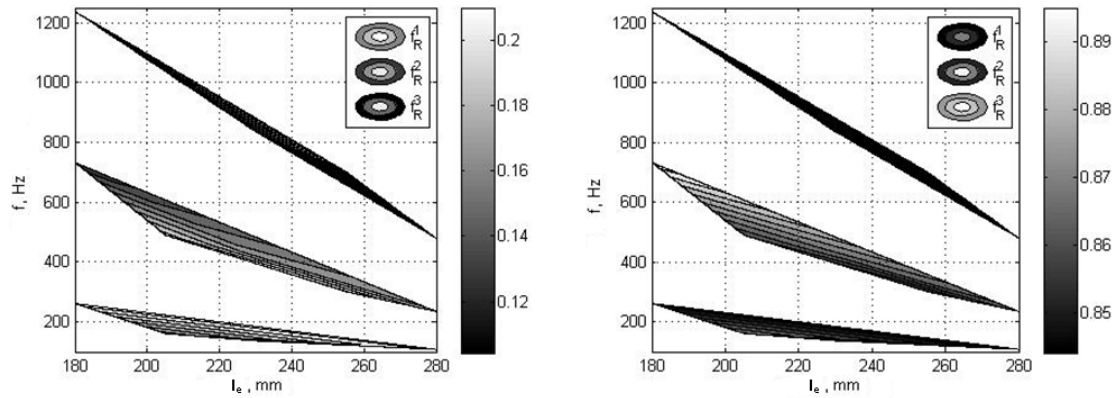
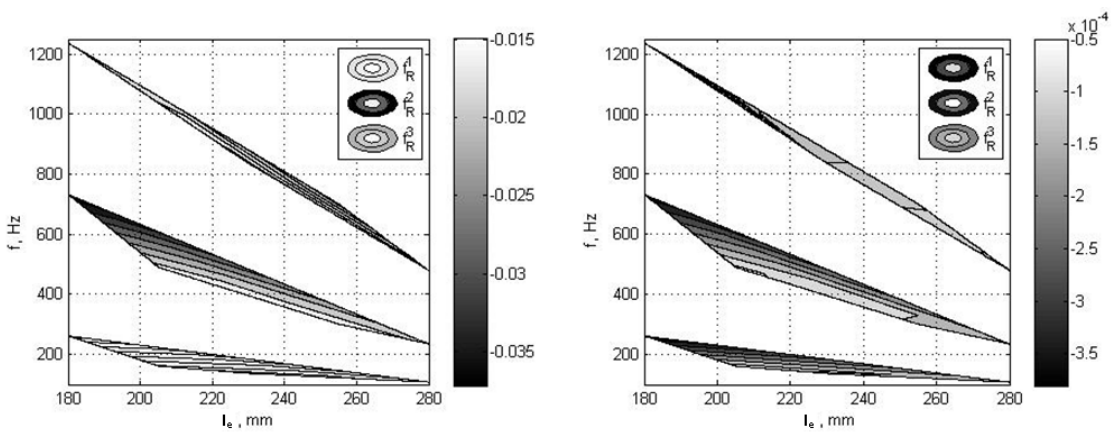
W trakcie analizy parametrów modelu empirycznego (6.3) zauważono tendencje ich zmian w zależności od zmiany badanych parametrów. Podjęto próbę opisu zaobserwowanych tendencji zgodnie z naturą fizyczną badanego zjawiska. Określono, że:

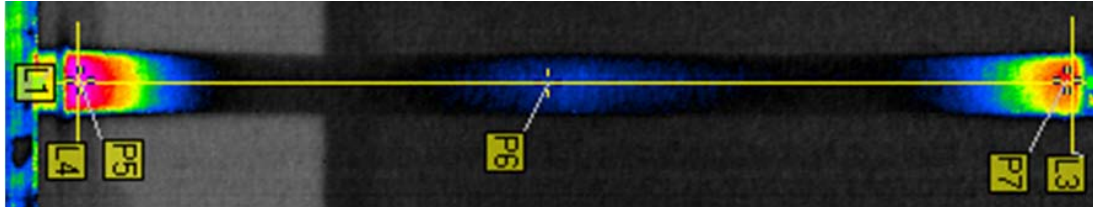


Rys. 6.7: Przykładowe funkcje obwiedni wartości szczytowych siły i ich aproksymacje dla próbek o długości 225 mm

Tab. 6.2: Parametry empirycznego modelu aproksymacyjnego spadku wartości siły w teście dynamicznym

$l_e$ , mm	$r$	$\Omega_1$	$\Xi_1$ , 1/s	$\Omega_2$	$\Xi_2$ , 1/s
180	1	0.2262	-0.0157	0.7728	$-4.048 \cdot 10^{-4}$
	2	0.1308	-0.0879	0.8968	$-3.807 \cdot 10^{-4}$
	3	0.1059	-0.0265	0.8913	$-2.209 \cdot 10^{-4}$
205	1	0.1652	-0.0221	0.8317	$-7.142 \cdot 10^{-5}$
	2	0.2049	-0.0152	0.8112	$-3.867 \cdot 10^{-5}$
	3	0.1492	-0.0229	0.8452	$-1.434 \cdot 10^{-4}$
230	1	0.2129	-0.0237	0.7827	$-1.169 \cdot 10^{-4}$
	2	0.1747	-0.0218	0.8258	$-7.494 \cdot 10^{-5}$
	3	0.1224	-0.0129	0.8859	$-1.298 \cdot 10^{-4}$
255	1	0.2074	-0.0229	0.7889	$-1.046 \cdot 10^{-4}$
	2	0.2122	-0.0169	0.7876	$-1.044 \cdot 10^{-4}$
	3	0.2106	-0.0372	0.8441	$-1.216 \cdot 10^{-4}$
280	1	0.2236	-0.0225	0.7684	$-1.109 \cdot 10^{-4}$
	2	0.1816	-0.0209	0.8150	$-1.250 \cdot 10^{-4}$
	3	0.1042	-0.0182	0.8952	$-1.058 \cdot 10^{-4}$

Rys. 6.8: Przykładowe wykresy zmian parametrów  $\Omega_1$  i  $\Xi_1$  dla  $f_r^2$ Rys. 6.9: Zmienność parametrów  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ Rys. 6.10: Zmienność parametrów  $\Xi_1$  i  $\Xi_2$



Rys. 6.11: Przykładowy obraz termowizyjny przedstawiający efekt samorozgrzania

- wzrost częstotliwości wymuszenia powoduje spadek wartości parametru przedeksponencjalnego  $\Omega_1$  (co jest spowodowane spadkiem wartości modułu zachowawczego  $E'$ ) oraz wzrost wartości parametru przedeksponencjalnego  $\Omega_2$  (spowodowany wzrostem wartości modułu stratnego  $E''$ );
- wartości parametrów  $\Xi_1$  i  $\Xi_2$  spadały wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia, co jest związane ze skróceniem czasów relaksacji (niedokładności otrzymanych wyników mogą wynikać z nieznaczących zmian warunków eksperymentalnych oraz z błędów aproksymacji);
- wzrost długości próbek spowodował spadek wartości wszystkich czterech parametrów modelu empirycznego;
- wartości wszystkich parametrów zaproponowanego modelu empirycznego wykazały quasi-liniowe zależności od częstotliwości wymuszenia i długości próbek, co potwierdza celowość wyboru opisu liniowo-lepkosprężystego badanego laminatu.

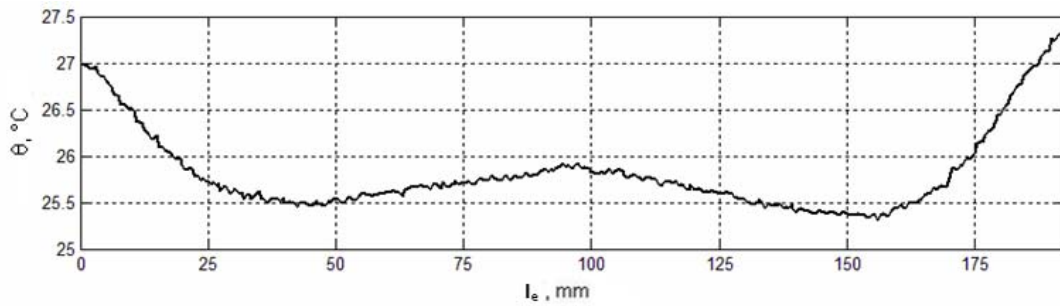
Na podstawie parametrów modelu empirycznego można przewidywać zachowanie laminatu podczas obciążeń dynamicznych przy parametrach eksperymentalnych innych, niż w przedstawionych badaniach.

### 6.3.2. Analiza zmian temperatury samorozgrzania

#### Analiza obrazów termowizyjnych i model empiryczny

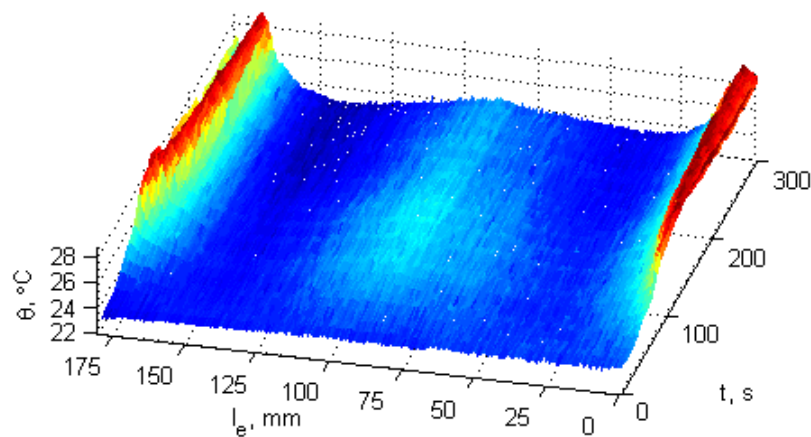
W celu zbadania dynamiki temperatury samorozgrzania podczas przeprowadzonych eksperymentów poddano analizie zarejestrowane sekwencje obrazów termowizyjnych. Na Rys.6.11 przedstawiono przykładowy obraz termowizyjny z oznaczeniami wprowadzonymi w dedykowanym oprogramowaniu IRBIS dla próbki wymuszonej do drgań przy pierwszej częstotliwości własnej. Jak widać, wzrost temperatury jest rejestrowalny przy utwierdzeniach płyty oraz w środku, w miejscu występowania największych amplitud przemieszczeń, co jest spowodowane wzrostem naprężeń w tych obszarach. Przy analizie termogramów wyznaczano zmianę temperatury punktów odpowiadających lokalnym obszarom wzrostu temperatury samorozgrzania (na Rys.6.11 – punkty  $P5$ ,  $P6$  i  $P7$ ) oraz profile temperatury wzdłuż (linia  $L1$ ) oraz w poprzek próbek (linie  $L3$  i  $L4$ ). Przykładowy profil temperatury odpowiadający wartościom na obrazie termowizyjnym na Rys.6.11 przedstawiono na Rys.6.12.

Na Rys.6.13-6.15 przedstawiono przykładowe wykresy zmian wzdłużnego profilu temperatury samorozgrzania przy wymuszeniu próbek przy różnych częstotliwościach włą-

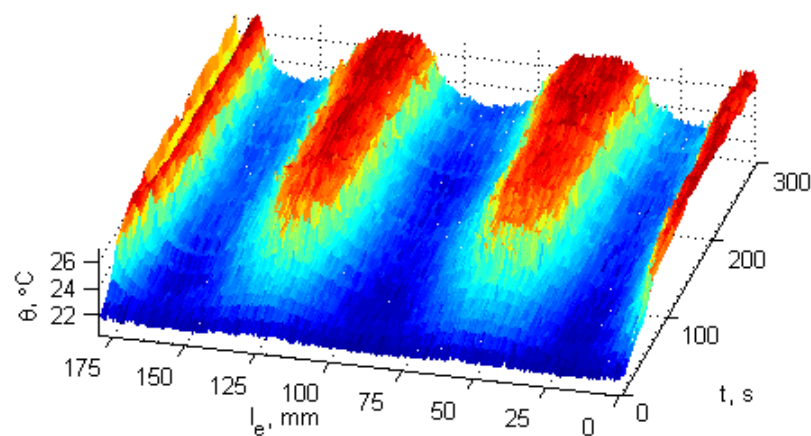


Rys. 6.12: Przykładowy profil temperaturowy przedstawiający efekt samorozgrzania

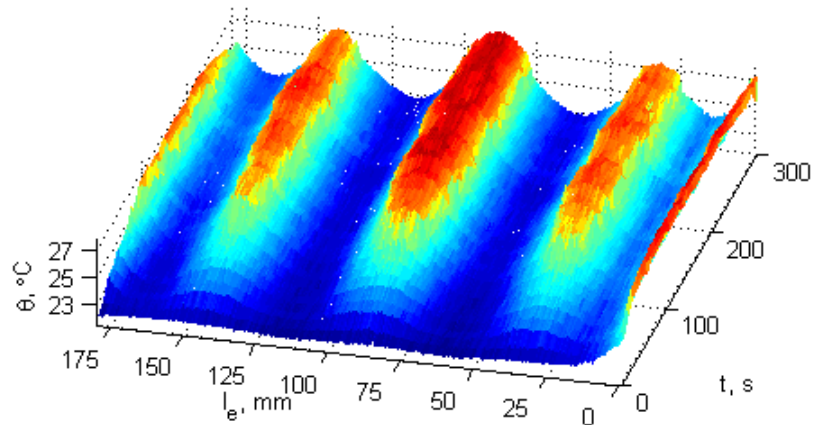
snych. W zależności od badanej częstotliwości własnej wyróżniają się trzy, cztery lub pięć regionów wzrostu temperatury samorozgrzania – przy utwierdzeniach oraz w strzałkach ugięcia. Jak można zauważyć, najwyższe wartości temperatury samorozgrzania przy drganiach próbki przy pierwszej częstotliwości własnej są obserwowane przy utwierdzeniach próbki, natomiast przy wyższych częstotliwościach własnych – w strzałkach postaci własnych. Podobnie jak w poprzedniej analizie, do opisu danych pomiarowych zastoso-



Rys. 6.13: Zmiana wzdłużnego profilu temperatury dla pierwszej częstotliwości własnej



Rys. 6.14: Zmiana wzdłużnego profilu temperatury dla drugiej częstotliwości własnej  
wano aproksymacyjny model empiryczny. Jak poprzednio (patrz (6.3)), model bazował



Rys. 6.15: Zmiana wzdłużnego profilu temperatury dla trzeciej częstotliwości własnej

na dwóch funkcjach eksponencjalnych:

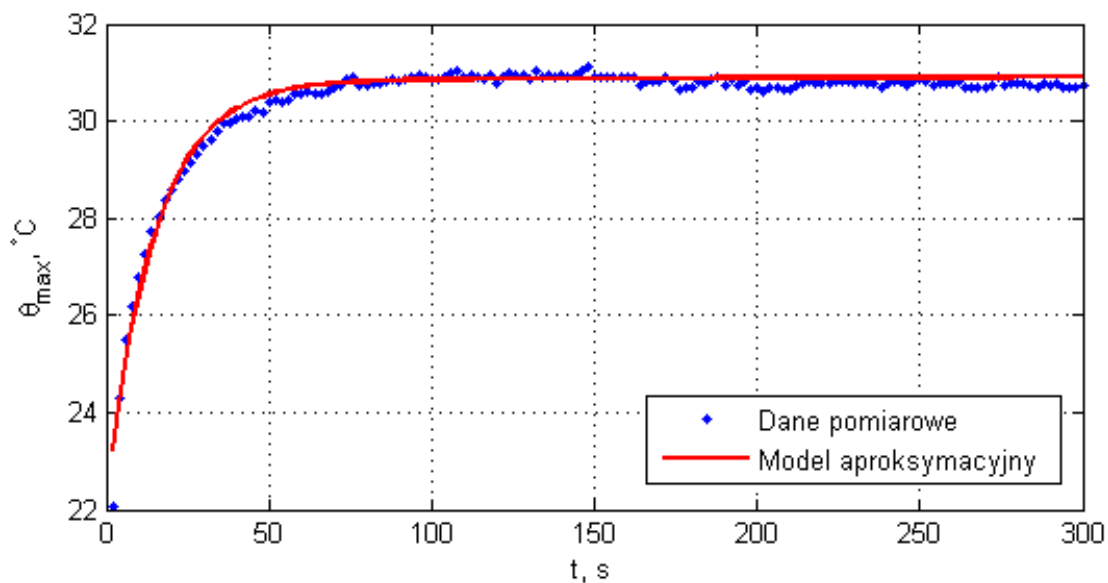
$$\theta_N(t) = \Gamma_1 \exp(\Lambda_1 t) + \Gamma_2 \exp(\Lambda_2 t), \quad (6.6)$$

gdzie  $\Gamma_i$  i  $\Lambda_i$  są parametrami modelu.

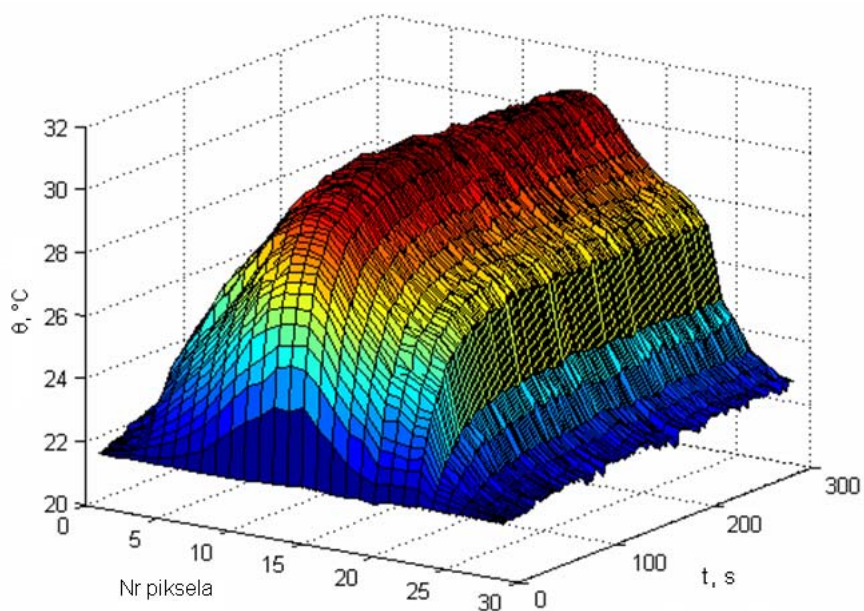
W aproksymacji uwzględniano zmiany maksymalnej temperatury samorozgrzania  $\theta_{\max}$  w funkcji czasu. Przykładowy wykres zmian otrzymany na podstawie danych pomiarowych oraz ich aproksymację przedstawiono na Rys.6.16. Temperatura maksymalna została zarejestrowana w linii utwierdzenia próbki. Funkcję przyrostu temperatury samorozgrzania można podzielić na dwa regiony: w pierwszym obserwuje się nieustalony wzrost temperatury, natomiast w drugim jej stabilizację. Wzrost temperatury samorozgrzania wynika ze zmian wartości modułów dynamicznych laminatu opisanych w Rozdziale 5. i powoduje zwiększenie amplitud odkształceń (por. np. z (Daiyan *i in.*, 2010)). Ilość energii dyssypacji zależy od wartości amplitud naprężeń (patrz np. (4.53)): gdy  $Q_d$  jest większa od ilości energii cieplnej odprowadzanej przez konwekcję obserwowany jest wzrost temperatury, a gdy ilość tych energii równoważy się następuje termiczny stan ustalony.

Oprócz wpływu zmian modułów dynamicznych na efekt samorozgrzania można wyróżnić jeszcze jeden czynnik. Wskutek wzrostu temperatury obserwuje się nieznaczne przesunięcie widma częstotliwościowego, co pociąga za sobą zmiany wartości częstotliwości własnych płyty. W przypadku znacznych przyrostów temperatury zmiany te spowodują wyjście częstotliwości wymuszenia poza obszar rezonansu (Jeyaraj *i in.*, 2009), co będzie skutkowało zarówno spadkiem wartości amplitudy drgań, jak i spadkiem temperatury samorozgrzania. Jednak ze względu na nieznaczne przyrosty temperatury obserwowane podczas eksperymentów zjawisko to zostało pominięte w pracy.

W celu zbadania poprzecznego rozkładu temperatury w próbce dokonano analizy poprzecznego profilu temperatury (wzdłuż linii  $L4$ ). Na Rys.6.17 przedstawiono wyniki analizy. Postać poprzecznego rozkładu temperatury widoczna zarówno na Rys.6.11, jak i na Rys.6.17 jest spowodowana przede wszystkim odprowadzeniem energii cieplnej z powierzchni bocznych próbki do otoczenia. Innymi przyczynami mogą być warunki kontaktu warstw laminatu oraz tzw. efekt brzegowy (Ochelski, 2004).



Rys. 6.16: Przykładowy wykres przyrostu temperatury samorozgrzania oraz aproksymacja danych pomiarowych



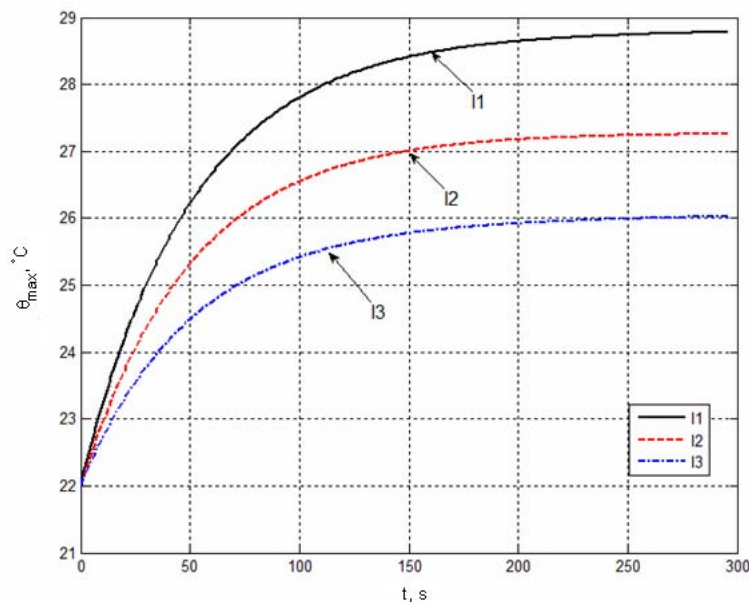
Rys. 6.17: Zmiana poprzecznego rozkładu temperatury samorozgrzania



Jak można zaobserwować, model aproksymacyjny wykazuje wysoką zgodność z danymi pomiarowymi: współczynniki  $r^2$  nie przyjmowały wartości niższych, niż 0.96. W przedstawionym przypadku prędkość wzrostu temperatury samorozgrzania w stanie nieustalonym wynosi ok.  $9\text{ }^\circ\text{C}/\text{min}$ , co potwierdza celowość uwzględnienia prędkości grzania przy wyznaczeniu parametrów dynamicznych laminatu oraz wprowadzenia współczynnika prędkości grzania do równania wyrażającego zasadę Arrheniusa (5.1).

### Analiza parametrów modelu empirycznego

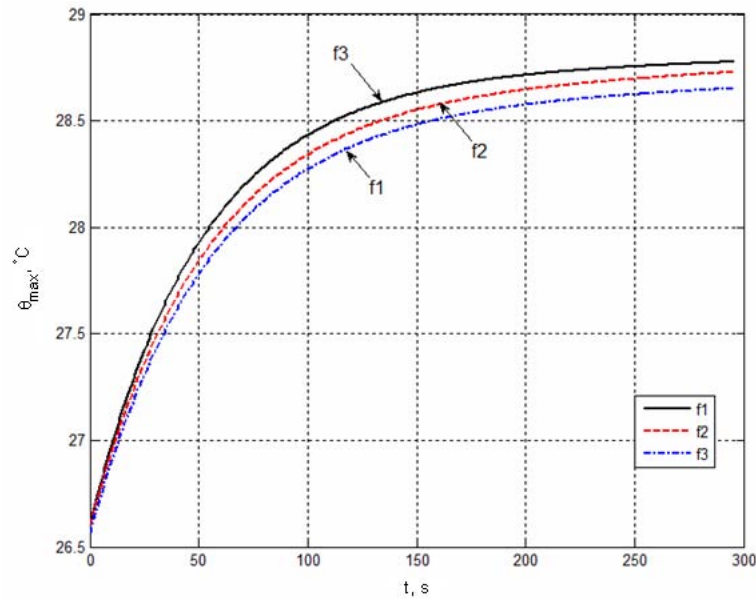
Otrzymane parametry modelu empirycznego (6.6) pozwalają określić zależności pomiędzy długością próbki i częstotliwością wymuszenia a temperaturą samorozgrzania. Zaobserwowano, że w miarę wzrostu długości badanych płyt zarówno temperatura samorozgrzania w stanie ustalonym, jak i jej gradient w stanie nieustalonym, maleją. Wynika to z mniejszych wartości naprężeń w miejscach ich koncentracji, a także z faktu, że im większa objętość badanej płyty, tym więcej energii potrzeba do zainicjowania procesu dyssypacji i obserwowania danej temperatury.



Rys. 6.18: Zależność temperatury samorozgrzania od długości płyty

Wyniki eksperymentalne dotyczące wpływu długości próbki na dynamikę temperatury samorozgrzania przedstawia Rys.6.18. Symbolami  $l_1$ ,  $l_2$  oraz  $l_3$  oznaczono próbki o długości roboczej odpowiednio: 180 mm, 225 mm i 280 mm. Drgania próbki wymuszano przy pierwszej częstotliwości własnej, wartości te można odnaleźć w Tabeli 6.1. W drugim rozpatrywanym przypadku, gdzie rozpatrywano wpływ częstotliwości wymuszenia na wartości i dynamikę temperatury samorozgrzania zmiany nie są tak oczywiste. Na charakterystykę temperatury samorozgrzania wpływają głównie dwa czynniki: z jednej strony przy drganiach dla wyższych częstotliwości własnych obserwowany jest spadek amplitud naprężeń, jednak z drugiej strony wzrost częstotliwości powoduje wzrost wartości modułu stratnego (patrz np. Rys.5.4), który bezpośrednio wpływa na temperaturę samorozgrzania (patrz np. (4.53)) i wzrasta zgodnie z zasadą TTS (5.3). Wyniki analizy





Rys. 6.19: Zależność temperatury samorozgrzania od częstotliwości wymuszenia

Tab. 6.3: Parametry modelu empirycznego (6.6)

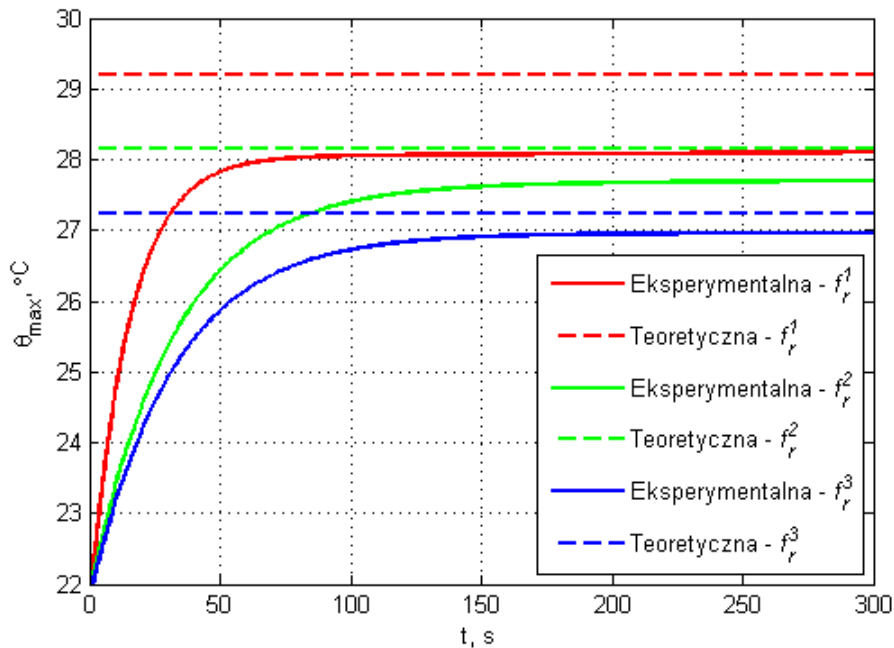
	$\Gamma_1, ^\circ\text{C}$	$\Lambda_1, 1/\text{s}$	$\Gamma_2, ^\circ\text{C}$	$\Lambda_2, 1/\text{s}$
l1	28.72	$9.77 \cdot 10^{-6}$	-6.700	-0.01967
l2	27.27	$6.47 \cdot 10^{-7}$	-5.281	-0.01996
l3	25.90	$1.83 \cdot 10^{-5}$	-3.887	-0.02000
f1	28.70	$9.77 \cdot 10^{-6}$	-2.100	-0.01967
f2	28.60	$1.61 \cdot 10^{-5}$	-1.999	-0.01885
f3	28.55	$1.30 \cdot 10^{-5}$	-1.985	-0.01850

zależności temperatury samorozgrzania od częstotliwości wymuszenia przedstawiono na Rys.6.19, gdzie  $f_1$ ,  $f_2$  i  $f_3$  oznaczają odpowiednio pierwszą drugą i trzecią częstotliwość własną drgań płyty o długości roboczej 180 mm. Wartości parametrów otrzymanych dzięki analizie wyników zastosowania modelu aproksymacyjnego (6.6) dla przypadków przedstawionych na Rys.6.18 oraz Rys.6.19, zestawiono w Tabeli 6.3.

Analizując wartości parametrów  $\Gamma_i$  i  $\Lambda_i$  zaobserwowano, że wraz ze wzrostem długości płyty wartości parametrów  $\Gamma_i$  maleją, a wartości parametrów  $\Lambda_i$  rosną. W przypadku wzrostu częstotliwości wymuszenia wartości wszystkich parametrów modelu maleją. Rozpatrując parametry modelu z punktu widzenia interpretacji fizycznej można wywnioskować, że różnica  $\Gamma_1 - \Gamma_2$  określa temperaturę początkową procesu samorozgrzania, a parametry  $\Lambda_i$  odpowiadające za kształt funkcji i prędkość jej wzrostu mogą być zinterpretowane jako prędkość grzania.

Tab. 6.4: Porównanie teoretycznych i eksperymentalnych wartości częstotliwości własnych

	$f_r^1$	$f_r^2$	$f_r^3$
Teoretyczne	233.64	615.17	1205.7
Eksperymentalne	262	733	1238



Rys. 6.20: Porównanie maksymalnej temperatury samorozgrzania przy trzech pierwszych częstotliwościach własnych otrzymanych z eksperymentu oraz wyznaczonych na podstawie modelu teoretycznego

## 6.4. Porównanie wyników teoretycznych i eksperymentalnych efektu samorozgrzania

W celu weryfikacji modelu teoretycznego zjawiska ustalonego samorozgrzania porównano wyniki teoretyczne oraz wyniki badań eksperymentalnych. Korzystając ze wzorów przedstawionych w Rozdziale 4.4 wyznaczono pierwsze trzy giętne częstotliwości własne dla badanych płyt kompozytowych. Dla tychże płyt wyznaczono częstotliwości własne w eksperymencie modalnym (Katunin i Fidali, 2012b). Wartości częstotliwości własnych uzyskano dla  $l_e = 180$  mm (patrz Rozdział 6.3). Otrzymane wyniki zestawiono w Tabeli 6.4.

Wartości sztywności stratnej otrzymano dla poszczególnych rozpatrywanych przypadków z krzywych wiodących dla sztywności stratnej. Rozkłady temperatury wyznaczono na podstawie modelu przedstawionego w Rozdziale 4.4. Aproksymacji wyników eksperymentalnych dokonano na podstawie (6.6). Otrzymane krzywe maksymalnej temperatury samorozgrzania przedstawiono na Rys. 6.20.

Przedstawione wyniki wskazują, że wartości temperatury samorozgrzania otrzymane

w wyniku eksperymentu są mniejsze od wartości wyznaczonych na podstawie modelu teoretycznego. Różnica ta jest powodem kilku czynników. Jedynie część energii dysypacji jest rozpraszana w postaci ciepła, pozostała część jest tracona m.in. na tarcie, odkształcenia plastyczne, kinetykę reakcji chemicznych (np. proces sieciowania) itd. Zastosowany model teoretyczny nie uwzględnia ww. zjawisk. Różnica w wynikach jest również spowodowana różnicami pomiędzy wartościami teoretycznymi i eksperymentalnymi częstotliwości własnych (Tabela 6.4). Zgodnie z zasadą TTS (5.3) wartości sztywności stratnej spadają wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia. Ten fakt wyjaśnia prędkość grzania badanych płyt kompozytowych pobudzanych do drgań przy poszczególnych częstotliwościach: gdy częstotliwość wymuszenia jest mniejsza, wartości sztywności stratnej są większe i z tego względu pola temperatury samorozgrzania osiągają stan ustalony w krótszym czasie. Dodatkowymi czynnikami mogącymi mieć wpływ na otrzymane różnice w wartościach częstotliwości własnych mogą być powodem ewentualnych mikrodefektów w próbkach; istotny wpływ na parametry materiałowe badanych próbek może mieć metoda oraz parametry procesu technologicznego ich wytwarzania. Ostatecznie, zastosowana metoda Warburtona do obliczeń wartości teoretycznych częstotliwości własnych nie jest metodą dokładną, a wartości stałych materiałowych dla badanych próbek wymagały przeprowadzenia homogenizacji przed przeprowadzeniem obliczeń, co również mogło mieć wpływ na jakość wyników.

## 6.5. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych dotyczących efektu samorozgrzania i zmienności temperatury samorozgrzania przy drgań wymuszeniu płyt kompozytowych przy częstotliwościach rezonansowych. Przeprowadzone badania eksperymentalne pozwoliły na ocenę zmienności pól temperatury oraz ich parametryczną analizę. Na podstawie sekwencji termogramów otrzymanych podczas pomiarów termowizyjnych wyznaczono charakter rozkładów temperatury samorozgrzania oraz ich zmienność, określono temperatury maksymalne oraz profile temperaturowe na powierzchni badanych próbek. Podczas eksperymentów dokonywano również pomiaru siły wymuszenia oraz prędkości odkształceń.

W celu analizy parametrycznej zarówno zmienności siły wymuszenia, jak i zmienności temperatury samorozgrzania otrzymane krzywe były aproksymowane funkcjami eksponencjalnymi, na podstawie tych funkcji zaproponowano modele empiryczne. Dokonując analizy parametrów modeli określono zależności funkcyjne pomiędzy temperaturą samorozgrzania i częstotliwością wymuszenia i długością próbek. Obserwacja przedstawionych zależności pozwoliła na analizę podstaw fizykalnych procesu samorozgrzania i interpretację parametrów modeli ze względu na zachodzące zjawiska podczas występowania efektu samorozgrzania. Określono m.in., że parametry przedeksponencjalne empirycznego modelu zmienności temperatury samorozgrzania wyznaczają cieplne warunki początkowe procesu, a parametry znajdujące się pod funkcją eksponencjalną określają prędkość grzania. Ponadto, zaobserwowano liniowe zależności pomiędzy temperaturą samorozgrzania

i innymi rozpatrywanymi parametrami, co potwierdza zachowanie materiału wg liniowo-lepkosprężystego modelu reologicznego.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów dokonano weryfikacji modeli teoretycznych zaproponowanych w Rozdziale 4. Otrzymane zależności funkcyjne i ich interpretacja są potwierdzone przez opis matematyczny efektu samorozgrzania i wyniki eksperymentów dynamicznych przedstawionych w Rozdziale 5. Różnice pomiędzy wynikami teoretycznymi i eksperymentalnymi zostały dokładnie przeanalizowane, zinterpretowano możliwe przyczyny powstawania różnic w obu modelach. Przedstawione modele empiryczne mogą być wykorzystane w celu predykcji rozkładów temperatury samorozgrzania na powierzchni płyt kompozytowych w zależności od wartości parametrów ich wymuszenia i długości.

## Rozdział 7

# Ocena zmęczenia laminatów polimerowych

W rozdziale przeanalizowano wpływ efektu samorozgrzania na proces zmęczenia laminatów, a szczególnie jego intensyfikacji w zależności od temperatury.

W dalszej części rozdziału przedstawiono opis teoretyczny zmęczenia laminatu z uwzględnieniem temperatury samorozgrzania: rozpatrzono wstępną koncepcję opartą o metodę pseudo-odkształceń oraz model bazujący na zmianie sztywności dynamicznej struktury. Przedstawione rozważania teoretyczne zweryfikowano eksperymentalnie, a teoretyczne i eksperymentalne wyniki porównano między sobą. Wyniki cząstkowe zostały przedstawione w pracach (Katunin, 2011a; Katunin i Fidali, 2012a; Katunin, 2012).

### 7.1. Wstępna koncepcja modelu zmęczeniowego

Proces zmęczenia polimerów i laminatów polimerowych może występować w dwóch odmianach, w zależności od wartości parametrów obciążenia (Ratner *i in.*, 1969; Bellenger *i in.*, 2006). W przypadku, gdy przyrost temperatury samorozgrzania jest nieznaczny i stabilizuje się w krótkim czasie następuje proces *zmęczenia mechanicznego* intensyfikowany przez temperaturę. Jednak, gdy wzrost temperatury jest znaczący w procesie zmęczenia dominuje składowa cieplna i zachodzi proces *zmęczenia cieplnego* (Ratner *i in.*, 1969; Lesieutre i Govindswamy, 1995; Chung, 2010).

Zgodnie z przedstawioną w Rozdziale 4 zasadą superpozycji Boltzmanna zachowanie liniowo-lepkosprężystych laminatów polimerowych może być opisane poprzez modyfikację równania (4.2) (por. (Sullivan, 2006)):

$$D\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) + \frac{n}{\pi} \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-t', \theta) \psi(t') dt', \quad (7.1)$$

gdzie  $n$  jest stałą materiałową (w  $s^{-1}$ ), oraz

$$\psi(t) = \int_{n_0 t}^{\infty} \frac{\cos(z - n_0 t)}{z} dz. \quad (7.2)$$

Zgodnie z metodą pseudo-odkształceń zaproponowaną w (Schapery, 1990) i rozwijaną w (Sullivan, 2006) równanie (7.1) może być przedstawione następująco:

$$\varepsilon_{ij}^R(t) = \frac{1}{D^R} \int_0^t D(\omega, \theta, t-t') \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt'} t', \quad (7.3)$$

gdzie  $\varepsilon_{ij}^R$  jest pseudo-odkształceniem,  $D^R$  jest sztywnością początkową.

Funkcja naprężeń może być przedstawiona w postaci podobnej do prawa Hooke'a z uwzględnieniem efektu samorozgrzania:

$$\sigma(t) = D^R [\varepsilon^R(t) + \varepsilon^\theta(t)]. \quad (7.4)$$

Zakłada się, że proces samorozgrzania jest w stanie ustalonym, a rozkład temperatury samorozgrzania jest stały.

Zgodnie z koncepcją kinetyczną gęstość energii zmęczenia może być zdefiniowana jako iloczyn sumy funkcji pseudo-odkształceń i funkcji odkształceń pochodzących od efektu samorozgrzania oraz funkcji zniszczenia:

$$W^R = \frac{M(S) (\varepsilon^R + \varepsilon^\theta)^2}{2}, \quad (7.5)$$

gdzie  $M(S)$  jest funkcją konstytutywną zniszczenia. Z uwagi na rozpatrywany model lep-kosprężysty  $M(S)$  jest funkcją zależną od czasu. Ostatecznie funkcja pseudo-odkształceń może być zapisana jako (Sullivan, 2008):

$$\varepsilon^R(t) = \frac{D}{D^R} \left[ \left(1 - \frac{m}{2}\right) (\varepsilon_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(0)) + \frac{m}{n} \int_0^t \phi(n_0(t-t')) \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt'} dt' \right], \quad (7.6)$$

gdzie

$$\phi(n_0 t) = \int_{n_0 t}^{\infty} \frac{\sin(z - n_0 t)}{z} dz, \quad m = \frac{n}{n_0}. \quad (7.7)$$

Funkcja zniszczenia może być oszacowana na podstawie prawa zniszczenia Kachanova (Kachanov, 1958):

$$\frac{dS}{dt} = C \left( \frac{\sigma(t)}{1-S} \right)^\eta, \quad (7.8)$$

gdzie  $C$  i  $\eta$  są empirycznymi stałymi materiałowymi. Zakładając równomierną degradację oraz całkując (7.8) uzyskuje się funkcję zniszczenia zależną od czasu:

$$S(t) = 1 - \left[ 1 - C(\eta + 1) \int_0^t \sigma(t)^\eta dt \right]^{\frac{1}{\eta+1}}. \quad (7.9)$$

Przy założeniu, że  $S(t) = 1$  przy całkowitym zniszczeniu i biorąc pod uwagę (7.9) można wyznaczyć czas zniszczenia:

$$t_R = \frac{1}{C(\eta + 1)\sigma_0^\eta}. \quad (7.10)$$

Rozwiązując (7.9) dla  $C(\eta + 1)$  i biorąc pod uwagę (7.5) funkcję zniszczenia można zapisać jako:

$$S(t) = 1 - \left\{ 1 - \frac{\int_0^t [\varepsilon^R(t) + \varepsilon^\theta(t)]^\eta dt}{\int_0^{t_R} [\varepsilon^R(t) + \varepsilon^\theta(t)]^\eta dt} \right\}^{\frac{1}{\eta+1}}. \quad (7.11)$$

Wartość funkcji  $S(t)$  określa stopień degradacji, gdzie  $S(t) = 0$  oznacza strukturę nieuszkodzoną, a  $S(t) = 1$  oznacza strukturę zniszczoną.

## 7.2. Eksperymentalna ocena zmęczenia laminatów polimerowych

Weryfikacja zaproponowanego w Rozdziale 7.2 modelu opisującego zmęczenie kompozytów polimerowych podczas występowania efektu samorozgrzania została przeprowadzona na stanowisku eksperymentalnym przygotowanym do tego celu. Opis wyników cząstkowych eksperymentu można znaleźć w pracy (Katunin i Fidali, 2012a).

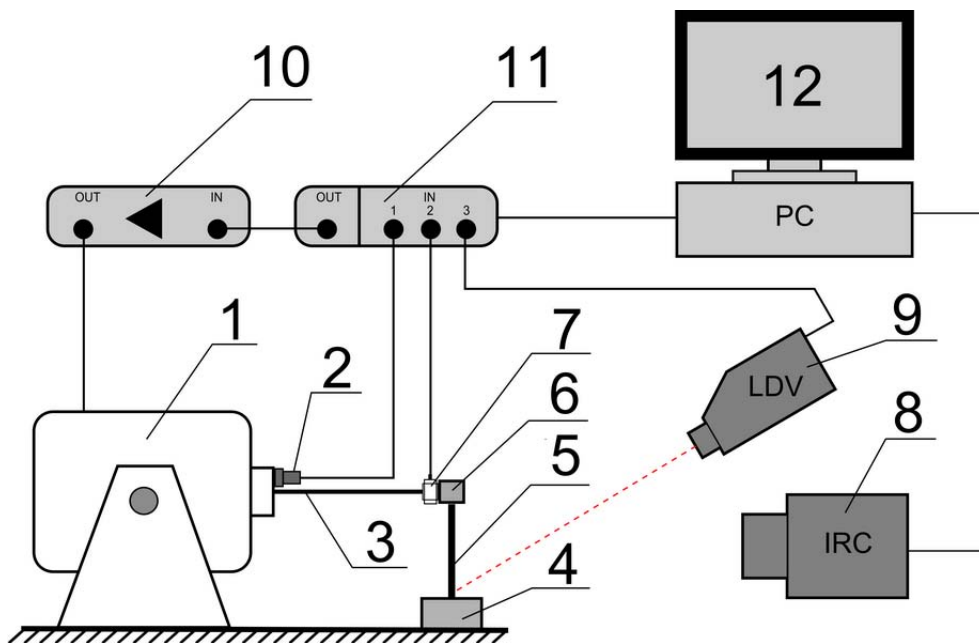
### 7.2.1. Przygotowanie i realizacja eksperymentów zmęczeniowych

Do badań zmęczeniowych wykorzystano próbki z laminatu o osnowie polimerowej, o identycznych właściwościach jak przy badaniach przedstawionych w Rozdziale 6. Wymiary próbek, na których wykonywano badania, były następujące: grubość  $2.5 \pm 0.2$  mm, szerokość 10 mm oraz długości robocze  $l_e$  (długości całkowite pomniejszone o części próbek zamocowane w uchwytach) 40, 45, 50 i 55 mm. Próbki były poddane wymuszeniu cyklicznemu przy częstotliwościach 20, 25 i 30 Hz. Ze względu na możliwe znaczne rozbieżności w wynikach przy testach zmęczeniowych do badań przygotowano 240 próbek, po 20 próbek dla każdego rozpatrywanego przypadku.

Badania zmęczeniowe przeprowadzono na specjalnie zbudowanym do tego celu stanowisku eksperymentalnym (Rys.7.1). Schemat stanowiska wraz z wyszczególnieniem jego najważniejszych elementów przedstawiono na Rys.7.2. Jak pokazano na Rys.7.2 badana próbka 5 była zamocowana w uchwycie 4 i pobudzana do drgań przy pomocy wzbudnika elektrodynamicznego 1 poprzez popychacz 3 zakończony uchwytem 6, który był połączony z popychaczem przez czujnik siły 7. W celu zapewnienia izolacji cieplnej od generowanego ciepła przez badane próbki podczas eksperymentu szczęki uchwytu 4 zostały wykonane z bakelitu, który cechuje się bardzo niską wartością współczynnika przewodnictwa cieplnego. Każda próbka była utwierdzona w uchwycie 4 z jednakowym momentem dokręcenia śruby zaciskającej równym 20 Nm, co pozwalało na przeprowadzenie eksperymentów z powtarzalnymi warunkami. Wymuszenie było kontrolowane przy pomocy akcelerometru 2. Prędkości odkształceń próbki były mierzone przy pomocy punktowego wibrometru laserowego w miejscu największej koncentracji naprężeń (przy utwierdzeniu próbki). Czujnik siły i akcelerometr zostały połączone przez moduły kondycjonowania sygnałów do wielokanałowego modułu akwizycji danych 11, który z kolei

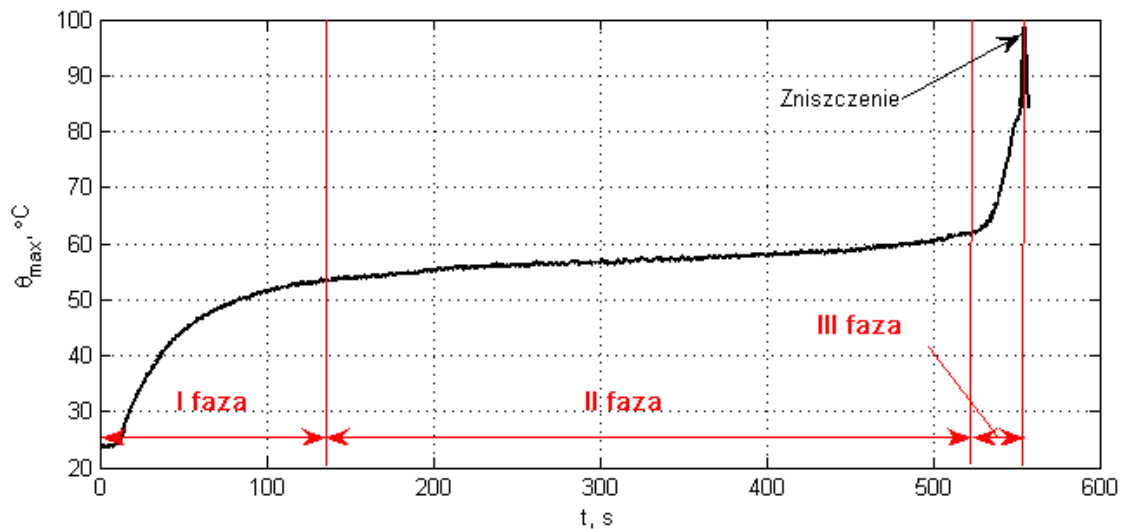


Rys. 7.1: Stanowisko do badań zmęczeniowych



Rys. 7.2: Schemat stanowiska do badań zmęczeniowych





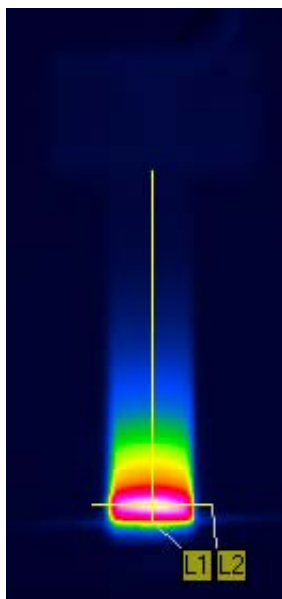
Rys. 7.3: Przykładowy przebieg temperatury samorozgrzania podczas zmęczenia cieplnego z podziałem na fazy

był połączony z komputerem 12. Sterowanie pomiarami oraz akwizycja danych realizowane były za pomocą przygotowanej do celów badań aplikacji w środowisku LabView. Aplikacja umożliwiała ustawienie oraz kontrolę wymuszenia poprzez wyjście analogowe wielokanałowego modułu akwizycji sygnałów, a sygnał wymuszenia był przekazywany do wzbudnika elektrodynamicznego przez wzmacniacz 10. Akwizycja sygnałów odbywała się przy częstotliwości próbkowania 8 kHz. Podczas eksperymentów pomiaru rozkładów temperatury oraz ich zmienności dokonywano przy pomocy kamery termowizyjnej 8. Sekwencje obrazów termowizyjnych były zapisywane z częstotliwością 1 klatki na sekundę. Dodatkowo wszystkie urządzenia pomiarowe były podłączone do komutatora, który zapewniał synchronizację czasową danych przy akwizycji. Próbkę były malowane czarną matową farbą na powierzchni obserwowanej przez kamerę termowizyjną w celu poprawienia emisyjności i redukcji refleksyjności. Emisyjność próbek określono eksperymentalnie jako równą 0.9. Po przeciwnej stronie próbek w miejscu pomiaru prędkości odkształceń naklemano taśmę refleksyjną w celu skupienia wiązki laserowej wibrometru i redukcji szumów pomiarowych.

### 7.2.2. Określenie faz zmęczenia

Ze względu na warunki wymuszenia drgań elementów kompozytowych ich degradacja i zmęczenie może rozwijać się wg dwóch scenariuszy: jako zmęczenie mechaniczne lub zmęczenie cieplne. Typowa charakterystyka temperaturowa podczas zmęczenia cieplnego została przedstawiona na Rys.7.3.

Na podstawie analizy przebiegu temperatury samorozgrzania podczas zmęczenia cieplnego można określić trzy fazy zmęczenia. Fazy te są ściśle związane ze zmiennością wartości modułów dynamicznych w zależności od temperatury. W pierwszej fazie obserwowany jest typowy wzrost temperatury samorozgrzania powodujący spadek wartości modułu zachowawczego i wzrost wartości modułu stratnego (patrz wyniki badań



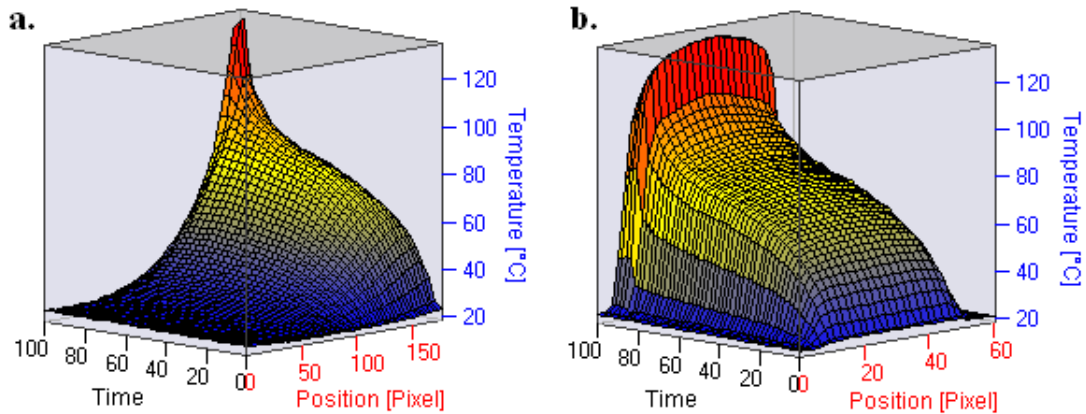
Rys. 7.4: Pozycjonowanie profili temperaturowych na obrazach termowizyjnych

w Rozdziale 5). Po ustaleniu temperatury samorozgrzania na początku drugiej fazy (co jest spowodowane bilansem pomiędzy energią dyssypowaną i energią odprowadzaną do środowiska w wyniku konwekcji) obserwowany jest jej nieznaczny wzrost o charakterze liniowym. W tym przedziale zachodzi zarówno zmęczenie mechaniczne, jak i cieplne, potęgowane podwyższoną temperaturą oraz mechaniczną degradacją kompozytu. W trzeciej fazie temperatura gwałtownie wzrasta w krótkim przedziale czasowym aż do nastąpienia zniszczenia próbki. Z obserwacji wynika, że początek trzeciej fazy jest powiązany z wystąpieniem propagującego uszkodzenia mechanicznego (pęknięcia) w miejscu frontu najwyższej temperatury oraz największych naprężeń. Powstanie uszkodzenia dodatkowo intensyfikuje proces wzrostu temperatury ze względu na tarcie występujące w szczelinie pęknięcia. Zniszczenie następuje, gdy temperatura samorozgrzania jest bliska temperatury zeszklenia polimeru. Należy zauważyć, że temperatura na powierzchni próbki będzie zawsze wyższa od temperatury w płaszczyźnie środkowej laminatu, co jest spowodowane niskim współczynnikiem dyfuzyjności cieplnej i konwekcją. Prezentowany kształt krzywej samorozgrzania i podział na fazy jest notowany m.in. w pracach (Oldyrev i Tamuzh, 1969; Ferreira *i in.*, 1999; Toubal *i in.*, 2006; Vallons *i in.*, 2007).

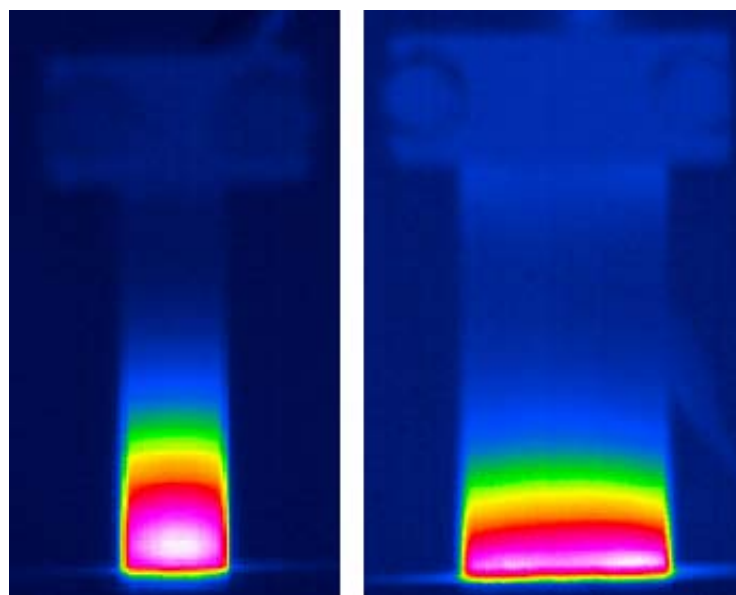
### 7.2.3. Analiza profili i rozkładów temperatury

W celu oceny zmian temperatury samorozgrzania przeprowadzono analizę profili temperaturowych otrzymanych z termogramów. Pod uwagę brano profile temperaturowe: pionowy (*L1*) i poziomy (*L2*) – Rys.7.4, a zmienność tych profili była obserwowana w czasie całego eksperymentu. Przykładowe powierzchnie zmienności profili temperaturowych w czasie przedstawiono na Rys.7.5.

Analizując pionowy profil temperaturowy można zauważyć, że gradient temperatury na długości próbki ma większe wartości bezpośrednio w miejscu jej utwierdzenia i spada



Rys. 7.5: Przykładowe profile temperaturowe w kierunku (a) wzdłużnym i (b) poprzecznym próbki oraz ich zmienność w czasie



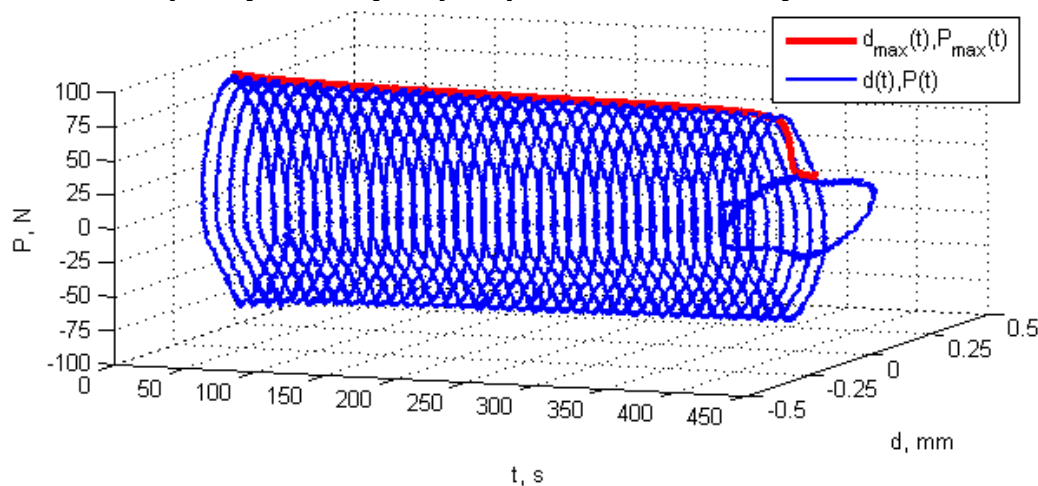
Rys. 7.6: Porównanie rozkładów temperatury dla próbek o różnej szerokości

w kierunku punktu przyłożenia obciążenia. Jest to spowodowane rozkładem naprężeń w próbce, proporcjonalnych do temperatury samorozgrzania. Wynika z tego, że pionowy profil temperaturowy i jego zmienność są zdeterminowane głównie przez przyłożone naprężenia. W przypadku poziomego profilu temperaturowego najwyższe wartości temperatury samorozgrzania można odczytać w środku próbki, przy czym temperatura spada w kierunku brzegów próbki. Na kształt tego profilu mają wpływ dwa zjawiska. Z jednej strony spadek temperatury wynika z obecności efektu brzegowego na swobodnych krawędziach próbki w świetle teorii płyt Reissnera-Mindlina (Lovinger i Frostig, 2004). Efekt ten powoduje spadek naprężeń przy krawędziach, a tym samym spadek temperatury samorozgrzania. Z drugiej strony spadek temperatury jest wynikiem konwekcji na swobodnych krawędziach próbki. W celu weryfikacji tych założeń przeprowadzono dodatkowe testy mające na celu porównanie rozkładów temperatury dla próbek różnej szerokości. Porównywano próbki o szerokości 10 i 25 mm. Obrazy termowizyjne dla obu próbek przedstawiono na Rys.7.6.

### 7.2.4. Analiza parametryczna zmienności historii obciążeń i pętli histerezy

Na podstawie otrzymanych przebiegów historii obciążeń dokonano analizy parametrycznej procesu zmęczenia. Przebiegi siły wymuszenia poddano transformacji Hilberta w celu otrzymania obwiedni sygnałów, a następnie zastosowano model empiryczny (6.3) do aproksymacji otrzymanych krzywych obwiedni. Analizując parametry modelu (6.3) dokonano następujących obserwacji. Podobnie, jak w przypadku przedstawionego powyżej scenariusza zmęczenia cieplnego laminatu z podziałem na trzy fazy obwiednie siły wymuszenia wykazują ten sam charakter. Początkowy spadek wartości siły wymuszenia jest wynikiem samorozgrzania i tym samym wzrostu temperatury i spadku wartości modułu zachowawczego. Wartość parametru  $\Omega_1$  spada wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia, co jest efektem wzrostu wartości sztywności stratnej, dlatego ten parametr odpowiada przede wszystkim za pierwszą fazę zmęczenia. Wartość parametru  $\Omega_2$  wzrasta wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia, co jest spowodowane zmęczeniem mechanicznym w drugiej fazie. Wartości parametrów  $\Xi_1$  i  $\Xi_2$  spadają wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia i determinują prędkość spadku wartości siły wymuszenia odpowiednio w pierwszej i drugiej fazie zmęczenia. Charakter zmienności wartości parametrów modelu jest liniowy, zgodny z liniowo-lepkosprężystym zachowaniem badanego kompozytu.

Na podstawie analizy sygnałów prędkości odkształceń i siły wymuszenia możliwe było przedstawienie wyników w postaci pętli histerezy zmieniających się w czasie. Sygnały prędkości odkształceń zostały scałkowane w celu otrzymania przebiegów odkształceń. Przykładowy wykres zmienności pętli histerezy podczas zmęczenia cieplnego przedstawiono na Rys.7.7. Dla przejrzystości wyników wykreślono pętle histerezy co 10 s. Czerwona linia na Rys.7.7 przedstawia wartości szczytowe siły, stanowiące obwiednię siły wymuszenia otrzymaną wcześniej z wykorzystaniem transformacji Hilberta.



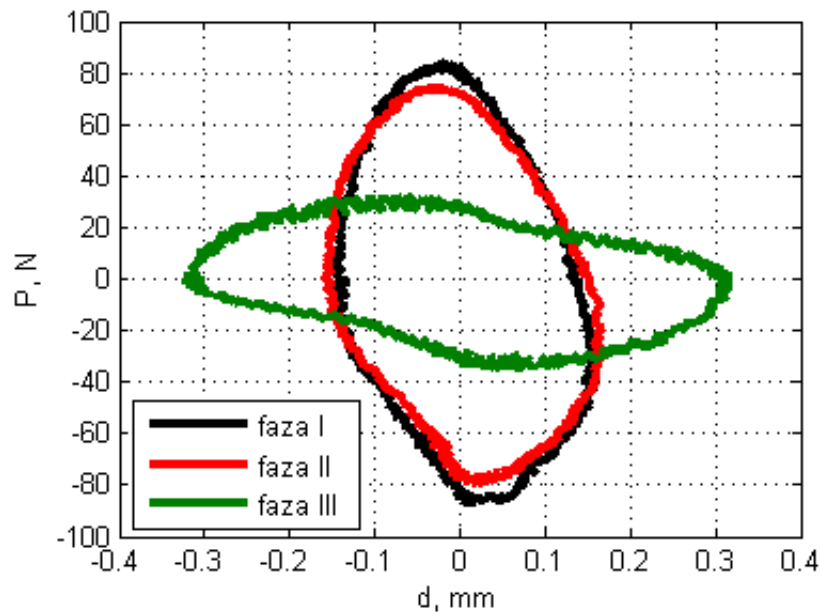
Rys. 7.7: Przykładowy wykres zmienności pętli histerezy podczas zmęczenia cieplnego

W celu uproszczenia interpretacji wyników poszczególne pętle histerezy w różnych fazach zmęczenia cieplnego przedstawiono na Rys.7.8. Pierwsza pętla histerezy była wykreślona na podstawie danych pochodzących z początku procesu zmęczenia (faza I),

druga – z końca fazy II i trzecia – z momentu zniszczenia próbki. Jak można zaobserwować, pomiędzy pętlami histerezy pochodzącymi z pierwszych dwóch faz zmęczenia są różnice. W drugiej fazie zmęczenia odkształcenia są większe przy mniejszej wartości siły wymuszenia, co jest spowodowane spadkiem wartości modułu zachowawczego na skutek samorozgrzania. W trzeciej fazie obserwowany jest znaczny wzrost odkształceń przy znacznej redukcji wartości siły wymuszenia, co jest spowodowane wystąpieniem pęknięcia.

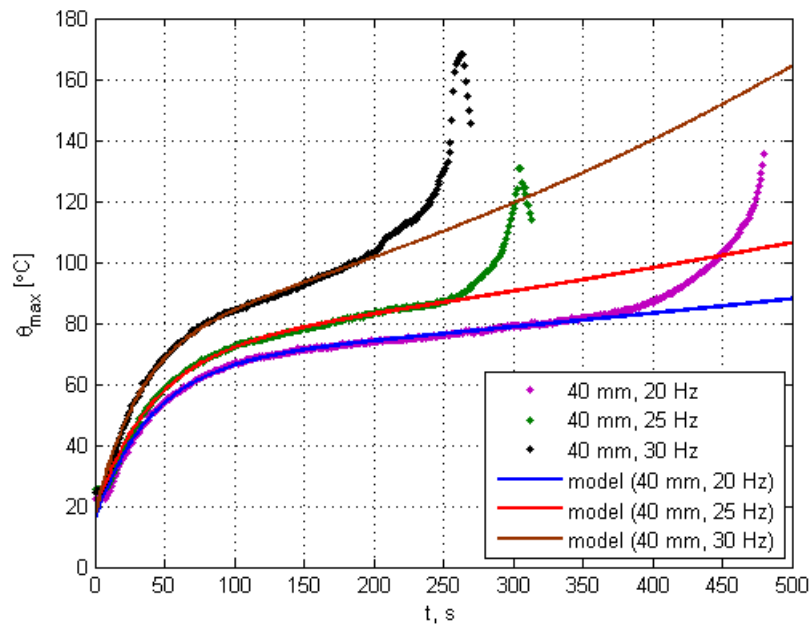
### 7.2.5. Analiza parametryczna zmienności temperatury

Otrzymane obrazy termowizyjne były poddane analizie w celu identyfikacji zależności parametrycznych temperatury samorozgrzania podczas procesu zmęczenia. Dla przeprowadzenia analizy wybrano jedną sekwencję obrazów termowizyjnych spośród dwudziestu dla każdego przypadku unikalnych zestawów wartości parametrów eksperymentu. Sekwencja była wybierana z otrzymanych przebiegów bazując na wartości mediany. Maksymalna temperatura samorozgrzania była wyznaczona na podstawie przecięcia linii profili temperaturowych  $L1$  i  $L2$  (Rys.7.4). Otrzymane przebiegi maksymalnej temperatury samorozgrzania w czasie były aproksymowane na podstawie modelu (6.6). Przykładowe wyniki aproksymacji przedstawiono na Rys.7.9. Wyznaczone parametry modelu zestawiono w Tabeli 7.1.



Rys. 7.8: Pętle histerezy w różnych fazach zmęczenia cieplnego

Na podstawie parametrów modelu (6.6) uzyskanych z aproksymacji przeprowadzono analizę zależności temperatury samorozgrzania od częstotliwości wymuszenia oraz długości próbek. Zaobserwowano, że podczas wzrostu częstotliwości wymuszenia wartości parametrów  $\Gamma_1$  i  $\Lambda_1$  wzrastają, podczas gdy wartości parametrów  $\Gamma_2$  i  $\Lambda_2$  maleją. W przypadku wzrostu długości próbek wszystkie parametry wykazują tendencję spadkową. Jak poprzednio, suma wartości parametrów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  określa temperaturę początkową procesu samorozgrzania, a wartości parametrów  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$  określają prędkość grzania. Dodatkowo,



Rys. 7.9: Przykładowe wyniki aproksymacji przebiegów temperatury samorozgrzania podczas zmcęzenia

Tab. 7.1: Parametry modelu (6.6) dla przebiegów temperatury samorozgrzania przy zmcęczeniu

$l_e$ , mm	$f$ , Hz	$\Gamma_1$ , °C	$\Lambda_1$ , s <sup>-1</sup>	$\Gamma_2$ , °C	$\Lambda_2$ , s <sup>-1</sup>	$e_{apr}$ , %
40	20	66.75	0.0005517	-50.78	-0.02466	0.9971
	25	71.03	0.0008077	-52.32	-0.02354	0.9967
	30	73.91	0.001599	-56.9	-0.0315	0.9966
45	20	57.84	0.0004512	-39.96	-0.02842	0.9956
	25	62.56	0.0006852	-41.69	-0.02399	0.9983
	30	67.13	0.0007397	-48.94	-0.0277	0.9970
50	20	57.22	0.0001387	-37.15	-0.02348	0.9947
	25	59.32	0.0008112	-40.91	-0.02471	0.9983
	30	57.71	0.001166	-40.85	-0.02574	0.9985
55	20	55.30	0.0001808	-37.02	-0.02606	0.9926
	25	57.62	0.0004732	-38.59	-0.02582	0.9970
	30	59.13	0.0009015	-39.22	-0.02458	0.9983

Tab. 7.2: Charakterystyczne temperatury i liczby cykli podczas zmęczenia cieplnego

$l_e$ , mm	$f$ , Hz	$\theta_c$ , °C	$n_c$	$\theta_b$ , °C	$n_b$	$\theta_g - \theta_c$ , °C
40	20	80.06	6600	135.5	9602	69.59
	25	86.63	6200	130.9	7627	63.54
	30	98.69	5460	168.1	7923	51.87
45	20	68.53	7520	113.3	9762	81.12
	25	74.78	6550	121.3	8902	75.39
	30	77.07	5730	125.3	8283	73.49
50	20	59.93	6700	111.3	10222	89.72
	25	77.96	8425	108.2	10177	72.21
	30	78.56	7950	114.9	9513	72.00
55	20	59.21	7560	110.3	11400	90.44
	25	67.32	8225	121.0	11452	82.85
	30	75.03	7950	123.1	10500	75.53

parametry  $\Gamma_1$  i  $\Lambda_1$  odpowiadają za wartość temperatury i prędkość grzania w drugiej fazie zmęczenia, a parametry  $\Gamma_2$  i  $\Lambda_2$  odpowiadają za wartość temperatury i prędkość grzania w pierwszej fazie zmęczenia. Zaobserwowano, że moment, w którym następuje rozbieżność krzywej eksperymentalnej i krzywej z modelu empirycznego determinuje koniec drugiej i początek trzeciej fazy zmęczenia (patrz Rys.7.9), co także jest widoczne na obrazach termowizyjnych i objawia się w postaci koncentracji izoterm w obszarze wystąpienia uszkodzenia.

### 7.2.6. Wyznaczenie temperatur krytycznych

Analiza krzywych temperatury samorozgrzania i ich podział na trzy obszary pozwala na określenie charakterystycznych temperatur będących granicami poszczególnych faz zmęczenia cieplnego. Podobne podejście można odnaleźć w pracach (Oldyrev *i in.*, 1977; Oldyrev, 1981; Oldyrev, 1987).

Na podstawie analizy krzywych temperatury samorozgrzania podczas zmęczenia oraz ich aproksymacji przyjęto za temperaturę krytyczną granicę pomiędzy fazą II i fazą III procesu zmęczenia cieplnego. Takie założenie jest uwarunkowane rozbieżnością krzywych temperatury samorozgrzania i krzywych aproksymacji w danym punkcie (patrz Rys.7.9) oraz jest zgodne z założeniami autorów prac cytowanych powyżej. Temperaturą krytyczną jest temperatura, po przejściu której następuje gwałtowny wzrost temperatury samorozgrzania, w wyniku którego dochodzi do zniszczenia elementu. W Tabeli 7.2 zestawiono wartości temperatur krytycznych oraz odpowiadające im liczby cykli w zależności od częstotliwości wymuszenia i długości próbek. Przedstawiono także temperatury osiągnięte przy zniszczeniu wraz z odpowiadającą im liczbą cykli oraz różnicą wartości temperatury zeszklenia wyznaczonych na podstawie krzywych wiodących modułu stratnego (Rys.5.10) i temperatur krytycznych (Katunin, 2012).

Na podstawie powyższego zestawienia można zauważyć, że  $\theta_c \equiv \theta_b$ , a poszczególne

Tab. 7.3: Kąty nachylenia krzywych temperatury samorozgrzania w II fazie zmęczenia

$l_e$ , mm	40			45		
$f$ , Hz	20	25	30	20	25	30
$\iota$ , rad	0.04478	0.07477	0.18950	0.03034	0.05390	0.06261
$l_e$ , mm	50			55		
$f$ , Hz	20	25	30	20	25	30
$\iota$ , rad	0.00914	0.06201	0.09576	0.01157	0.03243	0.06976

temperatury charakterystyczne wykazują liniową zależność od częstotliwości wymuszenia i długości próbek. Warto zaznaczyć, że istnieje związek pomiędzy  $\theta_b$  i  $\theta_g$  oraz  $\theta_c$  i  $\theta_g$  i z uwagi na to wartości  $\theta_c$  są zdeterminowane przez częstotliwość wymuszenia oraz wartość przyłożonej siły wymuszenia. W przypadku  $\theta_c$  liczbę cykli do zniszczenia oraz wartość temperatury przy zniszczeniu w dużej mierze determinuje rozwój uszkodzenia powstającego na początku fazy III zmęczenia cieplnego. Z tego względu nie jest możliwa dokładna ocena zachowania laminatu w stadium zniszczenia. Z punktu widzenia eksploatacji elementów kompozytowych, w których występuje efekt samorozgrzania najistotniejszą jest temperatura krytyczna, po przekroczeniu której następuje inicjacja i intensywny rozwój uszkodzenia aż do zniszczenia.

Na podstawie otrzymanych krzywych zmiany temperatury samorozgrzania można wyznaczyć zależności kąta nachylenia krzywych w II fazie od parametrów wejściowych oraz liczby cykli do zniszczenia. Kąty nachylenia wyznaczono z liniowej regresji krzywych temperatury samorozgrzania i zestawiono w Tabeli 7.3.

Na podstawie Tabel 7.2 i 7.3 można wyznaczyć empiryczną funkcję  $\iota(f)$  mając na uwadze zasadę kinetyczną Arrheniusa (5.1) oraz wyniki badań eksperymentalnych przedstawione w Rozdziałach 6.3 i 7.2, na podstawie których stwierdzono liniową zależność pomiędzy temperaturą samorozgrzania i częstotliwością wymuszenia.

### 7.3. Modele zmęczenia laminatów z uwzględnieniem efektu samorozgrzania

Koncepcja przedstawiona w Rozdziale 7.1 została oparta na podejściu Tarleji (Talreja, 1981; Akshantala i Talreja, 2000) i Schapery'ego (Schapery, 1990), jednak jej zastosowanie ma pewne ograniczenia. Ze względu na definicję gęstości energii zniszczenia (7.5) przedstawiona koncepcja może być zastosowana do izotropowych materiałów liniowo-lepkosprężystych i do pewnej klasy materiałów nieliniowo-lepkosprężystych (Kumar i Talreja, 2003). Ponadto, model nie uwzględnia zmian wartości stałych materiałowych pod wpływem parametrów wymuszenia i warunków otoczenia.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań teoretycznych (Rozdział 4) oraz badań eksperymentalnych (Rozdziały 5 i 6) wywnioskowano, że parametrem najwierniej oddającym zachodzące zmiany w procesie zmęczenia cieplnego może być zespolony moduł dynamiczny lub jego składowe zależne od parametrów wymuszenia oraz warunków oto-



czenia. Z tego względu jeden z modeli zmęczenia kompozytów polimerowych przedstawiono w tym Rozdziale w oparciu o moduł zachowawczy. Model teoretyczno-empiryczny opiera się częściowo na modelu teoretycznym nieustalonego samorozgrzania oraz częściowo na związkach uzyskanych z krzywych temperatury samorozgrzania.

### 7.3.1. Empiryczny model zmęczenia

Koncepcja zmiany wartości modułu materiału jest często wykorzystywana do reprezentacji stopnia degradacji kompozytów polimerowych (Subramanian *i in.*, 1995; Echtermeyer *i in.*, 1995; Biermann *i in.*, 2001; Toubal *i in.*, 2006). Koncepcja ta może być wykorzystana w niniejszej pracy po dokonaniu modyfikacji opisu rozpatrywanego procesu zmęczenia cieplnego i zastąpieniu modułu sprężystości przez dynamiczny moduł zachowawczy.

Idea wykorzystania modułu dynamicznego do opisu zmęczenia laminatów polimerowych została przedstawiona w pracach (Gibson *i in.*, 1972; Bełzowski, 2002b; Steinberger *i in.*, 2006), jednak autorzy ograniczyli się jedynie do interpretacji wyników eksperymentalnych. Autorzy pracy (Zhang i Hartwig, 2002) wykorzystali współczynnik stratności do opisu zmęczenia kompozytu, przy czym na podstawie wyników eksperymentalnych zostały przedstawione wnioski bez dalszej próby opisu funkcyjnego.

Rozpatrywany model można zaliczyć do grupy modeli opartych na funkcji zniszczenia (patrz Rozdział 2.5). Model ten w ogólnej postaci odpowiada modelowi Fitzgeralda-Wanga (2.58). W przypadku, gdy znane są charakterystyki dynamiczne badanego materiału, np. krzywe wiodące opisujące jego zachowanie wraz ze zmianą badanych wartości parametrów (patrz Rozdział 5) zależność (2.58) może być zmodyfikowana do postaci:

$$S = 1 - \frac{E'(f, \theta, \beta)}{E'_0(f, \theta, \beta)}, \quad (7.12)$$

gdzie funkcja zniszczenia  $S$  uwzględnia stosunek modułu zachowawczego (zależnego od częstotliwości, temperatury i prędkości grzania) w danej chwili do tegoż modułu w stadium początkowym. Model opisuje postęp degradacji w przedziale  $[1, 0]$ , jednak, jak pokazały badania eksperymentalne (patrz Rozdział 7.2), zniszczenie następuje przy  $E'_0(f, \theta, \beta) \gg 0$ . Dlatego równanie (7.12) powinno uwzględniać wartość krytyczną  $E'_b(f, \theta, \beta)$ , przy której następuje zniszczenie:

$$S = 1 - \frac{E'_0(f, \theta, \beta) - E'(f, \theta, \beta)}{E'_0(f, \theta, \beta) - E'_b(f, \theta, \beta)}. \quad (7.13)$$

Przy zmianie wartości  $E'_b(f, \theta, \beta)$  na wartość modułu zachowawczego na granicy II i III fazy zmęczenia  $E'_c(f, \theta, \beta)$  w równaniu (7.13) (na podstawie badań eksperymentalnych  $\theta_c \approx 0.5\theta_g$ ) model będzie opisywać postęp degradacji do wystąpienia uszkodzenia.

### 7.3.2. Model teoretyczno-empiryczny zmęczenia i algorytm wyznaczania cyklu życia laminatu

Na podstawie przeprowadzonych badań teoretycznych oraz uwzględniając przyjęty trójfazowy model zmęczenia cieplnego przy opisie wyników badań eksperymentalnych można

określić zależności zmiany temperatury samorozgrzania w stosunku do cyklu życia laminatu oraz na tej podstawie zaproponować teoretyczno-empiryczny model zmęczenia cieplnego.

Proces zmęczenia cieplnego laminatu składa się z trzech faz, przy czym każda faza ma inną naturę fizyczną i potrzebuje odpowiedniego opisu. W pierwszej fazie zmęczenia dominuje wpływ efektu samorozgrzania, pole temperatury może być opisane wg równania (4.35) przy osiągnięciu stanu ustalonego, czyli temperatury na granicy faz I i II,  $\theta_a$ . Aby wyznaczyć liczbę cykli dla tego punktu należy uogólnić równanie (4.35) do opisu stanu nieustalonego. Analityczne rozwiązanie równania nieustalonego samorozgrzania (4.4) nie jest możliwe ze względu na występowanie zależności parametrów równania od temperatury po obu stronach. Jednak dla wyznaczenia liczby cykli (czasu) do osiągnięcia  $\theta_a$  zakładamy, że  $Q_d = \text{const}$  i otrzymujemy rozwiązanie (4.35). Następnie zakładamy, że poszukiwana funkcja  $\theta(x, y, t)$  jest bezźródłowym polem temperatury zależnym od czasu i jest reprezentowana przez równanie:

$$\lambda \nabla^2 \theta(x, y, t) = c\rho \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} \quad (7.14)$$

spełniające warunki początkowe

$$\theta(x, y, t) = \theta(x, y), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, b), \quad t = 0 \quad (7.15)$$

oraz brzegowe, jak w (4.29) przy warunku  $t > 0$ . Zgodnie z zasadą rozdzielania zmiennych (Kącki, 1989) funkcję  $\theta(x, y, t)$  można przedstawić w postaci:

$$\theta(x, y, t) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \chi_{ij}(x, y, t), \quad (7.16)$$

gdzie

$$\chi(x, y, t) = \tilde{A}_m(x) \tilde{B}_n(y) \theta_{mn}(t). \quad (7.17)$$

Różniczkując (7.17) i podstawiając otrzymane pochodne do (7.14) można wyznaczyć warunki dla  $\tilde{A}_m(x)$ ,  $\tilde{B}_n(y)$  i  $\theta_{mn}(t)$ , aby funkcja (7.16) spełniała równanie (7.14):

$$\frac{c\rho}{\lambda} \left( \frac{\tilde{A}_m''}{\tilde{A}_m} + \frac{\tilde{B}_n''}{\tilde{B}_n} \right) = \frac{\theta_{mn}''}{\theta_{mn}}. \quad (7.18)$$

Po odpowiednich przekształceniach można zapisać ogólne rozwiązania dla równań spełniających warunek (7.18):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m(x) &= \tilde{C}_m \sin \tilde{M}_m x + \tilde{D}_m \cos \tilde{M}_m x, \\ \tilde{B}_n(y) &= \tilde{E}_n \sin \tilde{N}_n y + \tilde{F}_n \cos \tilde{N}_n y, \\ \theta_{mn}(t) &= \tilde{H}_{mn} \exp \left( -\frac{c\rho}{\lambda} t \left( \tilde{M}_m^2 + \tilde{N}_n^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (7.19)$$

gdzie  $\tilde{M}_m$  i  $\tilde{N}_n$  wynikają z równań (4.31).

Po wyznaczeniu współczynników  $\tilde{H}_{mn}$  z warunków początkowych ostatecznie rozwiązanie równania (7.14) przyjmuje postać:

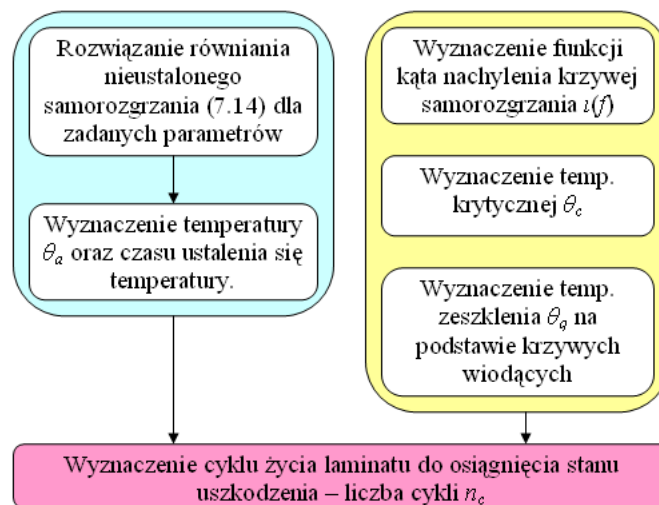
$$\Delta\theta(x, y, t) = \frac{4Q_d(x, y)}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sinc } \mu_m \text{ sinc } \gamma_n \cos \xi_m x \cos \xi_n y \left(1 - e^{-t \frac{c\rho}{\lambda} (\xi_m^2 + \xi_n^2)}\right)}{\mu_m \gamma_n (1 + \text{sinc } 2\mu_m) (1 + \text{sinc } 2\gamma_n) (\xi_m^2 + \xi_n^2)} \quad (7.20)$$

przedstawiającą nieustalony przyrost temperatury samorozgrzania w świetle powyższych założeń. Na podstawie równania można wyznaczyć czas ustalenia temperatury i biorąc pod uwagę częstotliwość wymuszenia z (4.27) można wyznaczyć liczbę cykli  $n_I$  do osiągnięcia temperatury  $\theta_a$ .

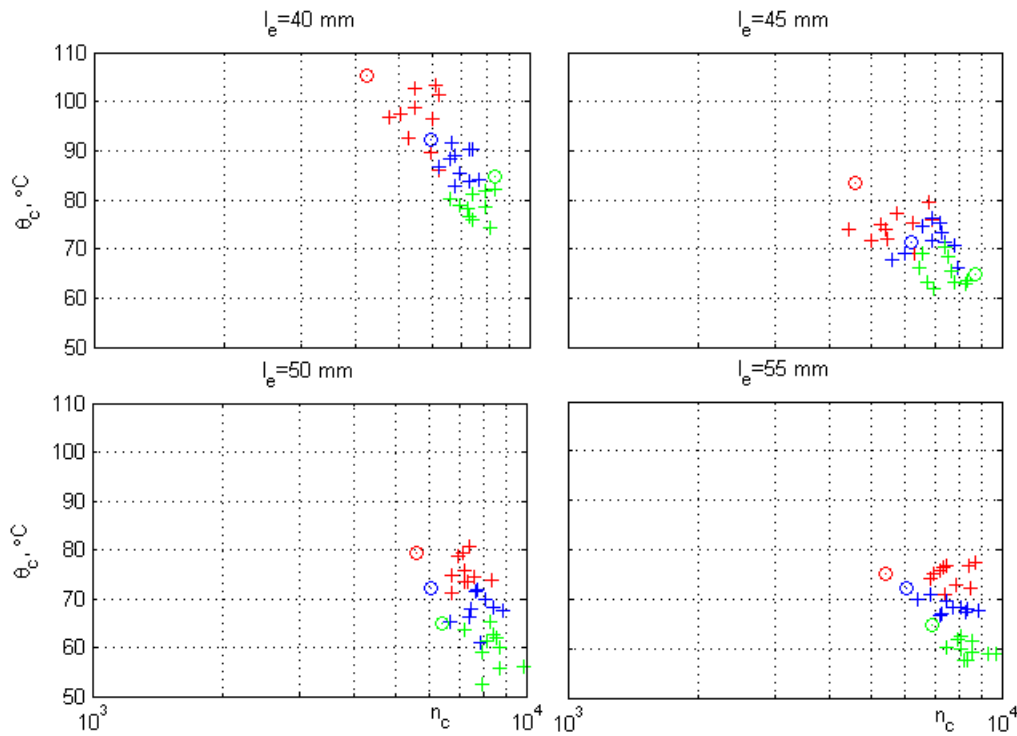
Z badań eksperymentalnych zmęczenia wynika, że temperatura krytyczna jest powiązana z temperaturą zeszklenia przy danych warunkach wymuszenia i otoczenia. Z przeprowadzonych analiz wynika, że  $\theta_c$  zależy od  $\theta_g(f)$ , co przyjęto jako założenie przy dalszych rozważaniach. Na podstawie wyników eksperymentalnych określono funkcję  $\iota(f)$  opisującą kąt nachylenia krzywej samorozgrzania w drugiej fazie zmęczenia zależnej od częstotliwości wymuszenia. Zatem liczba cykli  $n_c$  do osiągnięcia granicy faz II i III może być wyznaczona z równania:

$$n_c = n_I + \text{ctg } \iota(f) \theta_c(f) (\theta_a - \theta_0). \quad (7.21)$$

W modelu wzięto pod uwagę tylko dwie pierwsze fazy, o ile ze względu eksploatacji elementów kompozytowych w momencie osiągnięcia temperatury krytycznej inicjuje się uszkodzenie, którego intensywny rozwój z towarzyszącym mu szybkim wzrostem temperatury eliminuje element pod względem użytkowym. Algorytm wyznaczania cyklu życia laminatu wg powyższego modelu przedstawiono na Rys.7.10. Elementy na tle błękitnym wyznaczane są na podstawie równań (7.14–7.20) i opisują pierwszą fazę procesu zmęczenia. Elementy na tle żółtym są wyznaczane na podstawie wyników eksperymentalnych i stanowią opis drugiej fazy procesu zmęczenia. Element koloru różowego jest wynikiem dodawania liczby cykli w obu fazach zmęczenia cieplnego.



Rys. 7.10: Wyznaczanie cyklu życia laminatu wg modelu teoretyczno-empirycznego



Rys. 7.11: Porównanie wyników eksperymentalnych z modelem teoretyczno-empirycznym

### 7.3.3. Porównanie wyników eksperymentalnych z modelem teoretyczno-empirycznym

W celu weryfikacji modelu teoretyczno-empirycznego z wynikami eksperymentów przedstawionych w Rozdziale 7.2 wybrano kilka przypadków parametrów wymuszenia. Rozpatrzono przypadki zestawu parametrów jak w przeprowadzonych eksperymentach:  $l_e = 40 \div 55$  mm i  $f = 20 \div 30$  Hz. Pozostałe parametry były identyczne dla wszystkich przypadków:  $b = 10$  mm,  $\theta_0 = 22^\circ\text{C}$ . Na podstawie równań przedstawionych w Rozdziałach 4.4 i 7.3 przeprowadzono obliczenia mające na celu wyznaczenie temperatury  $\theta_a$  oraz liczby cykli  $n_I$ . Następnie wyznaczono wartość kąta nachylenia krzywej temperatury samorozgrzania na podstawie funkcji  $\iota(f)$  oraz wyznaczono temperaturę zeszklenia  $\theta_g(f)$  dla poszczególnych częstotliwości wymuszenia i na podstawie tych danych wyznaczono liczbę cykli  $n_{II}$  z równania (7.21). Otrzymane wyniki zestawiono na wykresach wraz z wynikami eksperymentalnymi na Rys.7.11, gdzie przedstawiono punkty osiągnięcia temperatury krytycznej oraz odpowiadające im liczby cykli. Dla każdego rozpatrywanego przypadku wybrano wyniki dla 10 próbek z danych eksperymentalnych. Na wykresach kolory oznaczają częstotliwość wymuszenia: 20 Hz – kolor zielony, 25 Hz – kolor niebieski i 30 Hz – kolor czerwony. Kółkami oznaczono wyniki uzyskane na podstawie zastosowania modelu, a krzyżykami wyniki uzyskane na drodze eksperymentu.

Jak można zauważyć, przedstawiony model teoretyczno-empiryczny daje wyniki bliskie uzyskanym eksperymentalnie. Temperatury krytyczne otrzymane na podstawie modelu są nieco zawyżone w stosunku do wyników eksperymentalnych, co wynika z zawyżonych wartości  $\theta_a$  uzyskanych na podstawie modelu. Wartości  $\theta_a$  są wyższe od uzyskanych

w eksperymentach ze względu na to, że energia generowana na skutek wymuszenia cyklicznego nie rozprasza się w całości w postaci ciepła (Senchenkov i Karnaukhov, 2001), a przedstawiony model tego zjawiska nie uwzględnia. W celu wyeliminowania tego efektu należałoby określić współczynniki korekcyjne i wprowadzić je do modelu (7.21). Z drugiej strony temperatura samorozgrzania jest zaniżana na skutek przyjętego założenia o niezmienności funkcji energii dyssypacji w czasie, w związku z czym zakłada się również, że  $E'' = \text{const}$ , a wyniki analiz termokinetycznych wskazują na wzrost  $E''$  przy wzroście temperatury. Zauważalny jest także liniowy trend na każdym z wykresów, co waliduje stwierdzenie o liniowej zależności temperatury samorozgrzania i częstotliwości wymuszenia przedstawione na podstawie modeli teoretycznych oraz wyników badań eksperymentalnych, co potwierdzają m.in. wyniki prac (Jia i Kagan, 1997; Handa *i in.*, 1999; Bernasconi *i in.*, 2007; Esmaeillou *i in.*, 2011). Zaproponowane kryterium zmęczenia cieplnego oparte na temperaturze samorozgrzania jest dostatecznie efektywne.

## 7.4. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono wyniki badań teoretycznych i eksperymentalnych dotyczących zmęczenia laminatów polimerowych z uwzględnieniem efektu samorozgrzania. Zaproponowano wstępną koncepcję modelu teoretycznego zmęczenia opartą na metodzie pseudo-odkształceń. Metoda pozwala na linearyzację równań całkowych opisujących termolepkosprężyste zachowanie materiału, dzięki czemu jest możliwe łatwe wprowadzenie składowej cieplnej odkształceń do modelu. Funkcja zniszczenia była określona na podstawie prawa przyrostu uszkodzeń Kachanova i na tej podstawie było możliwe określenie funkcji stopnia degradacji materiału oraz wyznaczenie czasu zniszczenia.

Następnie przedstawiono wyniki eksperymentalne dotyczące zmęczenia uzyskane w warunkach laboratoryjnych. Na zbudowanym stanowisku przetestowano łącznie 240 próbek o różnej długości; próbki te były poddane oddziaływaniu wymuszenia cyklicznego z różną częstotliwością. Podczas eksperymentu dokonywano pomiaru pól temperatury, siły wymuszenia oraz prędkości odkształceń. Na podstawie uzyskanych danych przeprowadzono wiele analiz. Z sekwencji termogramów wyznaczono wartości chwilowe maksymalnej temperatury samorozgrzania i na podstawie otrzymanych krzywych temperatury samorozgrzania sformułowano kryterium zmęczeniowe bazujące na wspomnianych krzywych oraz wskazano podział procesu zmęczenia na trzy fazy. Przeanalizowano wzdłużne i poprzeczne profile temperatury oraz ich dynamikę, a na podstawie obserwacji opisano wpływ poszczególnych czynników na rozkłady temperatury samorozgrzania. Przeprowadzono także analizy parametryczne dynamiki pętli histerezy oraz temperatury samorozgrzania i zauważono, że podział na trzy fazy procesu zmęczenia opisany przy okazji krzywych temperatury samorozgrzania również widoczny jest w przypadku zmian pętli histerezy. Określono i opisano charakterystyczne kształty pętli histerezy w różnych fazach zmęczenia. W przypadku krzywych temperatury samorozgrzania zastosowano model empiryczny oparty na funkcjach eksponencjalnych oraz wyznaczono parametry modelu w zależności od długości próbek oraz częstotliwości wymuszenia. Określono charaktery-

styczne temperatury, w tym temperatury krytyczne oraz liczbę cykli dla poszczególnych faz zmęczenia (liczba cykli do wystąpienia uszkodzenia oraz liczba cykli do całkowitego zniszczenia). Na tej podstawie wyznaczono wartości funkcji empirycznej opisującej kąt nachylenia krzywych samorozgrzania w II fazie zmęczenia w zależności od wspomnianych wyżej parametrów.

W dalszej części rozdziału zaproponowano dwa modele zmęczenia: empiryczny i teoretyczno-empiryczny. Pierwszy model oparty jest na relacjach termokinetycznych i krzywych wiodących otrzymanych z wyników analiz DMA, gdzie dla określenia funkcji zniszczenia wykorzystywane jest równanie bazujące na module zachowawczym zależnym od częstotliwości wymuszenia, temperatury i prędkości grzania. W przypadku, gdy krzywe wiodące są znane model pozwala w precyzyjny sposób określać stopień degradacji laminatu polimerowego. Model teoretyczno-empiryczny oparty jest na równaniach sprzężonych termolepkosprężystości, które zostały uogólnione w stosunku do modelu przedstawionym w Rozdziale 4.3 o zależność od czasu z założeniem, że funkcja energii dyssypacji jest stała. Na podstawie tych równań wyznaczono liczbę cykli oraz temperaturę na granicy I i II fazy zmęczenia. Liczbę cykli w II fazie wyznaczono na podstawie równania bazującego na wynikach eksperymentalnych oraz przedstawiono algorytm wyznaczania liczby cykli do osiągnięcia punktu wystąpienia uszkodzenia. Wyniki uzyskane na podstawie modelu porównano z wynikami uzyskanymi na drodze eksperymentu. Przedstawione porównanie wskazuje na dostateczną dokładność zaproponowanego modelu.

## Rozdział 8

# Podsumowanie i wnioski

Przedstawiona praca jest wynikiem badań teoretycznych i eksperymentalnych autora związanych z występowaniem efektu samorozgrzania podczas oddziaływania cyklicznym wymuszeniem na próbki z laminatów o osnowie polimerowej oraz uwzględnienia tego efektu w procesie zmęczenia i ocenie stopnia degradacji tych materiałów. Przeprowadzone badania pozwoliły na opracowanie modeli teoretycznych opisujących efekt samorozgrzania, uogólnienia prawa Arrheniusa opisującego kinetykę reakcji zachodzących podczas występowania efektu samorozgrzania oraz opracowanie modeli zmęczenia laminatów polimerowych. W ramach pracy przeprowadzono wiele eksperymentów dotyczących wyznaczenia krzywych wiodących opisujących zależność wartości modułów dynamicznych materiału od częstotliwości wymuszenia, temperatury i prędkości grzania, a także eksperymentów mających na celu zbadanie rozkładu temperatury samorozgrzania oraz jej dynamiki podczas wymuszeń cyklicznych, określenie zmian histerezy oraz wpływ efektu samorozgrzania na przebieg i intensyfikację procesu zmęczenia. Otrzymane wyniki eksperymentalne oraz opracowane liczne modele teoretyczne i empiryczne pozwalają na kompleksową ocenę stopnia degradacji laminatów polimerowych podczas wymuszeń cyklicznych i z powodzeniem mogą znaleźć zastosowanie w inżynierskich problemach aplikacyjnych, m.in. w budowie i diagnostyce elementów środków transportu lądowego, wodnego oraz powietrznego.

Efektom końcowym przeprowadzonych badań są modele teoretyczne i empiryczne pozwalające na uwzględnienie efektu samorozgrzania przy projektowaniu i eksploatacji elementów wykonanych z laminatów polimerowych, który często nie jest brany pod uwagę. Ponadto zaproponowane modele zmęczenia laminatów pozwalają na predykcję wystąpienia uszkodzeń i zniszczenia elementów, a wyniki badań eksperymentalnych i otrzymane relacje na ich podstawie pozwalają określić parametry graniczne pracy elementów kompozytowych.

### 8.1. Wnioski ogólne

Zastosowane podejście do modelowania efektu samorozgrzania na podstawie sprzężonych równań termolepkosprężystości z wykorzystaniem modułów dynamicznych do opisu

zmian sztywności i energii dyssypowanej cechuje się dobrą dokładnością, co potwierdzają liczne badania eksperymentalne. Pozwoliło to na wprowadzenie opisu inicjacji efektu samorozgrzania i dystrybucji temperatury oraz dynamiki jej zmian w elementach z laminatów o osnowie polimerowej.

Dzięki przeprowadzonym badaniom według metody DMA określono krzywe wiodące opisujące charakter zmian sztywności badanego laminatu w zależności od częstotliwości wymuszenia, temperatury i prędkości grzania. Przeprowadzone badania laboratoryjne mające na celu wyznaczenie charakteru zmian temperatury samorozgrzania podczas wymuszenia cyklicznego wskazały na eksponencjalny charakter przyrostu temperatury samorozgrzania i dały możliwość opracowania modeli empirycznych i przeprowadzenia analiz parametrycznych, dzięki którym możliwe było wnioskowanie o wpływie wielu czynników fizycznych na kształtowanie się krzywych temperatury samorozgrzania oraz dystrybucji temperatury na powierzchni badanych próbek.

Ostatecznie przeprowadzono testy zmęczeniowe, które pozwoliły opisać procesy zachodzące podczas zmęczenia z występowaniem efektu samorozgrzania. Opracowano modele zmęczeniowe, które przyczyniły się do podniesienia jakości predykcji uszkodzeń i zniszczenia laminatów polimerowych pod wpływem temperatury samorozgrzania.

## 8.2. Wnioski szczegółowe

Biorąc pod uwagę wyniki uzyskane podczas badań teoretycznych i eksperymentalnych, sformułowano następujące wnioski szczegółowe:

1. Opracowane modele teoretyczne efektu samorozgrzania bazujące na modułach dynamicznych pozwoliły na precyzyjny opis pól temperatury samorozgrzania w stanie ustalonym przy różnych sposobach wymuszenia: wymuszenie cykliczne oraz szczególnie przypadek – wymuszenie przy częstotliwościach rezonansowych; *modele mogą być wykorzystane do predykcji pól temperatury przy projektowaniu i wprowadzeniu elementów z laminatów polimerowych do eksploatacji.*
2. Podczas badań termomechanicznych wykazano, że prędkość grzania ma istotny wpływ na zachowanie laminatów w warunkach zmiennej temperatury i częstotliwości wymuszenia. W celu uwzględnienia prędkości grzania uogólniono prawo Arrheniusa poprzez wprowadzenie do równania opisującego kinetykę zjawiska odpowiedniego współczynnika. Zaproponowaną postać uogólnioną równania Arrheniusa zweryfikowano porównując z wynikami eksperymentu i potwierdzono poprawność tego równania. *Uogólnione równanie Arrheniusa umożliwia uwzględnienie prędkości grzania i jest wysoce zgodne z wynikami eksperymentalnymi w zakresie szklistym laminatów.*
3. Przeprowadzono badania eksperymentalne, na podstawie których opracowano modele empiryczne bazujące na funkcjach eksponencjalnych, a parametry modelu zostały przeanalizowane ze względu na zmienną długość próbek oraz zmienne częstotliwości wymuszenia. Otrzymane wyniki potwierdziły się w stosunku do opraco-



wanych modeli teoretycznych. *Modele te stanowią efektywne narzędzie do analizy parametrycznej procesu samorozgrzania.*

4. Przeprowadzono eksperymentalne badania zmęczeniowe, a na podstawie wyników i modeli empirycznych określono charakter zmienności temperatury samorozgrzania i przebiegu procesu w zależności od parametrów pracy. Przeanalizowano profile temperatury samorozgrzania, dzięki którym możliwa była analiza wpływu poszczególnych czynników fizycznych na charakter rozkładów temperatury samorozgrzania i jej dynamiki podczas procesu zmęczenia. Na podstawie wyników eksperymentalnych określono temperatury krytyczne określające stan graniczny eksploatacji elementów oraz ich zależność od parametrów pracy. *Otrzymane wyniki eksperymentalne porównano z wynikami na podstawie modeli teoretycznych i otrzymano wystarczającą dokładność, przeanalizowano i wyjaśniono przyczyny powstawania rozbieżności pomiędzy wynikami teoretycznymi i eksperymentalnymi.*
5. Na podstawie przeprowadzonych badań teoretycznych i eksperymentalnych opracowano modele zmęczenia laminatów polimerowych z uwzględnieniem efektu samorozgrzania. Zaproponowany model empiryczny został oparty o zmiany modułu zachowawczego materiału zależnego od częstotliwości wymuszenia, temperatury oraz prędkości grzania. Na podstawie przyjętej koncepcji zaproponowano równanie funkcji zniszczenia, określające stopień degradacji laminatu podczas eksploatacji z występowaniem efektu samorozgrzania. Model teoretyczno-empiryczny został oparty zarówno na równaniach konstytutywnych, jak i zależności uzyskanych na podstawie modeli eksperymentalnych. *Otrzymane wyniki z modelu przy porównaniu z wynikami eksperymentów wykazały dostateczną dokładność, co stwarza możliwości predykcji i modelowania cyklu życia laminatu w zależności od parametrów pracy.*

### 8.3. Kierunki dalszych badań

Przeprowadzone przez autora badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące efektu samorozgrzania i jego wpływu na proces zmęczenia laminatów polimerowych pozwoliły zidentyfikować wiele nowych obszarów badań. Najważniejsze z nich przedstawiono poniżej.

1. Rozwój modeli numerycznych pozwalających opisać zagadnienie termolepkosprężystości w stanie nieustalonym, dzięki którym możliwe byłoby określenie krzywych temperatury samorozgrzania do osiągnięcia temperatury zeszklenia w funkcji liczby cykli.
2. Sformułowanie zagadnienia termolepkosprężystości w ramach teorii wielkoskalowych.
3. Analiza i rozwój modeli teoretycznych opisujących efekt samorozgrzania dla materiałów nieliniowo-lepkosprężystych.

4. Uogólnienie zaproponowanych modeli teoretycznych do trójwymiarowych z uwzględnieniem zmiennych parametrów mechanicznych i termomechanicznych i struktury warstwowej laminatów.
5. Dalsze uogólnienie zasady Arrheniusa, które uwzględniałyby wpływ efektów starzenia na degradację materiału.
6. Analiza zachowania laminatów polimerowych oraz występowania efektu samorozgrzania przy ujemnych temperaturach otoczenia.
7. Analiza zachowania struktur w warunkach zmęczenia niskocyklowego oraz przy okresowo powtarzającej się historii obciążenia.
8. Opracowanie metod diagnostyki i monitorowania elementów kompozytowych na podstawie pól temperatury, gdzie wymuszeniem byłby efekt samorozgrzania.
9. Analiza wpływu efektu samorozgrzania na poprawność i dokładność identyfikacji uszkodzeń metodami opartymi na analizie modalnej.
10. Analiza wpływu typu i materiału zbrojenia na przewodność cieplną i dynamikę temperatury samorozgrzania.

# Bibliografia

- 2980 *Dynamic Mechanical Analyzer Operator's Manual* (1997): Technical report. TA Instruments.
- Adams D. F., Carlsson L. A. i Pipes R. B. (2003): *Experimental characterization of advanced composite materials*. CRC Press.
- Adzima B. J., Kloxin C. J. i N. B. C. (2010): *Externally triggered healing of a thermo-reversible covalent network via self-limited hysteresis heating*. *Advanced Materials* **22**: pp. 2784–2787.
- Ahci E. i Talreja R. (2006): *Characterization of viscoelasticity and damage in high temperature polymer matrix composites*. *Composite Science and Technology* **66**: pp. 2506–2519.
- Akshantala N. V. i Talreja R. (2000): *A micromechanics based model for predicting fatigue life of composite laminates*. *Materials Science and Engineering* **285**: pp. 303–313.
- Alves N. M. i Mano J. F. (2000): *Temperature correction of dynamic mechanical and thermomechanical analysers during heating, cooling and isothermal experiments*. *Thermochimica Acta* **346**: pp. 133–145.
- Alves N. M., Mano J. F. i Gómez Ribelles J. L. (2003): *Analysis of the thermal environment inside the furnace of a dynamic mechanical analyser*. *Polymer Testing* **22**: pp. 471–481.
- Ambroziński Ł., Stępiński T., Paćko P. i Uhl T. (2012): *Self-focusing Lamb waves based on the decomposition of the time-reversal operator using time-frequency representation*. *Mechanical Systems and Signal Processing* **27**: pp. 337–349.
- Aymerich F., Staszewski W. J. i Uhl T. (2010): *Effect of boundary conditions on nonlinear acoustics used for impact damage detection in composite structures*. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*.
- Bakar M. (2009): *Właściwości mechaniczne polimerów*. Wydawnictwo Politechniki Radomskiej.
- Balankin A., Trinidad J. M. i Huerta O. S. (2009): *Residual strength and fracture path for drilled epoxy-glass composites*. *Advanced Materials Research* **65**: pp. 89–96.
- Batko W., Dąbrowski Z. i Kiciński J. (2008): *Zjawiska nieliniowe w diagnostyce wibroakustycznej*. Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji - PIB.

- Bellenger V., Tcharkhtchi A. i Castaing P. (2006): *Thermal and mechanical fatigue of a PA66/glass fibers composite material*. International Journal of Fatigue **28**: pp. 1348–1352.
- Beluch W. (2007): *Evolutionary identification and optimization of composite structures*. Mechanics of Advanced Materials and Structures **14**: pp. 677–686.
- Beluch W., Burczyński T. i Długosz A. (2007): *Evolutionary multi-objective optimization of hybrid laminates*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences **14**: pp. 569–578.
- Beluch W., Burczyński T. i Kuś W. (2010): *Parallel artificial immune system in optimization and identification of composite structures*. Lecture Notes in Computer Science **6239 LNCS (part 2)**: pp. 171–180.
- Beluch W. i Orantek P. (2010): *Evolutionary identification of laminates' granular parameters*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences **17**: pp. 51–58.
- Bełzowski A. (2002a): *Degradacja mechaniczna kompozytów polimerowych: metody oceny wytrzymałości długotrwałej i stopnia uszkodzenia*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
- Bełzowski A. (2002b): *Metoda oceny stopnia uszkodzenia kompozytów polimerowych*. Kompozyty **2**: pp. 253–258.
- Bernasconi A., Davoli P., Rossin D. i Armani C. (2007): *Effect of reprocessing on the fatigue strength of a fibreglass reinforced polyamide*. Composites A **38**: pp. 710–718.
- Biermann H., Kemnitzer M. i Hartmann O. (2001): *On the temperature dependence of the fatigue and damage behaviour of a particulate-reinforced metal-matrix composite*. Materials Science and Engineering **319-321**: pp. 671–674.
- Boczkowska A., Kapuściński J., Lindermann Z., Witemberg-Perzyk D. i Wojciechowski S. (2003): *Kompozyty*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- Bolotin V. V. (1999): *Mechanics of fatigue*. CRC Press.
- Boyarov A. N. (2010): *Mehanizm formirovaniâ i zašita ot samovozgoraniâ pirofornyh otloženij v vertikal'nyh rezervuarah*. PhD thesis. Institut problem transporta energoresursov.
- Boyarov A. N. i Sumarčenkova I. A. (2008): *Model' diffuzionnogo perenosa v mnogoslajnyh pokrytiâh*. Jubilejnaâ meždunarodnaâ naučno-praktičeskaâ konferencyâ "Tehnosfernaâ bezopastnost', nadežnost', kačestvo, energosberezhenie". Rostov-na-Donu.
- Broutman L. J. i Sahu S. (1972): *A new theory to predict cumulative fatigue damage in fiber-glass reinforced plastics*. Composite Materials: Testing and Design. ASTM STP 497.
- Bykov D. L., Il'yushin A. A., Ogibalov P. M. i Pobedrya B. P. (1971): *Some fundamental problems of the theory of thermoviscoelasticity*. Mekhanika Polimerov **1**: pp. 36–49.

- Caban R., Nitkiewicz Z. i Kwiatkowski D. (2007): *Właściwości termiczne kompozytów na osnowie polipropylenu z włóknem szklanym*. *Kompozyty* **7**: pp. 145–148.
- Carcione J. J. M. (Red.) (2007): *Wave fields in real media*. Tom 38. Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media z *Handbook of Geophysical Exploration: Seismic Exploration*. 2nd edn. Elsevier Science.
- Cherepanov P. G. (1979): *Mechanics of brittle fracture*. McGraw-Hill International Book.
- Chou P. C. i Kroman R. (1978): *Residual strength in fatigue based on the strength-life equal rank assumption*. *Journal of Composite Materials* **12**: pp. 177–194.
- Chung D. D. L. (2010): *Composite materials: Science and applications*. Springer.
- Cieszyński T. i Topoliński T. (2006): *Badania zmęczeniowe kompozytów polimerowych przy sterowaniu energią dyssypacji*. *Czasopismo Techniczne. Mechanika* **6**: pp. 115–119.
- Constable I., Williams J. G. i Burns D. J. (1970): *Fatigue and thermal softening of thermoplastics*. *Journal of Mechanical Science and Technology* **12**: pp. 20–29.
- Criado J. M., Pérez-Maqueda L. A., Gotor F. J., Malek J. i Koga N. (2003): *A unified theory for kinetic analysis of solid state reactions under any thermal pathway*. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* **72**: pp. 901–906.
- Daiyan H., Andreassen E., Grytten F., Lyngstad O. V., Luksepp T. i Osnes H. (2010): *Low-velocity impact response of injection-moulded polypropylene plates – Part 1: Effects of plate thickness, impact velocity and temperature*. *Polymer Testing* **29**: pp. 648–657.
- de Cazenove J., Rade D. A., de Lima A. M. G. i Araújo C. A. (2012): *A numerical and experimental investigation on self-heating effects in viscoelastic dampers*. *Mechanical Systems and Signal Processing* **27**: pp. 433–445.
- Dealy J. M. i Larson R. G. (2006): *Structure and rheology of molten polymers: from structure to flow behavior and back again*. Hanser Verlag. Munich.
- Deuzkiewicz P. (2008): *Uwagi o dynamice wałów maszynowych wykonanych z kompozytu węglowego*. *Przegląd Mechaniczny* **1**: pp. 29–31.
- Deuzkiewicz P., Dziurdź J. i Górnicka D. (2010): *Wpływ obciążenia wzdłużnego na własności dynamiczne konstrukcji z kompozytów węglowo-aramidowych*. VII Konferencja Ogólnopolska "Problemy Naukowo-Techniczne w Wyczynowym Sporcie Żeglarskim": pp. 115–120.
- Dinzart F. i Molinari A. (2005): *Linear stability analysis for thermoviscoplastic material under cyclic axial loading*. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **17**: pp. 83–99.
- Dinzart F., Molinari A. i Herbach R. (2008): *Thermomechanical response of viscoelastic beam under cyclic bending; self-heating and thermal failure*. *Archives of Mechanics* **60**: pp. 59–85.

- Dąbrowski Z. i Dziurdź J. (2003): *Wibroakustyczna analiza zmian średnicy otworów w węzłach konstrukcyjnych masztów kompozytowych*. Przegląd Mechaniczny **4**: pp. 36–40.
- Dąbrowski Z., Dziurdź J. i Skórski W. W. (2003): *Badania właściwości dynamicznych masztów epoksydowo-węglowych i drewnianych skorupowych*. Przegląd Mechaniczny **10**: pp. 42–45.
- Dąbrowski Z., Dziurdź J. i Skórski W. W. (2007): *Drgania masztów kompozytowych*. Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji - PIB.
- Echtermeyer A. T., Engh B. i Buene L. (1995): *Lifetime and Young's modulus changes of glass/phenolic and glass/polyester composites under fatigue*. Composites **26**: pp. 10–16.
- Esmaeillou B., Fitoussi J., Lucas A. i Tcharkhtchi A. (2011): *Multi-scale experimental analysis of the tension-tension fatigue behavior of a short glass fiber reinforced polyamide composite*. Procedia Engineering **10**: pp. 2117–2122.
- Faghri A. i Guo Z. (2005): *Challenges and opportunities of thermal management issues related to fuel cell technology and modeling*. International Journal of Heat and Mass Transfer **48**: pp. 3891–3920.
- Fan Z. i Kang S. (2009): *Numerical simulations of the aerodynamics of horizontal axis wind turbines*. Inaugural US-EU-China Thermophysics Conference – Renewable Energy.
- Farren W. S. i Taylor G. I. (1925): *The heat developed during plastic extension of metals*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A – Mathematical and Physical Sciences **107**: pp. 422–451.
- Ferreira J. A. M., Costa J. D. M., Reis P. N. B. i Richardson M. O. W. (1999): *Analysis of fatigue and damage in glass-fibre-reinforced polypropylene composite materials*. Composite Science and Technology **59**: pp. 1461–1467.
- Ferry J. D. (1980): *Viscoelastic properties of polymers*. 3rd edn. Wiley.
- Figiel L. i Kamiński M. M. (2003): *Mechanical and thermal fatigue delamination of curved layered composites*. Computers and Structures **81**: pp. 1865–1873.
- Filippov I. G. i Filippova N. A. (1979): *Generalization of the Volterra method for solving dynamical problems on thermoviscoelastic media*. Mekhanika Polimerov **15**: pp. 153–159.
- Fissolo A., Gourdin C., Ancelet O., Amiable S., Demassieux A., Chapuliot S., Haddar N., Mermaz F., Stelmaszyk J. M., Constantinescu A., Vincent L. i Maillot V. (2009): *Crack initiation under thermal fatigue: An overview of CEA experience. Part II (of II): application of various criteria to biaxial thermal fatigue tests and a first proposal to improve the estimation of the thermal fatigue damage*. International Journal of Fatigue **31**: pp. 1196–1210.

- Flynn J. H. (1990): *Temperature dependence of the rate of reaction in thermal analysis. The Arrhenius equation in condensed phase kinetics*. Journal of Thermal Analysis **36**: pp. 1579–1593.
- Frampton R. C. (2009): The dynamic testing of elastomers.
- Galicyn A. S. i Žukovskij A. N. (1976): *Intergalnye preobrazovaniâ i specyalne funkicii v zadačah teploprovodimosti*. Naukova Dumka. Kiev.
- Gibson R. F., Chaturvedi S. K. i Sun C. T. (1972): *Complex moduli of aligned discontinuous fibre-reinforced polymer composites*. Journal of Materials Science **17**: pp. 3499–3509.
- Gieleta R., Kiczko A. i Ochelski S. (2000): *Stanowisko do badań zmęczeniowych materiałów*. Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej **575**: pp. 35–39.
- Goertzen W. K. i Kessler M. R. (2007): *Dynamic mechanical analysis of carbon/epoxy composites for structural pipeline repair*. Composites: Part B **38**: pp. 1–9.
- Gooch J. W. (2010): *Encyclopedic dictionary of polymers*. Springer.
- Guedes R. M. (2004): *Mathematical analysis of energies of viscoelastic materials and energy based failure criteria for creep loading*. Mechanics of Time-Dependent Materials **8**: pp. 169–192.
- Guedes R. M. (2007): *Durability of polymer matrix composites: viscoelastic effect on static and fatigue loading*. Composite Science and Technology **67**: pp. 2574–2583.
- Gumenyuk B. P. i Karnaukhov V. G. (1980): *Dynamic behavior of viscoelastic bodies during harmonic excitation*. Prikladnaya Mekhanika **16**: pp. 89–95.
- Guz I. A., Zhuk Y. A. i Sands C. M. (2012): *Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoactive layers*. w druku.
- Handa K., A. K. i Narisawa I. (1999): *Fatigue characteristics of glass-fiber-reinforced polyamide*. Journal of Applied Polymer Science **72**: pp. 1783–1793.
- Hebda M. (2006): *Zastosowanie energetycznego kryterium wyężeniowego do analizy wytrzymałościowej kompozytów włóknistych*. PhD thesis. Politechnika Krakowska.
- Hernández-Jiménez A., Hernández-Santiago J., Macias-García A. i Sánchez-González J. (2002): *Relaxation modulus of PMMA and PTFE fitting by fractional Maxwell model*. Polymer Testing **21**: pp. 325–331.
- Heymans N. i Bauwens J. C. (1994): *Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior*. Rheologica Acta **33**: pp. 210–219.
- Holzapfel G. A. i Reiter G. (1995): *Fully coupled thermomechanical behaviour of viscoelastic solids treated with finite elements*. International Journal of Engineering Science **33**: pp. 1037–1058.
- Hufenbach W., Fidali M., Kostka P. i Langkamp A. (2006): *Influence of embedded diagnostic sensors on structural dynamic behaviour of composite rotors*. Kompozyty **6**: pp. 14–19.

- Hwang S. J., Lee Y. D., Park Y. B., Lee J. H., Jeong C. O. i Joo Y. C. (2006): *In situ study of stress relaxation mechanisms of pure Al thin films during isothermal annealing*. Scripta Materialia **54**: pp. 1841–1846.
- Hyla I. i Kozioł M. (2007): *Wpływ struktury układów wielowarstwowych na rozwój procesu zniszczenia laminatów*. Inżynieria Materiałowa **28**: pp. 99–104.
- Hyla I. i Lizurek A. (2002): *Zastosowanie badań dynamicznych do analizy mechanizmu pęknięcia udarowego kompozytów warstwowych*. Kompozyty **2**: pp. 374–377.
- Hyla I., Myalski J. i Śleziona J. (2000): *Recykling kompozytów polimerowych*. Nowe technologie i materiały w metalurgii i inżynierii materiałowej. Materiały VIII Seminarium naukowego. Katowice: pp. 55–58.
- Hyla I. i Śleziona J. (1977): *Physical properties of glass reinforced epoxy resin composites*. Polymers **22**: pp. 119–122.
- Hyla I. i Śleziona J. (2004): *Kompozyty. Elementy mechaniki i projektowania*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Gliwice.
- Jeyaraj P., Ganesan N. i Padmanabhan C. (2009): *Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment*. Journal of Sound and Vibration **320**: pp. 322–338.
- Jia N. i Kagan V. A. (1997): *Effects of time and temperature on the tension–tension fatigue behavior of short fiber reinforced polyamides*. Polymer Composites **19**: pp. 408–414.
- Kachanov M. N. (1958): *On the time of failure under creep conditions*. Izvestija Akademii Nauk SSR **8**: pp. 26–31.
- Kamiński M. M. (2002): *On probabilistic fatigue models for composite materials*. International Journal of Fatigue **24**: pp. 477–495.
- Kamiński M. M. (2003a): *Homogenization technique for transient heat transfer in unidirectional composites*. Communications in Numerical Methods in Engineering **19**: pp. 503–512.
- Kamiński M. M. (2003b): *Wavelet-based homogenization of unidirectional multiscale composites*. Computational Materials Science **27**: pp. 446–460.
- Kamiński M. M. (2005a): *Analiza wrażliwości efektywnych własności termomechanicznych periodycznych kompozytów wieloskładnikowych z defektami*. Kompozyty **5**: pp. 41–47.
- Kamiński M. M. (2005b): *Computational Mechanics of Composite Materials: Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour*. Springer.
- Kamiński M. M. (2010): *Potential problems with random parameters by the generalized perturbation-based stochastic finite element method*. Computers and Structures **88**: pp. 437–445.
- Karnaukhov V. G., Kozlov V. I. i Mikhailenko V. V. (1989): *Finite element method in problems of thermoviscoelasticity*. Prikladnaya Mekhanika **25**: pp. 19–28.



- Katunin A. (2008): *O modelowaniu temperatury samowzbudnej w laminacie*. Metody Komputerowe – 2008. Gliwice: pp. 21–24.
- Katunin A. (2009a): *Influence of self-heating temperature on the fatigue strength of a plate made of laminated polymeric composite*. International Applied Mechanics **45**: pp. 342.
- Katunin A. (2009b): *Self-heating effect in laminate plates during harmonic forced loading*. Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance **44**(2(158)): pp. 73–84.
- Katunin A. (2009c): *Simplified method for obtaining basic frequency of axisymmetric vibrations of in-plane laminate circular clamped plate*. Proc. of Young Scientists Conference "Actual problems of mechanics and mathematics". Lviv: pp. 106–107.
- Katunin A. (2010a): *Analytical model of the self-heating effect in polymeric laminated rectangular plates during bending harmonic loading*. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability **4(48)**: pp. 91–101.
- Katunin A. (2010b): *Fractal dimension-based crack identification technique of composite beams for on-line SHM systems*. Machine Dynamics Problems **34**: pp. 60–69.
- Katunin A. (2010c): *Identification of multiple cracks in composite beams using discrete wavelet transform*. Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance **45**: pp. 41–52.
- Katunin A. (2010d): *Influence of the steady-state self-heating on natural vibrations of GFRP laminate rectangular plates*. 14th European Conference on Composite Materials. Budapest: pp. 1–9.
- Katunin A. (2010e): *Numerical study of the fatigue delamination growth considering thermal phenomena*. Diagnostyka **4(56)**: pp. 23–26.
- Katunin A. (2011a): *The conception of the fatigue model for layered composites considering thermal effects*. Archives of Civil and Mechanical Engineering **11**: pp. 333–343.
- Katunin A. (2011b): *Damage identification in composite plates using two-dimensional b-spline wavelets*. Mechanical Systems and Signal Processing **25**: pp. 3153–3167.
- Katunin A. (2011c): *Dissipative heating temperature evolution during resonant vibrations of polymeric composite plates*. Proc. of 16th International Conference of Composite Structures (ICCS16).
- Katunin A. (2012): *Critical self-heating temperature during fatigue of polymeric composites under cyclic loading*. Composites Theory and Practice **12**: pp. 72–76.
- Katunin A. i Fidali M. (2011a): *Experimental identification of non-stationary self-heating characteristics of laminated composite plates under resonant vibration*. Kompozyty **11**: pp. 214–219.
- Katunin A. i Fidali M. (2011b): *Investigation of the dynamic behaviour of laminated composite plates under cyclic loading*. Kompozyty **11**: pp. 208–213.

- Katunin A. i Fidali M. (2012a): *Fatigue and thermal failure of polymeric composites subjected to cyclic loading*. w druku.
- Katunin A. i Fidali M. (2012b): *Self-heating of polymeric laminated composite plates under the resonant vibrations: theoretical and experimental study*. *Polymer Composites* **33**: pp. 138–146.
- Katunin A. i Gnatowski A. (2012): *Influence of the heating rate on evolution of dynamic properties of polymeric laminates*. *Plastics, Rubber and Composites: Macromolecular Engineering* p. w druku. w druku.
- Katunin A., Hufenbach W., Kostka P. i Holeczek K. (2010): *Frequency dependence of the self-heating effect in polymer-based composites*. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering* **41**: pp. 9–15.
- Katunin A. i Moczulski W. (2008): *Ocena zachowania belki kompozytowej podczas przejścia oraz po przejściu temperatury zeszklenia*. VII Konferencja Naukowo-Praktyczna „Energia w nauce i technice”. Suwałki: pp. 241–251.
- Katunin A. i Moczulski W. (2009a): *The conception of a methodology of degradation degree evaluation of laminates*. *Esplorazione e Affidabilità – Maintenance and Reliability* **1(41)**: pp. 33–38.
- Katunin A. i Moczulski W. (2009b): *Evaluation of self-activating temperature influence on cracks initiation in grp laminates*. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* **9**: pp. 403–404.
- Katunin A. i Moczulski W. (2010): *Faults detection in layered composite structures using wavelet transform*. *Diagnostyka* **53**: pp. 27–32.
- Katunin A. i Wysogład B. (2009): *Optimization of sensors location in rotating disc made of polymer-based laminate for diagnostic needs*. W: *Recent Developments in Artificial Intelligence Methods*, T. Burczyński, W. Cholewa i W. Moczulski (Red.). AI-METH Series. Gliwice.
- Kącki E. (1989): *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Klasztorny M. (2004): *Constitutive modelling of resins in the compliance domain*. *Mechanics of Composite Materials* **40**: pp. 349–358.
- Klasztorny M. (2006): *Symulacja procesów reologicznych w duroplastach opisanych modelem HWKK/H*. *Kompozyty* **6**: pp. 32–39.
- Klasztorny M. i Gieleta R. (2002): *The HWKK rheological model for resins*. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **40**: pp. 939–960.
- Klasztorny M., Wilczyński A. P. i Witemberg-Perzyk D. (2000): *A new rheological model for polymeric matrices and its application to predicting properties of fibrous composites*. *Advances in Composite Materials and Structures VII*. WIT Press. Bologna.
- Klasztorny M., Wilczyński A. P. i Witemberg-Perzyk D. (2001): *A rheological model of polymeric materials and identification of its parameters*. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **39**: pp. 13–32.

- Klepka A., Uhl T., Stępiński T., Ambroziński Ł. i Ochoński J. (2010): *Comparison of two baseline-free damage detection techniques based on Lamb waves propagation phenomena*. W: Proceedings of the 5th European workshop Structural Health Monitoring, F. Casciati i M. Giordano (Red.). DEStech Publications, Inc.: pp. 937–942.
- Kovalenko A. D. i Karnaukhov V. G. (1969): *On heat generation in viscoelastic bodies under periodic action*. Pribladnaya Mekhanika **5**: pp. 28–35.
- Kovalenko A. D. i Karnaukhov V. G. (1972): *A linearized theory of thermoviscoelasticity*. Mekhanika Polimerov **2**: pp. 214–221.
- Kovalenko A. D. i Karnaukhov V. G. (1973): *An approximate method of solving dynamical problems of thermoviscoelasticity*. Mekhanika Polimerov **1**: pp. 58–65.
- Kozioł M., Rutecka M., Łuczak K. i Śleziona J. (2005): *Porównanie laminatów żywica epoksydowa - włókno szklane wytworzonych różnymi metodami*. Nowe technologie i materiały w metalurgii i inżynierii materiałowej. Materiały XIII Seminarium Naukowego. Katowice: pp. 151–154.
- Kozioł M. i Śleziona J. (2008): *Kompozyty polimerowo-włókniste o trójwymiarowym zbrojeniu*. Kompozyty **8**: pp. 123–129.
- Krawczuk M., Ostachowicz W. i Żak A. (1996): *Natural vibration frequencies of delaminated composite beams*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences **3**: pp. 233–243.
- Krawczuk M., Ostachowicz W. i Żak A. (1997): *Dynamics of cracked composite material structures*. Computational Mechanics **20**: pp. 79–83.
- Kreith F. i Goswami D. Y. (Red.) (2005): *The CRC handbook of mechanical engineering*. 2nd edn. CRC Press.
- Kucher N. K. i Karnaukhov V. G. (1981): *Thermomechanical behavior of a viscoelastic prism subjected to cyclic loading*. Problemy Prochnosti **8**: pp. 58–62.
- Kudela P. i Ostachowicz W. (2008): *Lamb wave-based damage detection in composite structures: Potentials and limitations*. Proceedings of the 4th European Workshop on Structural Health Monitoring: pp. 482–490.
- Kulshreshtha A. K. i Vasile C. (2002): *Handbook of polymer blends and composites*. iSmithers Rapra Publishing.
- Kumar R. S. i Talreja R. (2003): *A continuum damage model for linear viscoelastic composite materials*. Mechanics of Materials **35**: pp. 463–480.
- Kurzeja L., Szeluga U., Rojek M. i Stabik J. (2000): *Badania procesu starzenia kompozytu epoksydowego o wysokiej wytrzymałości mechanicznej*. Polimery i kompozyty konstrukcyjne. Ustroń.
- Leda H. (2000): *Kompozyty polimerowe z włóknami ciągłymi*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Poznańskiej.
- Leissa A. W. (1969): *Vibration of plates*. NASA SP. Washington D.C.

- Lesieutre G. A. i Govindswamy K. M. (1995): *Finite element modeling of frequency-dependent dynamic behavior of viscoelastic materials in simple shear*. International Journal of Solids and Structures **33**: pp. 419–432.
- Li D. i Garmestani H. (2002): *Texture evolution and stress relaxation of linear low density polyethylene during uniaxial extension*. Polymeric Materials: Science and Engineering **86**: pp. 398–399.
- Li R. (2000): *Time-temperature superposition method for glass transition temperature of plastic materials*. Materials Science and Engineering **A278**: pp. 36–45.
- Liu Z. Y., Benival S., Jenkins C. H. M. i Winter R. M. (2004): *The coupled thermal and mechanical influence on a glassy thermoplastic polyamide: Nylon 6,6 under vibro-creep*. Mechanics of Time-Dependent Materials **8**: pp. 235–253.
- Lovinger Z. i Frostig Y. (2004): *High order behavior of sandwich plates with free edges – edge effects*. International Journal of Solids and Structures **41**: pp. 979–1004.
- Luo W., Yang T., Li Z. i Yuan L. (2000): *Experimental studies on the temperature fluctuations in deformed thermoplastics with defects*. International Journal of Solids and Structures **37**: pp. 887–897.
- Majchrzak E. (2001): *Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej. Częstochowa.
- Majewska K., Mieloszyk M. i Ostachowicz W. (2011): *Application of FBGs grids for damage detection and localisation*. Applied Mechanics and Materials **70**: pp. 375–380.
- Marcovich N. E. i Villar M. A. (2003): *Thermal and mechanical characterization of linear low density polyethylene/wood flour composites*. Journal of Applied Polymer Science **90**: pp. 2775–2784.
- Mieloszyk M., Skarbak L., Krawczuk M., Ostachowicz W. i Żak A. (2011): *Application of fibre Bragg grating sensors for structural health monitoring of an adaptive wing*. Smart Materials and Structures **20**: pp. art. nr 125014.
- Minenkov B. V. i Stasenko I. V. (1977): *Pročnost' detalej iz plastmass*. Mašinostoenie.
- Młyniec A. i Uhl T. (2011): *Modelling of ageing and optimization of composite structures*. Kompozyty **11**: pp. 180–184.
- Moisa S., Landsberg G., Rittel D. i Halary J. L. (2005): *Hysteretic thermal behavior of amorphous semi-aromatic polyamides*. Polymer **46**: pp. 11870–11875.
- Molinari A. i Germain Y. (1996): *Self heating and thermal failure of polymers sustaining a compressive cyclic loading*. International Journal of Solids and Structures **33**: pp. 3439–3462.
- MSC (2007): *Marc 2007r1. Volume A: Theory and user information*.
- Muzia G., Rdzawski Z., Rojek M., Stabik J. i Wróbel G. (2007): *Diagnostyka termowizyjna stopnia degradacji zmęczeniowej kompozytów epoksydowo-szklanych*. Modelowanie Inżynierskie **3**: pp. 99–104.

- Nemirovskii Y. V. i Yankovskii A. P. (2009): *Definition of effective thermomechanical characteristics in the unidirectional reinforced hybrid composite within the bounds of asymmetrical theory of elasticity*. Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsiy **15**: pp. 383–394.
- Niezdziński M. E. i Niezdziński T. (1996): *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Ochelski S. (2004): *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.
- Oldyrev P. P. (1967a): *Opredelenie ustalostnoj dolgovečnosti plastmass po temperature samorazogreva*. Mekhanika Polimerov **1**: pp. 111–117.
- Oldyrev P. P. (1967b): *Self-heating and failure of plastics under cyclic loading*. Mekhanika Polimerov **3**: pp. 483–492.
- Oldyrev P. P. (1981): *High-cycle fatigue of a glass-plastic in strain- and stress-controlled loading regimes*. Mekhanika Kompozitnykh Materialov **2**: pp. 218–226.
- Oldyrev P. P. (1987): *Allowance for the heating of a glass-fiber plastic in high cycle fatigue tests*. Mekhanika Kompozitnykh Materialov **1**: pp. 45–49.
- Oldyrev P. P., Parfeev V. M. i Komar V. I. (1977): *Refined methods of determining the fatigue life of polymers from the heating temperature*. Mekhanika Polimerov **5**: pp. 906–913.
- Oldyrev P. P. i Tamuzh V. P. (1969): *Energy dissipation in a glass-reinforced plastic during prolonged cyclic deformation*. Problemy Prochnosti **3**: pp. 31–35.
- Ostachowicz W., Kudela P., Malinowski P. i Wandowski T. (2009): *Damage localisation in plate-like structures based on PZT sensors*. Mechanical Systems and Signal Processing **23**: pp. 1805–1829.
- Parfeev V. M., Oldyrev P. P. i Tamuzh V. P. (1979): *Damage summation in nonstationary cyclic loading of fiberglass-plastic*. Mekhanika Kompozitnykh Materialov **1**: pp. 65–72.
- Pobedria B. E. i Omarov S. E. (2007): *Determination of material functions for the linear moment theory of viscoelasticity*. Moscow University Mechanics Bulletin **62**: pp. 117–122.
- Poncelet M., Doudard C., Calloch S., Weber B. i Hild F. (2010): *Probabilistic multi-scale models and measurements of self-heating under multiaxial high cycle fatigue*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **58**: pp. 578–593.
- Porębska R. (2008): *Wybrane zagadnienia oceny własności mechanicznych kompozytów termoplastycznych*. PhD thesis. Politechnika Krakowska.
- Porębska R. (2009a): *Energia aktywacji dla kompozytów termoplastycznych*. Czasopismo Techniczne. Mechanika **3**: pp. 237–240.
- Porębska R. (2009b): *Oryginalna metoda badań drgań w polimerach w funkcji częstości i temperatury na jednej próbce*. Czasopismo Techniczne. Mechanika **3**: pp. 241–244.

- Porebska R. i Mazurkiewicz S. (2009): *Energia dyssypacji w kompozytach polimerowych*. Czasopismo Techniczne. Mechanika **3**: pp. 245–248.
- Rabotnov Y. N. (1977): *Elementy nasledstvennoj mehaniki tverdyh tel*. Nauka. Moscow.
- Ramkumar A., Kannan K. i Gnanamoorthy R. (2010): *Experimental and theoretical investigation of a polymer subjected to cyclic loading conditions*. International Journal of Engineering Science **48**: pp. 101–110.
- Ratner S. B. i Korobov V. I. (1965): *Self-heating of plastics during cyclic deformation*. Mekhanika Polimerov **1**: pp. 93–100.
- Ratner S. B., Korobov V. I. i Agamalyan S. G. (1969): *Mechanical and thermal fracture of plastics under cyclic strains*. Fiziko-Khimicheskaya Mekhanika Materialov **5**: pp. 83–93.
- Ratner S. B. i Potapova L. B. (1990): *Multicycle fatigue resistance of brittle polymers*. Mekhanika Kompozitnykh Materialov **4**: pp. 633–638.
- Rice J. R. (1968): *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks*. Journal of Applied Mechanics **35**: pp. 379–386.
- Riddell M. N., Koo G. P. i O'Toole J. L. (1966): *Fatigue mechanisms of thermoplastics*. Polymer Engineering and Science **10**: pp. 363–368.
- Rittel D. (1998a): *Experimental investigation of transient thermoelastic effects in dynamic fracture*. International Journal of Solids and Structures **35**: pp. 2959–2973.
- Rittel D. (1998b): *The influence of temperature on dynamic failure mode transitions*. Mechanics of Materials **30**: pp. 217–227.
- Rittel D. (1999): *On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers*. Mechanics of Materials **31**: pp. 131–139.
- Rittel D. (2000): *An investigation of the heat generated during cyclic loading of two glassy polymers. Part I: Experimental*. Mechanics of Materials **32**: pp. 131–147.
- Rittel D., Eliash N. i Halary J. L. (2003): *Hysteretic heating of modified poly(methylmethacrylate)*. Polymer **44**: pp. 2817–2822.
- Rittel D. i Rabin Y. (2000): *An investigation of the heat generated during cyclic loading of two glassy polymers. Part II: Thermal analysis*. Mechanics of Materials **32**: pp. 149–159.
- Rojek M., Stabik J. i Wróbel G. (2005): *Ultrasonic methods in diagnostics of epoxy-glass composites*. Journal of Materials Processing Technology **162-163**: pp. 121–126.
- Roos C. i Bakis C. E. (2011): *Multi-physics design and optimization of flexible matrix composite driveshafts*. Composite Structures **93**: pp. 2231–2240.
- Rosato D. V. i Rosato M. G. (2000): *Concise encyclopedia of plastics*. Springer.
- Rutecka M., Ślężiona J. i Myalski J. (2004): *Ocena możliwości zastosowania recyklatu poliestrowo-szklanego w produkcji laminatów*. Kompozyty **4**: pp. 56–60.

- Rylko N. (2005): *Obliczanie efektywnej przewodności cieplnej kompozytów włóknistych w przypadku nieustalonego przepływu ciepła*. Kompozyty **5**: pp. 96–100.
- Rymarz C. (1993): *Mechanika ośrodków ciągłych*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Satarkar N. S. i Hilt J. Z. (2008): *Magnetic hydrogel nanocomposites for remote controlled pulsatile drug release*. Journal of Controlled Release **130**: pp. 246–251.
- Savova L. N. (1968): *Two-dimensional problem of the moment theory of viscoelasticity concerning stress concentration near circular hole*. Prikladnaya Mekhanika **4**: pp. 6–13.
- Scarborough S. E., Fredrickson T., Cadogan D. P. i Baird G. (2008): *Creep testing of high performance materials for inflatable structures*. Proc. of 53rd International SAMPE Symposium "Material and Process Innovations: Changing our World".
- Schaff J. R. i Davidson B. D. (1997a): *Life prediction methodology for composite structures. Part I – constant amplitude and two-stress level fatigue*. Journal of Composite Materials **31**: pp. 128–157.
- Schaff J. R. i Davidson B. D. (1997b): *Life prediction methodology for composite structures. Part II – spectrum fatigue*. Journal of Composite Materials **31**: pp. 158–181.
- Schapery R. A. (1990): *Simplifications in the behavior of viscoelastic composites with growing damage*. W: Proc. IUTAM Symposium in Inelastic Deformation of Composite Materials, G. J. Dvorak (Red.). Elsevier. New York-Wien: pp. 193–214.
- Schapery R. A. (1997): *Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations based on thermodynamics*. Mechanics of Time-Dependent Materials **1**: pp. 209–240.
- Schapery R. A. (1999): *Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations with growing damage*. International Journal of Fracture **97**: pp. 33–66.
- Schessel H., Metzler R., Blumen A. i Nonnenmacher T. F. (1995): *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*. Journal of Physics A: Mathematical and General **28**: pp. 6567–6584.
- Senchenkov I. K. i Karnaukhov V. G. (2001): *Thermomechanical behavior of nonlinearly viscoelastic materials under harmonic loading*. International Applied Mechanics **37**: pp. 1400–1432.
- Senchenkov I. K. i Kirichok I. F. (1987): *Forced nonlinear vibrations and dissipative heating of a viscoelastic beam*. Prikladnaya Mekhanika **23**: pp. 91–97.
- Senchenkov I. K., Kozlov V. I., Yakimenko S. N. i Nesterenko N. P. (1992): *Calculation of the plane vibration and vibrational heating of plates of variable thickness*. Prikladnaya Mekhanika **28**: pp. 64–69.
- Senchenkov I. K., Zhuk Y. A. i Karnaukhov V. G. (2004): *Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading*. International Applied Mechanics **40**: pp. 943–969.
- Shalin R. E. (1995): *Polymer matrix composites*. Springer.

- Shen H. S. (2009): *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC Press.
- Sobczak R., Nitkiewicz Z. i Koszkuł J. (2002): *Badania dynamicznych właściwości mechanicznych kompozytów na osnowie polipropylenu wzmocnionych włóknem szklanym*. *Kompozyty* **2**: pp. 78–80.
- Sonsino C. M. i Moosbrugger E. (2008): *Fatigue design of highly loaded short-glass-fibre reinforced polyamide parts in engine compartments*. *International Journal of Fatigue* **30**: pp. 1279–1288.
- Sperling L. H. (2006): *Introduction to physical polymer science*. 4th edn. Wiley-Interscience.
- Stabik J. (2005): *Ageing of laminates in boiling NaCl water solution*. *Polymer Testing* **24**: pp. 101–103.
- Steinberger R., Valadas Leitão T. I., Ladstaetter E., Pinter G., Billinger W. i Lang R. (2006): *Infrared thermographic techniques for non-destructive damage characterization of carbon fibre reinforced polymers during tensile fatigue testing*. *International Journal of Fatigue* **28**: pp. 1340–1347.
- Subramanian S., Reifsnider K. L. i Stinchcomb W. W. (1995): *A cumulative damage model to predict the fatigue life of composite laminates including the effect of a fibre-matrix inter phase*. *International Journal of Fatigue* **17**: pp. 343–351.
- Sullivan R. W. (2006): *On the use of a spectrum-based model for linear viscoelastic material*. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **10**: pp. 215–228.
- Sullivan R. W. (2008): *Development of a viscoelastic continuum damage model for cyclic loading*. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **12**: pp. 329–342.
- Szwedo M., Bednarz J., Paćko P., Pieczonka Ł. i Uhl T. (2009): *Approach to thermographical damage detection in composite plates*. W: *Selected problems of modal analysis of mechanical systems*, T. Uhl (Red.). Publishing House of the Institute for Sustainable Technologies: pp. 166–172.
- Talreja R. (1981): *Fatigue of composite materials: damage mechanisms and fatigue life diagrams*. *Proceedings of Royal Society of London* **A378**: pp. 461–475.
- Talreja R. (2006): *Multi-scale modeling in damage mechanics of composite materials*. *Journal of Materials Science* **41**: pp. 6800–6812.
- Talreja R. (2008): *Damage and fatigue in composites – a personal account*. *Composite Science and Technology* **68**: pp. 2585–2591.
- Tamuzh V. P. (1969): *Behavior of rigid plastics under cyclic loading*. *Mekhanika Polymerov* **5**: pp. 97–107.
- Tarnopol'skii Y. M. i Kincis T. (1985): *Static test methods for composites*. 1st edn. Van Nostrand Reinhold Co.. New York.
- Taylor G. I. i Quinney H. (1934): *The latent energy remaining in a metal after cold working*. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A – Mathematical and Physical Sciences* **143**: pp. 307–326.



- Thostenson E. T. i Chou T.-W. (2008): *Carbon nanotube-based health monitoring of mechanically fastened composite joints*. Composites Science and Technology **68**: pp. 2557–2561.
- Tian Y., Fu Y. i Y. M. (2010): *Nonlinear static/dynamic analysis for elasto-plastic laminated plates with interfacial damage evolution*. Composite Structures **93**: pp. 103–112.
- Topoliński T. (2001): *Possibility of estimation fatigue damage for composite part of machine in work*. Problemy Eksploatacji **3**: pp. 321–330.
- Toubal L., Karama M. i Lorrain B. (2006): *Damage evolution and infrared thermography in woven composite laminates under fatigue loading*. International Journal of Fatigue **28**: pp. 1867–1872.
- Trendafilova I., Manoach E., Cartmel M., Krawczuk M., Ostachowicz W. i Palacz M. (2006): *On the problem for damage detection of vibrating cracked plates*. Applied Mechanics and Materials **5-6**: pp. 247–254.
- Tylikowski A. (1992): *Dynamic stability of composite viscoelastic beams*. Machine Dynamics Problems **3**: pp. 95–106.
- Tylikowski A. (1996): *Dynamic stability of rotating composite shafts*. Mechanics Research Communications **23**: pp. 175–180.
- Tylikowski A. (2003): *Shear deformation effects on thermally induced instability of laminated plates*. Journal of Thermal Stresses **26**: pp. 1251–1261.
- Tylikowski A. i Skalmierski B. (1966): *Drgania lepkosprężystego układu mechanicznego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Mechanika **27**: pp. 25–46.
- Urbaniak M. i Grudziński K. (2006): *Wpływ temperatury na charakterystyki mechaniczne tworzywa epoksydowego EPY poddanego obciążeniom ściskającym*. Kompozyty **6**: pp. 20–25.
- Vallons K., Zong M., Lomov S. V. i Verpoest I. (2007): *Carbon composites based on multi-axial multi-ply stitched preforms – Part 6. Fatigue behaviour at low loads: stiffness degradation and damage development*. Composites A **38**: pp. 1633–1645.
- Whitworth H. A. (1998): *A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading*. Composite Structures **40**: pp. 95–101.
- Wilczyński A. P. (1990): *A basic theory of reinforcement for unidirectional fibrous composites*. Composites Science and Technology **38**: pp. 327–337.
- Wilczyński A. P. i Klasztorny M. (2002): *Modelowanie polimerowych kompozytów włóknistych w zakresie lepkosprężystym*. Kompozyty **2**: pp. 97–102.
- Woźniak C. (Red.) (2001): *Mechanika techniczna. Tom 8: Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Wróbel G., Muzia G. i Pawlak S. (2008): *Zastosowanie termografii aktywnej do wyznaczania zawartości włókien w kompozytach warstwowych typu CFRP oraz GFRP*. Polimery i kompozyty konstrukcyjne. Politechnika Śląska nr 185: pp. 192–202.

- Wróbel G. i Pawlak S. (2006): *Ultrasonic evaluation of the fibre content in glass/epoxy composites*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering **18**: pp. 187–190.
- Wróbel G. i Wierzbicki Ł. (2007): *Ultrasonic methods in diagnostics of polyethylene*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering **20**: pp. 295–298.
- Young W. C. i Budynas R. G. (2002): *Roak's formulas for stress and strain*. McGraw-Hill.
- Zak (2008): *Płyty warstwowe – katalog produkcji*.
- Żak A., Krawczuk M. i Ostachowicz W. (2000): *Numerical and experimental investigation of free vibration of multilayer delaminated composite beams and plates*. Computational Mechanics **26**: pp. 309–315.
- Zhang Z. i Hartwig G. (2002): *Relation of damping and fatigue damage of unidirectional fibre composites*. International Journal of Fatigue **24**: pp. 713–718.

# Ocena trwałości zmęczeniowej laminatów polimerowych w stanie lepkosprężystym z uwzględnieniem zjawisk cieplnych

Praca doktorska - Streszczenie

Autor: mgr inż. Andrzej Katunin

Promotor: prof. dr hab. Wojciech A. Moczulski

Politechnika Śląska w Gliwicach, Wydział Mechaniczny Technologiczny

Niniejsza praca dotyczy modelowania teoretycznego oraz eksperymentalnej oceny wpływu efektu samorozgrzania powstającego na skutek rozpraszania energii mechanicznej – na wytrzymałość i proces zmęczenia laminatów polimerowych wykorzystywanych w budowie środków transportu. Głównym celem przeprowadzonych badań było opracowanie modeli teoretycznych opisujących występowanie efektu samorozgrzania oraz ich weryfikacja eksperymentalna, a także opracowanie modeli zmęczenia, na podstawie których możliwa jest ocena i predykcja stopnia degradacji laminatów polimerowych poddawanych wymuszeniom cyklicznym w przypadku wystąpienia efektu samorozgrzania.

Na podstawie przeglądu bibliograficznego w zakresie modelowania wytrzymałości i zmęczenia laminatów polimerowych stwierdzono, że efekt samorozgrzania jest często pomijany przy obliczeniach inżynierskich. Jak wykazały wstępne badania, efekt samorozgrzania ma istotny wpływ na zachowanie i degradację laminatów polimerowych i przy pewnych parametrach wymuszenia jest czynnikiem dominującym w procesie zmęczenia. W związku z powyższym sformułowano tezę, iż istnieje związek pomiędzy energią rozpraszaną w postaci ciepła i właściwościami mechanicznymi laminatów polimerowych obciążanych cyklicznie oraz wskazano na istniejącą potrzebę opracowania odpowiednich modeli wytrzymałościowych i zmęczeniowych uwzględniających efekt samorozgrzania.

W celu weryfikacji tezy pracy opracowano trzy modele teoretyczne opisujące rozkład temperatury samorozgrzania w stanie ustalonym w układach jedno- i dwuwymiarowych wykonanych z laminatów polimerowych wymuszanych cyklicznie. Przeprowadzono liczne badania eksperymentalne dotyczące określenia charakteru zmian właściwości mechanicznych laminatów pod wpływem różnych temperatur i częstotliwości wymuszeń. Przeprowadzone dynamiczne analizy termomechaniczne pozwoliły uogólnić zasadę Arrheniusa opisującą kinetykę reakcji termochemicznych zachodzących podczas występowania efektu samorozgrzania i przyrostu temperatury o zależność właściwości mechanicznych laminatu od prędkości grzania. Przeprowadzono eksperymentalne badania zmęczenia laminatów oraz opracowano empiryczny i teoretyczno-empiryczny model opisujący zmęczenie z uwzględnieniem efektu samorozgrzania. Otrzymane wyniki cechowały się wystarczającą dokładnością i potwierdziły słuszność tezy sformułowanych w pracy.

**Słowa kluczowe:** zmęczenie cieplne laminatów polimerowych, dyssypacja energii mechanicznej, efekt samorozgrzania, zachowanie lepkosprężyste laminatów polimerowych, uogólniona zasada Arrheniusa.

# Evaluation of fatigue durability of polymeric laminates in viscoelastic state considering thermal phenomena

PhD thesis - Summary

Author: Andrzej Katunin, MSc, Eng.

Supervisor: Prof. Wojciech A. Moczulski, PhD, DSc

Silesian University of Technology at Gliwice, Faculty of Mechanical Engineering

The presented PhD thesis deals with theoretical modelling and experimental evaluation of self-heating effect occurring due to the energy dissipation on strength and fatigue process of polymeric laminates used in transport means building. The main goal of the conducted research was the development of theoretical models, which describe occurrence of the self-heating effect and experimental verification of them and development of fatigue models, that allow evaluation and prediction of degradation degree of cyclically loaded polymeric laminates with occurrence of the self-heating effect.

Basing on bibliographic survey in the area of modelling of strength and fatigue of polymeric laminates it was stated that the self-heating effect is often neglected in engineering calculations. As preliminary research shows, self-heating effect has an essential influence on behaviour and degradation of polymeric laminates and for some excitation parameters it could be a dominating factor in the fatigue process. In connection with above the hypotheses were formulated, that there exists a relation between energy dissipated in the form of heat and mechanical properties of cyclically loaded polymeric laminates, and that the necessity of development of appropriate strength and fatigue models, which consider self-heating effect, has been emphasized.

In order to verify presented hypotheses three theoretical models, which describe steady-state self-heating temperature distribution in cyclically loaded one- and two-dimensional systems made of polymeric laminates were developed. An extensive experimental research concerned with character of evolution of mechanical properties of laminates for various temperatures and excitation frequencies has been carried out. The conducted dynamic thermo-mechanical analyzes allow for generalization of Arrhenius principle, which describes kinetics of thermochemical reactions taking place during occurrence of the self-heating effect and heating-up, by introducing the dependence of mechanical properties of laminates on heating rate. The fatigue experimental research of laminates was carried out and empirical and theoretical-empirical models, which describe fatigue with consideration of the self-heating effect, were developed. The obtained results were characterized by the sufficient accuracy and conduct the soundness of formulated hypotheses.

**Key words:** thermal fatigue of polymeric laminates, dissipation of mechanical energy, self-heating effect, viscoelastic behaviour of polymeric laminates, generalized Arrhenius principle.

# Оценка усталостной прочности полимерных ламинатов в вязкоупругом состоянии с учетом тепловых явлений

Кандидатская диссертация – Резюме

Автор: магистр Андрей Катунин

Руководитель: д.т.н., проф. Войцех А. Мочульский

Силезский Технический Университет в Гливицах, Механический Факультет

Данная работа рассматривает проблематику теоретического моделирования и экспериментальной оценки влияния эффекта саморазогрева возникающего вследствие диссипации механической энергии на прочность и процесс усталости полимерных ламинатов используемых в транспортном машиностроении. Главной целью проведенных исследований была разработка теоретических моделей описывающих возникновение эффекта саморазогрева и их экспериментальное подтверждение, а также разработка усталостных моделей, на основе которых возможна оценка и прогнозирование степени деградации полимерных ламинатов подаваемых циклическим нагрузкам с сопутствующим эффектом саморазогрева.

Основываясь на библиографическом обзоре в области моделирования прочности и усталости полимерных ламинатов замечено, что часто эффект саморазогрева не учитывается в инженерных расчетах. Как показали результаты предварительных исследований эффект саморазогрева имеет значительное влияние на поведение и деградацию полимерных ламинатов и при некоторых параметрах нагрузки является доминирующим фактором в усталостном процессе. В связи с этим были сформулированы тезисы, что существует связь между энергией диссипации и механическими свойствами циклически нагружаемых полимерных ламинатов и было указано на существующую потребность разработки соответствующих прочностных и усталостных моделей учитывающих эффект саморазогрева.

С целью доказательства тезисов работы были разработаны три теоретические модели описывающие стационарное распределение температуры саморазогрева в одно- и двумерных системах из циклически нагружаемых полимерных ламинатов. Проведено ряд экспериментальных исследований связанных с определением характера изменений механических свойств ламинатов под воздействием разных температур и частот нагрузки. Проведенные динамические термомеханические анализы позволили обобщить закон Аррениуса описывающий кинетику термохимических реакций происходящих при возникновении эффекта саморазогрева и возрастание температуры путем введения зависимости механических свойств ламината от скорости нагрева. Были проведены экспериментальные исследования усталости ламинатов, разработано эмпирическую и теоретическо-эмпирическую модели описывающие усталость с учетом эффекта саморазогрева. Полученные результаты характеризовались достаточной точностью и подтвердили верность сформулированных тезисов.

**Ключевые слова:** тепловая усталость полимерных ламинатов, диссипация механической энергии, эффект саморазогрева, вязкоупругое поведение полимерных ламинатов, обобщенный закон Аррениуса.