ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Elektryka z. 47 Nr kol. 428

Władysław Paszek

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

Ryszard Rut

WSI Rzeszów

NAPRĘŻENIA OD SIŁ ELEKTRODYNAMICZNYCH I TERMICZNYCH W GŁĘBOKOŻŁOBKOWYM PRĘCIE KLATKI SILNIKA ASYNCHRONICZNEGO W STANIE ZWARCIA

Streszczenie. Analizę elektrodynamicznego i termicznego działania prądu w pręcie klatki silnika asynchronicznego podjęto w celu przebadania przyczyn powstawania uszkodzeń klatek silników asynchronicznych. Problem działania elektrodynamicznego i termicznego w pręcie klatki silnika asynchronicznego jest zbyt złożony aby analiza w sposób ogólny objęła wirniki klatkowe o dowolnym kształcie żłobka. Z tych względów przyjęto do rozważań pręt głębokożłobkowy wirnika klatkowego analizując działanie prądu nieustalonego jak w nim popłynie po załączeniu do sieci silnika w stanie zwarcia (s = 1).

1. Działanie elektrodynamiczne prądu pręta głębokożłobkowego

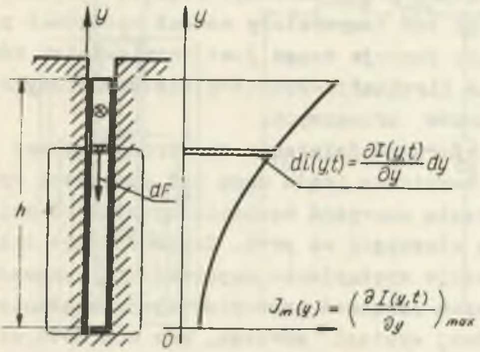
Działanie elektrodynamiczne prądu płynącego prętem głębokożłobkowym (rys. 1.1) na pręt wywołane jest siłą, która powstaje z oddziaływania strumienia żłobkowego na prąd pręta. Wartość tej siły na jednostkę długości obliczamy z prawa Laplace'a

$$F = \int_0^h dF = \int_0^h B(y,t)\, d\, i(y,t)$$

gdzie:

$$d\, i(y,t) = \frac{\partial I(y,t)}{\partial y}\, dy$$

a $I(y, t)$ - to całkowity prąd od 0 do y.



Rys. 1.1. Pręt głębokożłobkowy i rozkład gęstości liniowej na wysokości pręta

Zatem wartość siły korzystając z prawa przepływu przy pominięciu reluktancji rdzenia

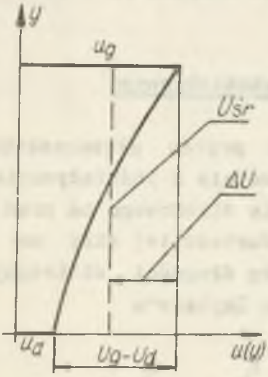
$$H(y,t) = \frac{1}{b_N} I(y,t)$$

będzie można obliczyć z zależności:

$$F = \frac{\mu_o}{b_N} \int_0^h I(y,t) \frac{\delta I(y,t)}{\delta y} dy = \frac{\mu_o}{2 b_N} I^2(h,t) \qquad (1.1)$$

2. Działanie cieplne prądu w pręcie głębokożłobkowym

Działanie cieplne prądu w pręcie głębokożłobkowym jest zjawiskiem złożonym. Z przepływem prądu w rozważanym pręcie związany jest znany efekt jego wypierania. Efektem takiego nierównomiernego przepływu prądu jest wzrost temperatury średniej pręta oraz gradientu temperatury wzdłuż wysokości wywołany repartycją strat wzdłuż wysokości (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Rozkład temperatury wzdłuż wysokości pręta

Przy rozpatrywaniu pojedynczego swobodnego pręta działanie narastającej wartości średniej powoduje dylatacje wzdłużne, które w tym przypadku nie są niebezpieczne.

Natomiast gradient temperatury wzdłuż wysokości pręta powoduje wygięcie pręta. Rozkład zaś temperatury wzdłuż wysokości pręta jako funkcja czasu jest rozwiązaniem równania Kirchhoffa-Fouriera dla określonych warunków brzegowych.

Zarówno działanie elektrodynamiczne jak i termiczne prądu mogą być przyczyną wystąpienia naprężeń mechanicznych, które działają niszcząco na pręt. Szybkozmienne działanie elektrodynamicznej siły powoduje wystąpienie naprężeń σ_D zmęczeniowych materiału w miejscach bliskich połączeń pręt-pierścień. Działanie cieplne w pręcie o swobodzie wzdłużnej wystąpi wówczas, gdy nie może się ugiąć np. usztywniony poprzez pierścienie zwierające. Gradient temperatury będzie przyczyną wystąpienia wewnątrz pręta naprężeń mechanicznych, które dalej nazywane będą naprężeniami termicznymi i oznaczone przez σ_T, a wartość ich w dowolnym miejscu wysokości pręta można obliczyć z zależności

$$\sigma_T = E \alpha \Delta U(y) \qquad (2.1)$$

gdzie:

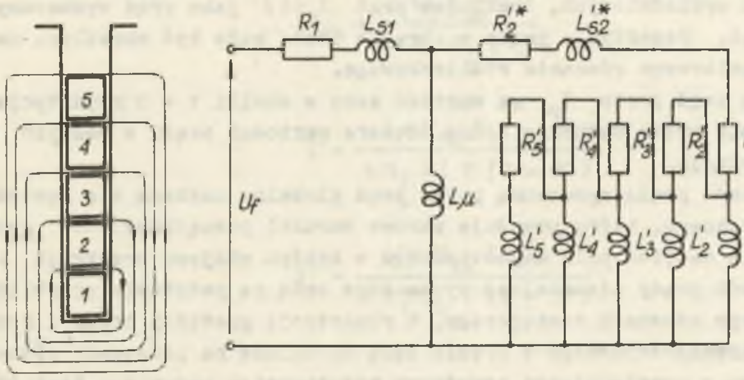
E - moduł Younga,
α - współczynnik rozszerzalności liniowej,
$\Delta U(y)$ - przyrost temperatury w danym miejscu pręta ponad temperaturę średnią.

Konieczne jest więc obliczenie prądu pręta oraz repartycji strat mocy wzdłuż wysokości w rozpatrywanym stanie, tj. w stanie zwarcia po załączeniu silnika do sieci na sztywne napięcie.

3. Obliczenie prądu pręta oraz repartycji gęstości prądu pręta w stanie zwarcia

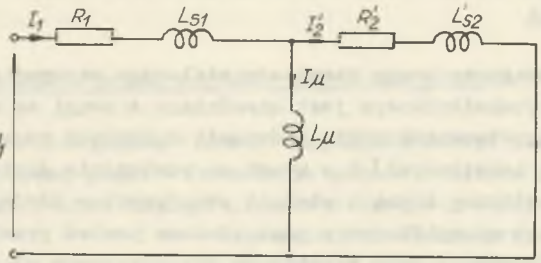
Analiza elektromagnetycznego stanu nieustalonego maszyny asynchronicznej z wirnikiem głębokożłobkowym jest utrudniona z uwagi na rozłożenie parametrów elektromagnetycznych pręta (równania opisujące przebieg nieustalony są równaniami cząstkowymi) i z uwagi na powiązanie globalnej liczby prętów z obwodami elektrycznymi o stałych skupionych w stojanie.

Konsekwencją tego skomplikowania jest złożona postać przebiegów nieustalonych. Dobrą aproksymację tych przebiegów nieustalonych można otrzymać zastępując pręt w żłobku wirnika przez wiązki n włókien przewodnika o parametrach skupionych połączone równolegle na czołach wirnika. Uwzględniwszy sprzężenie włókien ze strumieniem rozproszenia żłobkowego otrzymuje się aproksymujący schemat zastępczy (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Aproksymujący schemat zastępczy maszyny asynchronicznej z prętami głębokożłobkowymi przy zatrzymanym wirniku

Aproksymujący schemat zastępczy jest schematem (n + 1) oczkowym, którego konsekwencją jest przebieg nieustalony prądu, zawierający prócz składowej ustalonej (n + 1) funkcji wykładniczych. Dla zwiększenia przejrzystości wyników analizy usiłowano ograniczyć się do przebiegu nieustalonego zawierającego tylko dwie zastępcze składowe wykładnicze. Do takiego dwu wykładniczego przebiegu można dojść drogą następującego rozumowania. Jeśli impedancje skupione poza prętem dominują w stosunku do impedancji aproksymujących pręt o stałych rozłożonych, przebieg nieustalony prądu silnika jest w granicy przebiegiem dwuwykładniczym, który można obliczyć na podstawie schematu uproszczonego jednej fazy (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Uproszczony schemat zastępczy dla jednej fazy silnika asynchronicznego przy zatrzymanym wirniku

Odpowiednio do takiego przybliżenia pręt wirnika zasilany jest w stanie nieustalonym prądem $I_p(t)$ złożonym ze składowej ustalonej i dwóch składowych wykładniczych, traktując prąd $I_p(t)$ jako prąd wymuszony zasilający pręt. Repartycja prądu w obrębie pręta może być określona na podstawie cząstkowego równania różniczkowego.

Mimo że prąd pręta I_p ma wartość zero w chwili $t = 0$ repartycja prądu w obrębie pręta wykazuje różne od zera wartości prądu w różnych miejscach przekroju.

Na gęstość prądu wymuszoną przez prąd globalny nakłada się gęstość prądu wyrównującego, który powoduje zerowe warunki początkowe dla gęstości prądu i dla natężeń pola magnetycznego w każdym miejscu przekroju pręta. W ten sposób prądy nieustalone wyznaczone będą na podstawie przybliżonego dwuoczkowego schematu zastępczego, a repartycja gęstości prądu i rozkładu pola elektromagnetycznego w pręcie będą określone na podstawie równania r. cząstkowego z uwzględnionym powyższym rozumowaniem warunków początkowych i brzegowych.

Rekapitulując powyższe rozważania można ustalić następujące założenia upraszczające, będące podstawą dalszej analizy nieustalonego stanu elektromagnetycznego:

1. Nienasycony obwód magnetyczny.

2. Sinusoidalny rozkład przepływu silnika (pominięcie wyższych harmonicznych przepływu).

3. Pominięcie strat magnetycznych rdzenia,

4. Silnik nieruchomy w czasie rozruchu ($s = 1$).

5. Założenie dwuwykładniczego przebiegu nieustalonego prądu, który otrzymuje się na podstawie przybliżonego schematu zastępczego o stałych skupionych maszyny ekwiwalentnej o jednym obwodzie wirnika, przy czym parametry wirnika przyjmuje się na podstawie wartości pomierzonych w stanie ustalonym przy zatrzymanym wirniku. Przyjmuje się stałość rezystancji, pominięcie wpływu temperatury.

6. Uwzględnienie stałych rozłożonych w pręcie głębokożłobkowym przy założeniu wymuszonego dwuwykładniczego przebiegu prądu rozruchu silnika.

Prąd pręta w elektromagnetycznym stanie przejściowym, jaki wystąpi przy załączeniu trójfazowego symetrycznego napięcia fazowego i kącie początkowym ψ na symetryczny stojan obliczony w oparciu o uproszczony schemat zastępczy (rys. 3.2), przy zerowych warunkach początkowych ma postać:

$$I_p(t) = I_{um}\sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}) + I'\sin(\psi - \frac{\pi}{2})\, e^{-\frac{t}{T'}} - I''\sin(\psi - \frac{\pi}{2})\, e^{-\frac{t}{T''}} \tag{3.1}$$

gdzie:

$$I_{um} = \frac{L\mu\, U_{1m}\, K}{\omega R_1\, R_2'\, T'T''}$$

$$I' = \frac{L\mu\, U_{1m}\, K}{\omega R_1\, R_2'\, T'(T' - T'')}$$

$$I'' = \frac{L\mu\, U_{1m}\, K}{\omega R_1\, R_2'\, T''(T' - T'')}$$

$K = \frac{2m_1\, z_1\, k_{u1}}{z_2}$ – stała wynikająca z zasady sprowadzenia prądu uzwojenia stojana na stronę uzwojenia wirnika.

Czasową postać siły, która działa na jednostkę długości otrzymamy po wstawieniu wyrażenia (3.1) do równania (1.1).

Po przekształceniu otrzymamy:

$$F(t) = \frac{\mu_0}{2 b_N} \Big[I_{um}^2 \sin^2(\omega t + \psi - \tfrac{\pi}{2}) + I'^2 \sin^2(\psi - \tfrac{\pi}{2}) e^{-\frac{2t}{T'}}$$

$$+ I'' \sin^2(\psi - \tfrac{\pi}{2}) e^{-\frac{2t}{T''}} + 2 I_{um} \sin(\omega t + \psi - \tfrac{\pi}{2}) \cdot$$

$$I' \sin(\psi - \tfrac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{T'}} - 2 I_{um} \sin(\omega t + \psi - \tfrac{\pi}{2}) I'' \sin(\psi - \tfrac{\pi}{2}) e^{-\frac{2t}{T''}}$$

$$- 2 I' I'' \sin^2(\psi - \tfrac{\pi}{2}) e^{-t\left(\frac{1}{T'} + \frac{1}{T''}\right)} \Big] \qquad (3.2)$$

Straty mocy przypadające na jednostkę objętości pręta wywołane przepływem prądu obliczamy z zależności

$$\Delta P(y,t) = \varrho \; J_z^2(y,t)$$

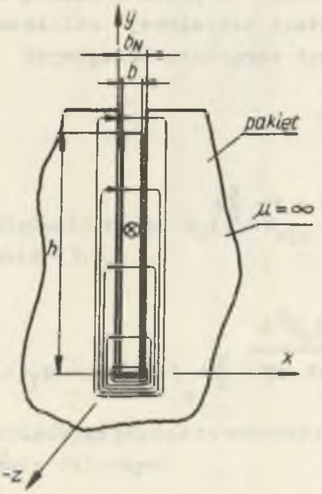
gdzie:

ϱ - rezystywność pręta,

$J_z(y,t)$ - gęstość liniowa prądu w pręcie, którą możemy wyznaczyć z prawa przepływu

$$J_z(y,t) = \frac{b_N}{b} \frac{\partial H_x(y,t)}{\partial y} \qquad (3.4)$$

$H_x(y,t)$ - opisuje repartycję natężenia pola elektromagnetycznego wzdłuż wysokości pręta.



Rys. 3.3. Linie indukcji pola rozproszenia w żłobku

Pole elektromagnetyczne wywołane prądem w pręcie (rys. 3.3) opisują równania Maxwella dla przewodników

$$\mathrm{rot}\ \underline{\vec{H}} = \underline{J}_p$$

$$\mathrm{rot}\ \underline{\vec{E}} = -\mu_o \frac{\delta \underline{\vec{H}}}{\delta t} \tag{3.5}$$

gdzie:

$\underline{J}_p = \gamma \underline{E}$,

$\underline{J}_p$ = gęstość prądu pręta,

γ - konduktywność

$\underline{E}$ - natężenie pola elektrycznego,

$\underline{W} = \underline{E}$, $\underline{J}_p$, $\underline{H}$, $\underline{E}$ - wielkości zespolone, przy czym obowiązuje W Jm($\underline{W}$)

dla przyjętego układu współrzędnych (rys. 3.3) otrzymujemy po przekształceniach równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\delta^2 \underline{H}_x(y,t)}{\delta_y^2} = \gamma\mu_o \frac{\underline{H}_x(y,t)}{\delta t} \tag{3.6}$$

którego rozwiązaniem dla zadanych warunków brzegowych i początkowych jest szukana funkcja opisująca repartycję natężenia pola wzdłuż pręta.

Zakładając liniowy obwód magnetyczny można stosować zasadę superpozycji pól magnetycznych. W tych warunkach wypadkowe natężenia pola magnetycznego można będzie wyznaczyć jako sumę natężeń pól magnetycznych składowych wytworzonych przez poszczególne składowe prądu pręta. Natężenie pola $H_x(y,t)$ jest sumą natężenia pola $H_x(y,t)_{wym}$ - wywołanego prądami wymuszonymi oraz $H_x(y,t)_{wyr}$ - pochodzącego od prądów wyrównawczych w obrębie przekroju pręta. Natężenie pola magnetycznego $H_x(y,t)$ przedstawiamy w postaci sumy

$$\underline{H}_x(y,t) = \underline{H}_x(y,t)_{ust} + \underline{H}'_x(y,t) + \underline{H}''_x(y,t) + \underline{H}_x(y,t)_{wyr} \tag{3.7}$$

$\underline{H}_x(y,t)_{ust}$ - natężenie pola magnetycznego wytworzone przez składową ustaloną prądu pręta wirnika w postaci zespolonej obliczoną z równania (3.6) przy następujących warunkach brzegowych

$$\underline{H}_x(x = 0) = 0$$

$$\underline{H}_x(y = h) = \frac{I_{um}}{b_N}\, e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})}$$

$$\underline{H}_x(y,t)_{ust} = \frac{I_{um}}{b_N}\sqrt{\frac{ch\ 2\ ky - \cos\ 2\ ky}{ch\ 2\ kh - \cos\ 2\ kh}}\; e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})}\, e^{j\left[\varphi_1(y) - \varphi_1(h)\right]} \tag{3.8}$$

gdzie: $k = \sqrt{\frac{\gamma\mu_o\omega}{2}}\ m^{-1}$

$$\varphi_1(y) = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\ ky\ \mathrm{cth}\ ky)$$

$$\varphi_1(h) = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\ kh\ \mathrm{cth}\ kh)$$

$\underline{H}'_x(y,t)$ - natężenie pola magnetycznego wytworzonego przez składowe aperiodyczne o stałych czasowych T' i T'' obliczone z równania (3.6)
$\underline{H}''_x(y,t)$ przy warunkach brzegowych

$$\underline{H}'_x(h) = j\,\frac{I'}{b_N}\, e^{-\frac{t}{T'}}$$

$$\underline{H}''_x(h) = j\,\frac{I''}{b_N}\, e^{-\frac{t}{T''}}$$

otrzymamy zależności w postaci zespolonej

$$\underline{H}'_x(y,t) = j\,\frac{I'}{b_N}\,\sin(\psi - \frac{\pi}{2})\,\frac{\sin k'y}{\sin k'h}\, e^{-\frac{t}{T'}} \tag{3.9}$$

$$\underline{H}''_x(y,t) = j\,\frac{I''}{b_N}\,\sin(\psi - \frac{\pi}{2})\,\frac{\sin k''y}{\sin k''h}\, e^{-\frac{t}{T''}} \tag{3.10}$$

gdzie:

$$k' = \sqrt{\frac{\gamma\mu_o}{T'}}\ m^{-1}$$

$$k'' = \sqrt{\frac{\gamma\mu_o}{T''}}\ m^{-1}$$

Natężenie pola $H_x(y,t)_{wyr}$ od prądów wyrównawczych możemy obliczyć z równania (3.6)

$$\frac{\delta^2 H_x(y,t)_{wyr}}{\delta y^2} = \gamma\mu_o \frac{\delta H_x(y,t)_{wyr}}{\delta t}$$

Zakładając postać rozwiązania powyższego równania i stosując metodę rozdzielenia zmiennych

$$H_x(y,t)_{wyr} = L(y)\ V(t)$$

otrzymamy układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2\ L(y)}{d\ y^2} + \lambda^2\ L(y) = 0$$

$$\gamma\mu_o \frac{d\ V(t)}{dt} + \lambda^2\ V(t) = 0$$

których iloczyn ogólnych rozwiązań

$$L(y) = A\cos\lambda y + B\sin\lambda y$$

$$V(t) = C\ e^{-\frac{\lambda}{\gamma\mu_o} t}$$

będzie rozwiązaniem ogólnym dla określonej strugi prądowej. Natężenie pola magnetycznego wytworzone przez całkowity prąd wyrównawczy możemy wyrazić w postaci:

$$H_x(y,t)_{wyr} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\lambda_n y + B_n \sin\lambda_n y)\ C_n\ e^{-\frac{\lambda_n}{\gamma\mu_o} t}$$

Współczynniki rozwinięcia oraz wartości λ_n możemy wyznaczyć wykorzystując warunek początkowy, tj.

$$H_x(y,0)_{wym} = H_x(y,0)_{wyr} \equiv 0$$

Rozwijając zatem wyrażenie $H_x(y,t)_{wym}$ w przedziale $(0,h)$ dla $t=0$ w szereg sinusów otrzymamy

$$H_x(y,0)_{wym} = \sum_{\xi=1}^{\infty} H\xi y \sin \xi \frac{\pi}{h} y$$

Otrzymamy zatem dla

$$n = \xi$$

$$H\xi y = B_n$$

$$\xi \frac{\pi}{h} = \lambda_n$$

repartycję natężenia pola magnetycznego wywołaną strugami prądów wyrównawczych

$$H_x(y,t) = \sum_{\xi=1}^{\infty} H_x y \sin \xi \frac{\pi}{h} y\, e^{-\frac{\xi \pi}{\gamma \mu_o h} t}$$

Rozkład natężenia pola magnetycznego wzdłuż wysokości

$$H_x(y,t) = \frac{I_{um}}{b_N} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ky - \cos 2ky}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}} \sin\Big[\omega t + \psi - \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \varphi_1(y) - \varphi_1(h)\Big] + \frac{I'}{b_N} \frac{\sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \sin k'y}{\sin k'h} e^{-\frac{t}{T'}} -$$

$$- \frac{I''}{b_n} \frac{\sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \sin k''y}{\sin k''h} e^{-\frac{t}{T''}}$$

$$+ \sum_{\xi=1}^{\infty} H\xi y \sin \xi \frac{\pi}{h} y\, e^{-\frac{\xi \pi}{\gamma \mu_o h} t} \tag{3.11}$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń ostateczną postać rozkładu gęstości $J_z(y,t)$ otrzymano w postaci

$$J_z(y,t) = \frac{I_{um}}{b} k \sqrt{\frac{ch\, 2\, ky + \cos 2\, ky}{ch\, 2\, kh - \cos 2\, kh}} \sin\Big[\omega t + \psi - \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \varphi_3(y) - \varphi_4(h)\Big] + \frac{I' \sin(\psi - \frac{\pi}{2})}{b} \frac{k' \cos k' y}{\sin k' h} e^{-\frac{t}{T'}}$$

$$- \frac{I'' \sin(\psi - \frac{\pi}{2})}{b} \frac{k'' \cos k'' y}{\sin k'' h} e^{-\frac{t}{T''}} + \sum_{\xi=1}^{\infty} J_{Zk} \cos \xi \frac{\pi}{h} y\, e^{-\frac{\xi \pi}{\gamma \mu_0 h} t} \qquad (3.12)$$

gdzie:

$$J_{Zk} = H \xi y \frac{b_N}{b} \xi \frac{\pi}{h}$$

$$\varphi_3(y) = \operatorname{arctg}(\operatorname{thg} ky \operatorname{tg} ky)$$

$$\varphi_4(h) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} kh \operatorname{ctg} kh)$$

W celu uproszczenia analizy nagrzewania pręta w stanie nieustalonym pominięto przy obliczaniu repartycji strat w obrębie pręta człony szybko znikających gęstości prądów wyrównawczych i gęstości aperiodycznych o stałych czasowych T' i T''.

Bezwładność cieplna powoduje, że takie uproszczenie nie wprowadza uszczerbku dokładności obliczeń przyrostu temperatury.

Do analizy wzięto składową ustaloną rozkładu gęstości w pręcie. Uwzględniono gęstość skuteczną prądu pomijając pulsację strat cieplnych o częstotliwościach 100 Hz, które nie ujawniają się w odpowiadających im pulsacjach temperatury z uwagi na dużą bezwładność cieplną.

Rozkład strat wyraża zależność:

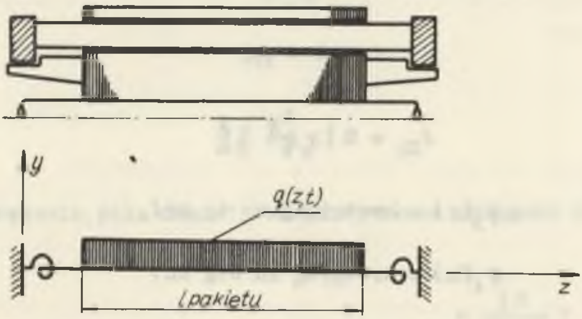
$$\Delta P(y) = \rho \frac{I_{um}^2}{2b^2} k^2 \frac{ch\, 2\, ky + \cos 2\, ky}{ch\, 2\, kh - \cos 2\, kh} \qquad (3.13)$$

4. Wyznaczenie stanu przemieszczeń i naprężeń pręta spowodowanych skutkami elektrodynamicznymi i termicznymi przepływu prądu w pręcie

Analizę prowadzono w oparciu o następujące założenia upraszczające:

1) pręt umocowany jest tylko na końcach w pierścieniach zwierających,
2) uwzględniono sprężystość tego zamocowania,
3) przyjęto, że wszystkie pręty nagrzewają się symetrycznie,
4) pręty mogą swobodnie wydłużać się łącznie z pierścieniem zwierającym.

Przyjęcie umocowania pręta tylko na końcach powoduje największe naprężenia od sił elektrodynamicznych.



Rys. 4.1. Szkic wirnika a) i zastępczy model wytrzymałościowy

Model do obliczeń

Równanie różniczkowe pręta o stałej sztywności zginania E I

$$E\,I\,\frac{\delta^4 w(z,t)}{\delta z^4} + A\rho_m \frac{\delta^2 w(z,t)}{\delta t^2} + 2\beta_t' A\rho_m \frac{\delta w(z,t)}{\delta t} = q(z,t) \tag{4.1}$$

gdzie:

$A\rho_m \frac{\delta^2 w(z,t)}{\delta t^2}$ - uwzględnia bezwładność pręta,

$2\beta_t A\rho_m \frac{\delta w(z,t)}{\delta t}$ - siły tłumienia,

$q(z,t)$ – obciążenie zewnętrzne siłą elektrodynamiczną,

A – przekrój pręta,

ρ_m – gęstość materiału,

β_t – współczynnik tłumienia,

EI – sztywność zginania,

l – długość pręta,

c – stała sprężysta, charakteryzująca podatność pierścienia na przemieszczenie kątowe.

Do rozwiązania zastosowano metodę Fouriera rozdzielenia zmiennych. Przyjmując zatem $w(z,t) = Y(z)\ w(t)$ i wstawiając do równania (5.1) jednorodnego po rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{EI}{A\rho_m}\ \frac{d^4\ Y(z)}{dz^4} - r\ Y(z) = 0$$

$$\frac{d^2\ W(t)}{dt^2} + 2\beta_t\ \frac{d\ W(t)}{dt} + r\ W(t) = 0$$

Przyjmując

$$\frac{A\rho_m}{EI}\ r = k_i^4$$

otrzymamy:

$$\frac{d^4\ Y(z)}{dz^4} - k_i^4\ Y(z) = 0$$

Podstawiając $Y(z) = e^{k\alpha_z}$

otrzymamy równanie charakterystyczne

$$\alpha^4 - k_i^4 = 0$$

$$\alpha_1 = k_i; \quad \alpha_2 = -k_i; \quad \alpha_3 = j\ k_i; \quad \alpha_4 = -j\ k_i$$

$$Y(z) = C\ ch\ k_i\ z + D\ ch\ k_i\ z + E\cos k_i\ z + F\sin k_i\ z$$

Stałe C, D, E, F - wyznacza się z warunków brzegowych.

a. $Y(0) = 0$

b. $Y(l) = 0$

c. $$c \left.\frac{d\,Y}{d\,z}\right|_{(z=0)} = E\,I \left.\frac{d^2\,Y}{d\,z^2}\right|_{(z=0)}$$

d. $$-c \left.\frac{d\,Y}{d\,z}\right|_{(z=l)} = E\,I \left.\frac{d^2\,Y}{dz}\right|_{(z=0)}$$

Istnieje rozwiązanie nietrywialne, którego warunkiem jest zerowanie się wyznacznika układu równania

2a. $C + E = 0$

2b. $C\,dz\,k_i\,l + D\,sh\,k_i\,l + E\,ch\,k_i\,l + F\,sin\,k_i\,l = 0$

2c. $\frac{c}{E\,I\,k_i}\,(D + F) = C - E$

2d. $$\frac{c}{E\,I\,k_i}\,(C\,sh\,k_i\,l + D\,ch\,k_i\,l + F\,cos\,k_i\,l) =$$

$$= -(C\,ch\,k_i\,l + D\,sh\,k_i\,l - E\,cos\,k_i\,l - F\,sin\,k_i\,l)$$

Warunek można sprowadzić do postaci

$$\frac{\beta^2}{\mu^2}\,(1 - \cos\mu\,ch\mu) + \frac{2}{\beta\mu}\,(ch\mu\,\sin\mu - ch\mu\,\cos\mu) +$$

$$+ 2\,sh\mu\,\sin\mu = 0$$

gdzie:

$$\mu = k_i\,l \qquad \beta = \frac{c\,l}{E\,I}$$

Wartości μ, które zerują wyznacznik, oznaczają wartości własne zagadnienia brzegowego, tj.: układu pręt-pierścień.

Rozwiązanie odpowiadające n-tej wartości własnej jest n-tą funkcją własną $Y_n(z)$ postawionego zagadnienia brzegowego.

Rozwiązanie $w(z,t)$ możemy przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg względem funkcji własnych

$$W(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)\,Y_n(z)$$

Funkcje własne w przedziale (0,1) są ortogonalne, tzn.

$$\int_0^1 Y_n(z)\, Y_m(z)\, dz = c_n\, \delta_{mn}$$

$$\delta_{mn} \begin{cases} 1 \text{ gdy } m = n \\ 0 \text{ gdy } m = n \end{cases}$$

W dalszej części pracy funkcje własne unormowano, mnożąc przez normujący czynnik $\frac{1}{\sqrt{c_n}}$

gdzie:

$$c_n = \int_0^1 Y_n^2(z)\, dz$$

dzięki czemu uzyskano ortogonalne funkcje własne, których

$$\int_0^1 Y_m(z)\, Y_n(z) = 1 \quad \text{dla } m = n$$

Rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[E\, I\, W_n(t) \frac{d^4\, Y_n(z)}{dz^4} + A\rho_m \frac{d^2\, W_n(t)}{dt^2} Y_n(z) +$$

$$+ 2\beta_t\, A\rho_m\, Y_n(z) \frac{d\, W_n(t)}{dt} \Big] = q(z,t)$$

Wykorzystując warunek ortogonalności - po wymnożeniu obustronnie przez $Y_n(z)$ i scałkowaniu od 0 do 1 otrzymujemy równanie względem funkcji $W_n(t)$

$$\frac{E\, I}{A\rho_m} k_n^4\, W_n(t) + \frac{d^2\, W_n(t)}{dt^2} + 2\beta_t + \frac{d\, W_n(t)}{dt} = q_n(z,t)$$

gdzie:

$$q_n(z,t) = \frac{1}{A\rho_m}\int_0^l q(z,t)\, Y_n(z)\, dz$$

przy założeniu warunków początkowych

$$W_n(t = 0) = 0$$

$$\frac{d\, W_n(t = 0)}{dt} = 0$$

oraz przy upraszczającym założeniu małego tłumienia $(\beta_t = 0)$. Uproszczenie takie powoduje znikome błędy, ponieważ częstość drgań własnych znacznie jest większa od częstotliwości wymuszającej - rozwiązanie przyjmie postać

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{A\rho_m}}\, k_n^2}\int_0^t q_n(z,\tau)\, \sin\left[\sqrt{\frac{EI}{A\rho_m}}\, k_n^2(t-\tau)\right] d\tau$$

po wstawieniu wyrażenia na $q_n(z,\tau)$

$$W_{nD}(t) = \frac{1}{A\rho_m}\int_0^l Y_n(z)\, \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{A\rho_m}}\, k_n^2}\left\{\int_0^t q(z,\tau)\right.$$

$$\left.\sin\left[\sqrt{\frac{EI}{A\rho_m}}\, k_n^2(t-\tau)\right] d\tau\right\} dz$$

po wstawieniu $q(t)$ - oraz wykonaniu przekształceń otrzymano wyrażenia opisujące przemieszczenie wywołane działaniem siły elektrodynamicznej.

Przemieszczenie $w_D(z,t)$

$$w_D(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nD}(t)\, Y_{nD}(z)$$

$$w_D(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A\varrho_m} \frac{1}{\sqrt{C_n}} \frac{1}{\mu_n} \left\{ \mathrm{sh}\mu_n - \frac{\mathrm{ch}\mu_n - \cos\mu_n + \frac{2}{\beta}{}_n \sin\mu_n}{\mathrm{sh}\mu_n - \sin\mu_n} \right.$$

$$\left. (\mathrm{ch}\mu_n - 1) - \sin\mu_n \frac{\mathrm{ch}\mu_n - \cos\mu_n + \frac{2}{\beta}\mu_n \,\mathrm{sh}\mu_n}{\mathrm{sh}\mu_n - \sin\mu_n} (\mathrm{ch}\mu_n - 1) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{A\varrho_m}}\, k_n^2} \frac{\mu_o}{2b_n} \left\{ I_{pm}^2\, M_1(n,t) + I^2 \sin^2(\psi - \frac{\pi}{2})\, M_2'(n,t) \right. +$$

$$+ I'^2 \sin^2(\psi - \frac{\pi}{2})\, M_2''(n,t) + 2\, I_{pm}\, I' \sin(\psi - \frac{\pi}{2})\, M_3'(n,t)$$

$$\left. - 2\, I_{pm}\, I'' \sin(\psi - \frac{\pi}{2})\, M_3''(n,t) - 2\, I'\, I'' \sin^2(\psi - \frac{\pi}{2})\, M_4(n,t) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{C_n}} \left\{ \mathrm{ch}\, \frac{\mu_n z}{l} - \frac{\mathrm{ch}\mu_n - \cos\mu_n + \frac{2}{\beta}\mu_n \sin\mu_n}{\mathrm{sh}\mu_n - \sin\mu_n}\, \mathrm{sh}\, \frac{\mu_n z}{l} \right.$$

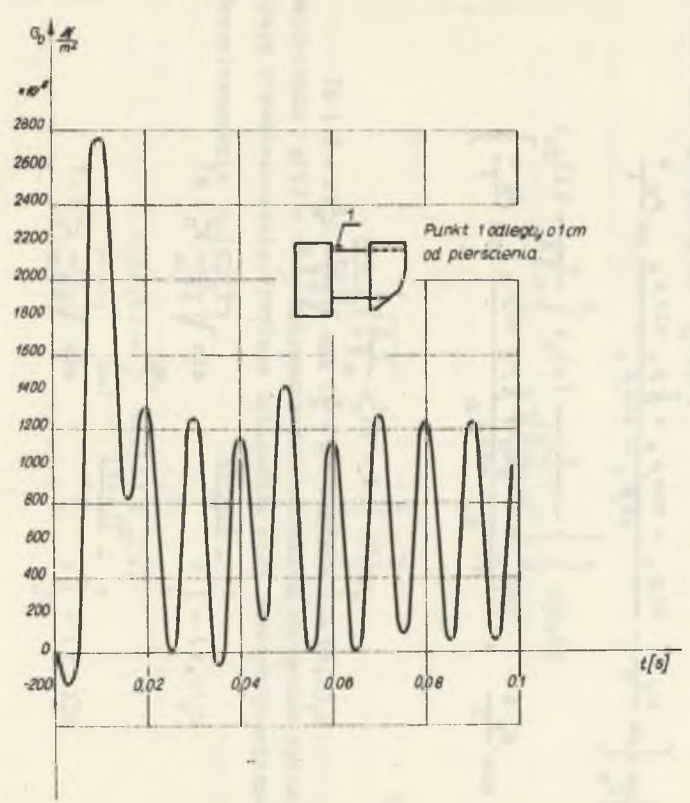
$$\left. - \cos \frac{\mu_n z}{l} + \frac{\mathrm{ch}\mu_n - \cos\mu_n + \frac{2}{\beta}\mu_n \,\mathrm{sh}\mu_n}{\mathrm{sh}\mu_n - \sin\mu_n} \sin \frac{\mu_n z}{l} \right\}$$

gdzie:

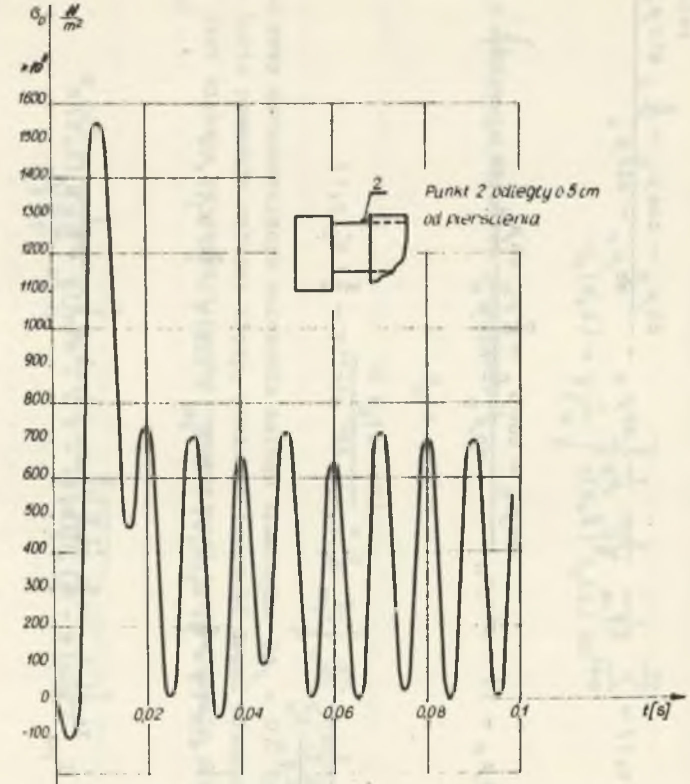
$$M_1(n,t) = \int_0^t \sin^2(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}) \sin \sqrt{\frac{EI}{A\varrho_m}}\, k_n^2 (t - \tau)\, d\tau$$

$$M_2'(n,t) = \int_0^t e^{-\frac{2(t-\tau)}{T'}} \sin \sqrt{\frac{EI}{A\varrho_m}}\, k_n^2 \tau\, d\tau$$

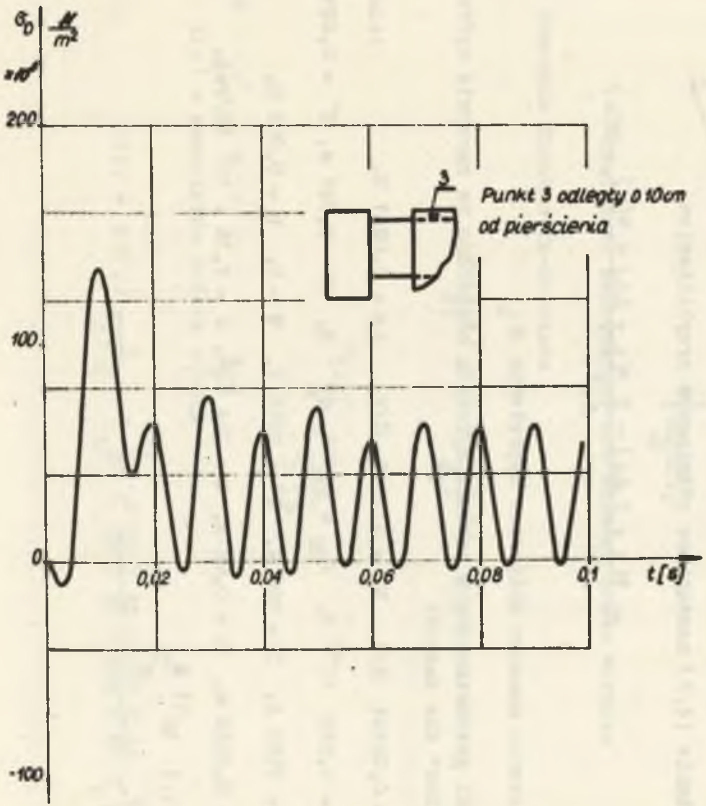
$$M_2''(n,t) = \int_0^t e^{-\frac{2(t-\tau)}{T''}} \sin \sqrt{\frac{EI}{A\varrho_m}}\, k_n^2 \tau\, d\tau$$



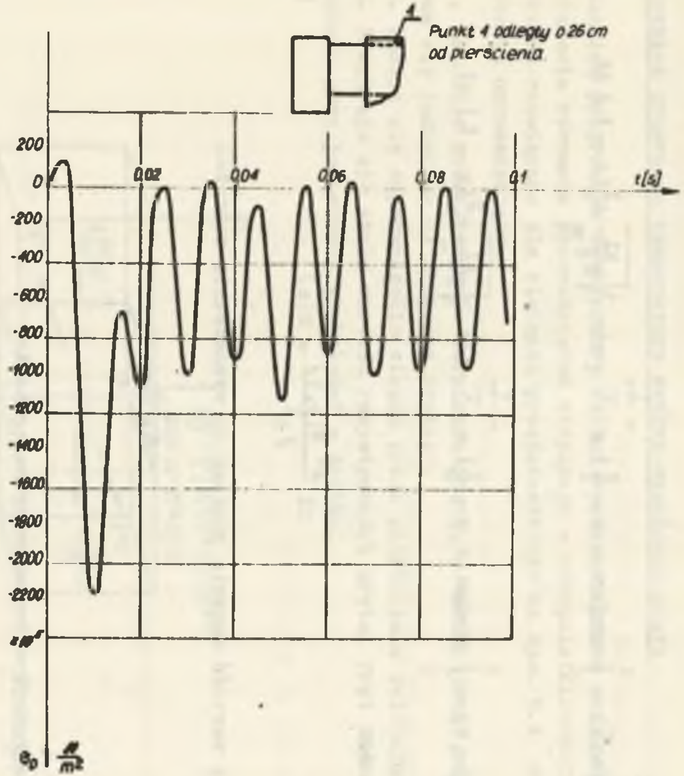
Rys. 4.2a. Przebieg naprężeń σ_D wywołanych siłą elektrodynamiczną w punkcie 1 przy I_{um} = 9550 A, I" = 100 A, I" = 9650 A, ψ = 0



Rys. 4.2b. Przebieg naprężeń σ_D wywołanych siłą elektrodynamiczną w punkcie 2 przy I_{um} = 9550 A, I' = 100 A, I" = 9650 A, ψ = 0



Rys. 4.2c. Przebieg naprężeń σ_D wywołanych siłą elektrodynamiczną w punkcie 3, przy I_{um} = 9550 A, I'= 100 A, I" = 9650 A, =



Rys. 4.2d. Przebieg napięcia σ_D wywołanych siłą elektrodynamiczną w punkcie 4 przy I_{um} = 9150 A, I'= 100 A, I" = 9650 A, Ψ = 0,

$$M_3'(n,t) = \int_0^t \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})\, e^{-\frac{\tau}{T'}} \sin \sqrt{\frac{EI}{A\varrho_m}}\, k_n^2 (t - \tau)\, d\tau$$

$$M_3''(n,t) = \int_0^t \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})\, e^{-\frac{\tau}{T''}} \sin \sqrt{\frac{EI}{A\varrho_m}}\, k_n^2 (t - \tau)\, d\tau$$

z zależności

$$EI \frac{\delta^2 W(z,t)}{\delta z^2} = M(z) \tag{4.2}$$

obliczamy wartość momentu gnącego do wyznaczenia naprężeń

$$\sigma = \frac{M}{W_x}$$

gdzie:

W_x - wskaźnik wytrzymałości na zginanie.

Wyrażenie (4.2) zastąpiono różnicowym przybliżeniem

$$EI \frac{W(z + 2\Delta z) - 2\, W(z + \Delta z) + W(z)}{\Delta z^2} = M(z)$$

Po obliczeniu momentu obliczono naprężenia σ_D.

Wyniki przedstawione w postaci wykresów obliczono na maszynie cyfrowej "ODRA 1204" dla danych:

$R_1 = 0{,}02101\ \Omega/f$, $R_2' = 0{,}0282\ \Omega/f$, $L\mu = 0{,}0241$ H,

$L_{S1} = 0{,}566\ 10^{-3}$ H, $L_{S2}' = 0{,}578\ 10^{-3}$ H, $T' = 2{,}021$ s, $T'' = 0{,}021$s,

$I_{um} = 9550$ A, $I' = 100$ A, $I'' = 9650$ A, $\psi = 0$, $b = 0{,}005$ m,

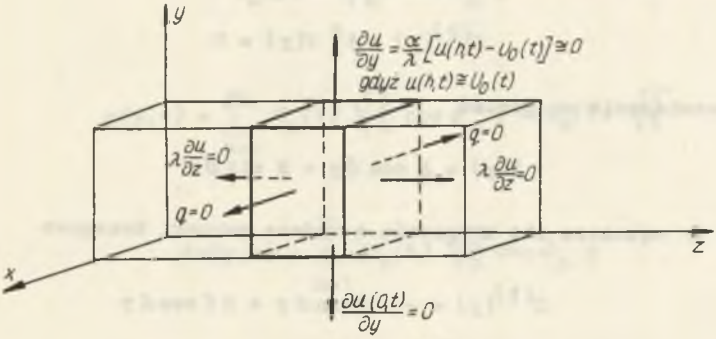
$b_N = 0{,}0058$ m, $h = 0{,}04$ m, $\omega = 314\ \frac{rad}{s}$, $c = 2{,}36\ .\ 10^5$ Nm/rad,

$E = 1{,}1\ \ 10^{11}\ \frac{N}{m^2}$

5. Rozkład przyrostu temperatury wzdłuż wysokości pręta

Rozkład przyrostów temperatury wzdłuż wysokości pręta otrzymuje się z rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego - równania Kirchhoffa-Fouriera, które rozwiązano dla elementu przedstawionego na rys. 5.1 przyjmując założenia upraszczające:

1. Istnieje pełna izolacja termiczna pręta, w wyniku czego nagrzewanie odbywa się jednakowo na długości pręta;
2. Pomija się odprowadzenie ciepła przez pierścienie zwierające;
3. Przyjmuje się stałą wartość rezystywności pręta. Pręt nagrzewa się jednakowo przy jednakowej głębokości w żłobku.



Rys. 5.1. Naprężający się element pręta wirnika

Równanie Kirchhoffa-Fouriera

$$\frac{\delta u(y,t)}{\delta t} = a^2 \frac{\delta^2 u(y,t)}{\delta y^2} + f(y) \tag{5.1}$$

gdzie:

$$a^2 = \frac{\lambda m}{c_p \varrho_m}$$

zaś

$f(y)$ = wewnętrzne źródła ciepła

$$f(y) = \Delta P(y) \frac{1}{c_p \varrho_m} = \varrho \frac{I_{um}^2}{b^2} k^2 \frac{\mathrm{ch}\, 2ky + \cos 2ky}{\mathrm{ch}\, 2kh - \cos 2kh} \frac{1}{c_p \varrho_m}$$

opisuje rozkład przyrostów temperatury wzdłuż wysokości przy następujących warunkach brzegowych i początkowych.

$$\frac{\delta u}{\delta y}(0,t) = 0; \quad \frac{\delta u}{\delta y}(h,t) = 0$$

oraz $u(y,0) = 0$.

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych

$$u(y,t) = u(t)\,X(y)$$

otrzymuje się po wstawieniu

$$X^{(2)}(y) + \delta^2 X(y) = 0$$

którego rozwiązanie ma postać

$$X(y) = A\cos\delta y + B\sin\delta y$$

Stałe A, B wyznacza się w oparciu o zadane warunki brzegowe

$$X^{(1)}(y) = -A\delta\sin\delta y + B\delta\cos\delta y$$

stąd

$$X^{(1)}(o) = 0 \longrightarrow 0 = B\delta \rightarrow B = 0$$

$$X^{(1)}(h) = 0 \longrightarrow 0 = -A\delta\sin\delta h$$

ponieważ $A \neq 0$ to $\sin\delta h = 0$

Aby rozwiązanie było nietrywialne

$$\delta_m h = 0 + m\pi$$

dla

$$m = 0,1,2,3\ldots$$

Stąd

$$\delta_m = m\frac{\pi}{h}$$

Rozwiązanie ma postać

$$X_m(y) = A\cos\delta_m y$$

$X_m(y)$ - są funkcjami własnymi zagadnienia brzegowego.

Funkcje $X_m(y)$ można unormować

$$\int_0^h A^2 \cos^2 \delta_m y \, dy = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\int_0^h \cos^2 \delta_m y \, dy}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{h}}$$

Zatem

$$X_m(y) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos \delta_m y$$

$$u(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t) \sqrt{\frac{2}{h}} \cos \delta_m y + U_o(t) \sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$\Delta u(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} U_n(t) \sqrt{\frac{2}{h}} \cos \delta_m y$$

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m X_m(y)$$

przy czym

$$\Theta_m = \sqrt{\frac{2}{h}} \int_0^h f(y) \cos \delta_m y \, dy$$

$$\Theta_o = \sqrt{\frac{1}{h}} \int_0^h f(y) \, dy$$

Z równania Kirchhoffa-Fouriera mamy:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[U_m(t') + a^2 \delta_m^2 U(t) - \Theta_m \right] X_m(y) = 0$$

stąd

$$U_m'(t) + a^2 \delta_m^2 u(t) = \Theta_m$$

Rozwiązanie tego równania przy zadanym warunku początkowym $U_m(y,t) = 0$ jest następujące:

$$U_m(t) = \frac{\theta_m}{a^2 \delta_n^2}\left(1 - e^{-a^2\delta_m^2 t}\right)$$

Wyrażenie opisujące przyrost temperatury wzdłuż wysokości ponad wartość średnią

$$U(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{a^2\delta_m^2}\left(1 - e^{-a^2\delta_m^2 t}\right)\sqrt{\frac{2}{h}}\cos\delta_m y =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{h}}\cos\delta_m y \frac{1}{a^2\delta_m^2}\left(1 - e^{-a^2\delta_m^2 t}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{h}}\int_0^h \frac{\varrho}{C_p\varrho_m}\frac{I_{um}^2 k^2}{b^2}\frac{\operatorname{ch} 2ky + \cos 2ky}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}\cos\delta_m y\, dy$$

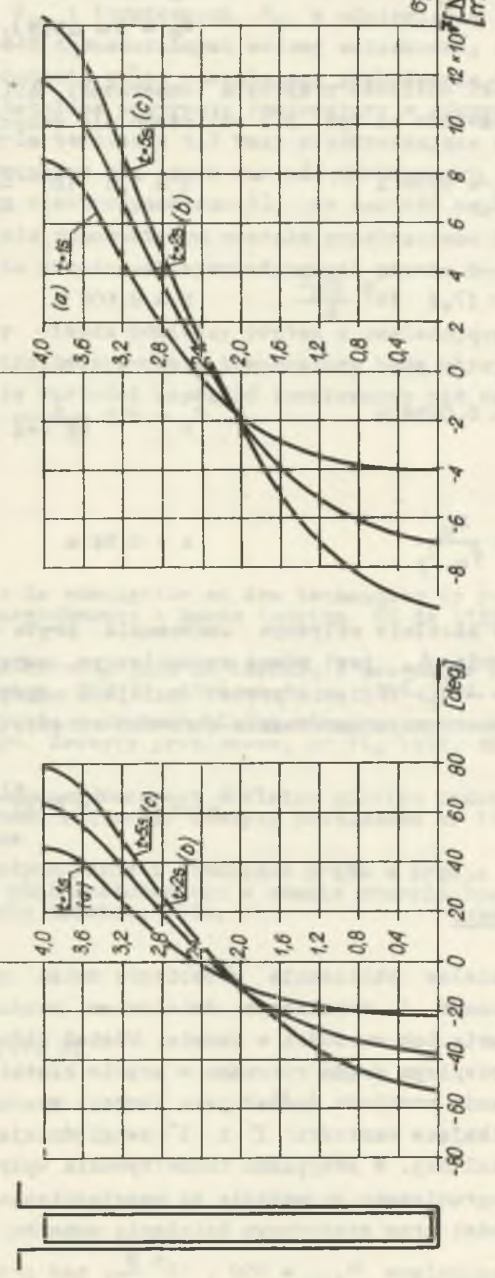
a po przekształceniu i wykonaniu całkowania

$$U(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 I_{um}^2 \varrho k^2}{h C_p \varrho_m b^2 a^2\delta_m^2}\frac{\cos\delta_m y}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}$$

$$\left(1 - e^{-a^2\delta_m^2 t}\right)\left\{\frac{2k}{2(4k^2 + \delta_m^2)}\left(e^{2kh}\cos\delta_m h -\right.\right.$$

$$\left.- e^{-2kh}\cos\delta_m h\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k + \delta_m}\sin(2k + \delta_m)h +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2k - \delta_m}\sin(2k - \delta_m)h\right\}\right.$$



Rys. 5.2. Rozkład przyrostu temperatury ponad wartość średnią oraz rozkład naprężeń termicznych wzdłuż wysokości pręta po czasie (a) 1 s, (b) 2 s, (c) 5 s

Wartości naprężeń σ_T wywołanych gradientem temperatury obliczono z zależności (3.1).

$$\sigma_T = E\alpha\ \Delta U(y).$$

Wyniki obliczeń przyrostu temperatury $\Delta U(y,t)$ oraz wartości naprężeń przedstawione na rys. 5.2 obliczono dla danych:

$I_{um} = 9550$ A $\quad E = 1,1\ 10^{11}\ \frac{N}{m^2}$ $\quad k = 105\ m^{-1}$

$\rho = 17,5\ 10^9\ \frac{\Omega m^2}{m}$ $\quad b = 0,005$ m $\quad \rho_m = 8300\ \frac{kg}{m^3}$

$b_N = 0,0058$ m $\quad C_p = 419\ \frac{J}{kg\ deg}$ $\quad \lambda_m = 372\ \frac{W}{m\ deg}$

$a^2 = \frac{\lambda_m}{\rho_m\ C_p}$ $\quad h = 0,04$ m $\quad \alpha = 1,67\ 10^{-5}\ deg^{-1}$

Przy idealnie sztywnym umocowaniu pręta w pierścieniach zwierających naprężenie σ_T jest równe mechanicznym naprężeniom od sił termicznych $\sigma_{mech} = -\sigma_T$. Ugięcie pręta zmniejsza naprężenia. Można wykazać [5], że przy dwustronnym umocowaniu obrotowo sprężystym pręta

$$\sigma_{mech} = -\sigma_T \frac{cl}{2\ EI + cl}$$

6. Wnioski

Oddzielne obliczenie przebiegów zmian naprężeń wywołanych elektrodynamicznym i termicznym działaniem prądu rozruchu dało możliwość porównania ich wartości w czasie. Udział składowych aperiodycznych w wydatku cieplnym prądu rozruchu w pręcie klatki jest mały. Dlatego też przy obliczeniu rozkładu źródeł jako funkcji wysokości i czasu pominięto szybko zanikające wartości I' i I'' uwzględniając jedynie działanie składowej ustalonej. W przypadku rozpatrywania wpływu termicznego składowej ustalonej ograniczono rozważania do uwzględnienia wartości skutecznej prądu. Dla miedzi przy statycznym działaniu momentu gnącego dopuszcza się naprężenie zginające $\sigma_{dop} = 850 \cdot 10^5\ \frac{N}{m^2}$, zaś przy zmęczeniowym jednostronnym działaniu momentu $\sigma_{dop} = (300-350) \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$. Z porównania obliczonych wartości naprężeń dynamicznych σ_D i termicznych σ_T w odniesieniu do podanych wyżej wartości naprężeń dopuszczalnych możemy wnioskować, że pręt jest bardziej odporny na naprężenia wolno narastające pochodzenia termicznego. Mimo że po 5 s prawie ustalone przyrosty temperatury w górnych włóknach pręta wywołują naprężenia termiczne 1,7 razy przekraczające wartość naprężenia dopuszczalnego (osiągając tym samym wartość porównywalną ze składową ustaloną naprężenia siły elektrodynamicznej), to wartość naprężenia dopuszczalnego przy działaniu zmęczeniowym została przekroczona czterokrotnie, a przy uwzględnieniu składowych aperiodycznych prawie 8-krotnie (rys. 4.2a).

Przy uwzględnieniu wymiany ciepła pomiędzy prętem a posiadającym dużą pojemność cieplną pakietem wirnika, przyrosty temperatury będą mniejsze od obliczonych wywołując mniejsze wartości naprężeń termicznych niż wartości obliczone.

LITERATURA

[1] Deripe M.J.: Evolution de la conception et des techniques de realisation des grands moteurs asynchrones a haute tension. RG de l'Electricité 1967 r. s. 757-774.

[2] Bichet J.: Developpements recents dans la technique des cages rotoriques des moteurs asynchrones. RGE 75, 1966 nr 9, s. 1095-1102.

[3] Bernadt M. i inni: Naprężenia w prętach klatki wirnika w czasie rozruchu silnika indukcyjnego. Zeszyty problemowe, nr 16, 1972, ZKDPME - "KOMEL" Katowice.

[4] Różycki A.: Analiza pola temperaturowego w klatce silnika indukcyjnego głębokożłobkowego podczas rozruchu. Zeszyty problemowe nr 11,1970, ZKDPME - "KOMEL" Katowice.

[6] Rut R.: Działanie elektrodynamiczne i termiczne prądu w pręcie klatki silnika asynchronicznego głębokożłobkowego w stanie zwarcia. Praca doktorska. Politechnika Śląska Gliwice, 1974.

Przyjęto do druku w czerwcu 1974 r.

МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ОТ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ
И ТЕРМИЧЕСКИХ СИЛ ВНУТРИ ГЛУБОКОПАЗНОГО СТЕРЖНЯ
БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКИ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ
ВО ВРЕМЯ ПУСКА ПРИ НЕПОДВИЖНОМ РОТОРЕ

Р е з ю м е

Проанализированы механические напряжения от электродинамических сил, действующих на глубокопазный стержень беличьей клетки, закрепленный упруго-оборотно к короткозамкнутым кольцаи, а также от термических сил, вызванных градиенто температуры вдоль стержня при адиабатном нагревании. Решения дифференциальных уравнений послужили основой для программы на ЭВМ. Полученные результаты изображены в виде графиков.

MECHANICAL STRESSES CAUSED BY ELECTRO-DYNAMIC
AND THERMAL FORCES IN A DEEP BAR OF
AN ASYNCHRONOUS MOTOR SQUIRREL CAGE AT LOCKED ROTOR

S u m m a r y

Analysis of mechanical stresses caused by electrodynamic forces and thermal forces caused by temperature gradient at adiabatic rotor heating, affecting the deep bars fixed elastically into the short-circui ting ring, was presented.

Solutions of differential equations were calculated by computer programming. The obtained results have been presented as diagramms.