

Janusz Książek  
Adam Różycki

Zakład Maszyn Elektrycznych  
Politechniki Śląskiej

MODELOWANIE STANÓW CIEPLNIE NIEUSTALONYCH  
W MASZYNACH ELEKTRYCZNYCH NA ANALOGU RC

**Streszczenie.** Przedstawiono zastosowanie elektrycznego analogu RC do rozwiązywania termokinetycznych procesów w maszynach elektrycznych. Na analogu zamodelowano i rozwiązano przebieg nagrzewania silnika indukcyjnego.

1. Wstęp

Nieustalone przebiegi cieplne w maszynach elektrycznych mogą być opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi. W równaniach tych występują obwody cieplne o stałych rozłożonych.

Równania stanów nieustalonych można również dobrze aproksymować równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. W równaniach tych występują zastępcze cieplne parametry skupione. Pole temperaturowe jest w pierwszym przypadku opisane układem cząstkowych równań różniczkowych przewodnictwa ciepła o zmiennych współczynnikach, gdzie funkcja wymuszająca przedstawia straty zależne od miejsca, czasu i temperatury.

Obowiązują wtedy układy równań typu:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 v^s}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 v^s}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 v^s}{\partial z^2} - c f \frac{\partial v^s}{\partial t} = -\Delta p_0 (1 + \alpha v^s) \quad (1)$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi, gdzie:

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  - przewodności cieplne właściwe w kierunku osi współrzędnych  $x, y, z$ ,

$c$  - ciepło właściwe ciała,

$f$  - ciężar właściwy ciała,

$t$  - czas,

$\Delta p_0$  - straty wydzielane w jednostce objętości przy temperaturze  $v^s = 0^\circ\text{C}$ ,

$\alpha$  - cieplny współczynnik rezystancyjny.

Nawet przy poczynieniu szeregu założeń upraszczających, ścisłe analityczne rozwiązanie układu równań (1) jest utrudnione, a w ogólnym przypadku pola trójwymiarowego niemożliwe.

Metoda druga polega na uproszczonym opisanu pola temperaturowego za pomocą układu równań różniczkowych, niejednorodnych o zmiennych współczynnikach przy uwzględnieniu strat zależnych od czasu i temperatury, jako funkcji wymuszającej.

Obowiązuje wtedy układ równań, typu:

$$\sum \Lambda(v^i - v^j) + cG \frac{dv^i}{dt} = \Delta P_0 (1 + \alpha v^i) \quad (2)$$

gdzie:

$\Delta P_0$  - straty wydzielane w rozpatrywanym elemencie maszyny przy temperaturze  $v^i = 0^\circ\text{C}$ ,

$G$  - ciężar elementu,

$v^{i*}$  - temperatura elementu, względnie czynnika chłodzącego sprzęgniętego z elementem o temperaturze  $v^i$ ,

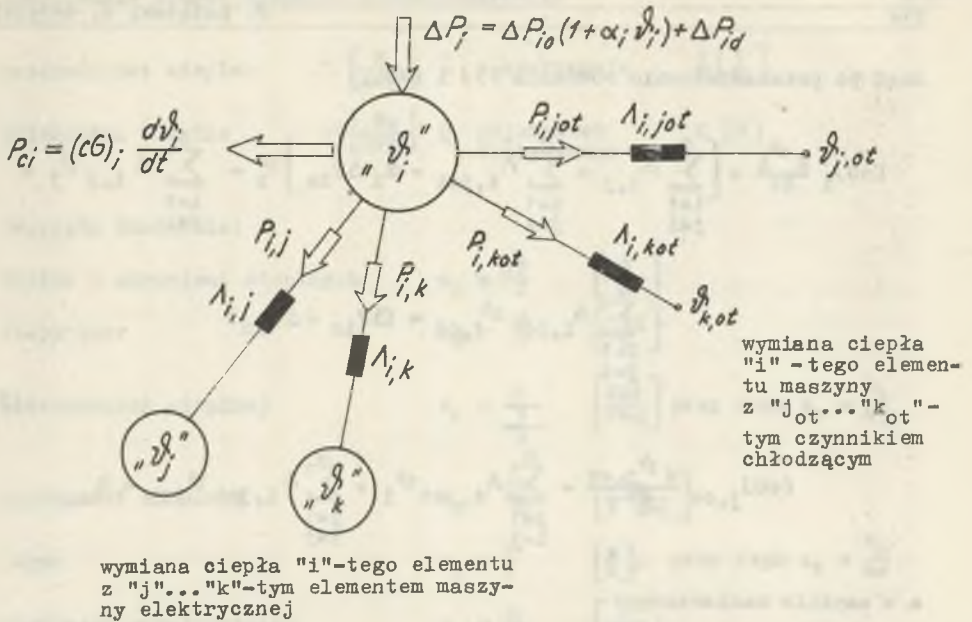
$\Lambda$  - przewodność cieplna łącząca element o temperaturze  $v^i$  z innymi elementami, względnie z czynnikiem chłodzącym.

Przy takiej metodzie analizy zakłada się, że znany jest cieplny schemat zastępczy maszyny elektrycznej, uzyskany przez wydzielenie "n" elementów cieplnych maszyny w postaci sieci, złożonej ze skupionych źródeł, przewodności i pojemności cieplnych (rys. 1). Jeżeli w "i"-tym elemencie wydzielają się straty  $\Delta P_i = \Delta P_{i0} (1 + \alpha_i v^i) + \Delta P_{id}$  i występuje akumulacja ciepła  $(cG)_i \frac{dv^i}{dt}$ , wówczas związki istniejące między "i"-tym a "j"-tym elementem maszyny połączonym przewodnością cieplną  $\Lambda_{i,j}$  oraz "i"-tym a "j<sub>ot</sub>"-tym czynnikiem chłodzącym połączonym przewodnością cieplną  $\Lambda_{i,jot}$  są określone równaniem bilansu cieplnego:

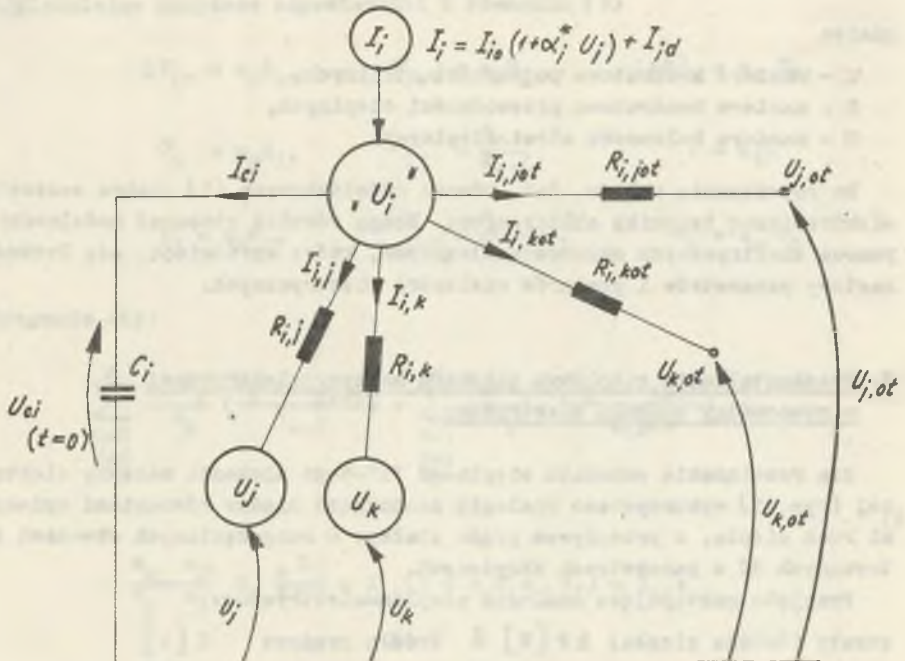
$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \Lambda_{i,j} (v^i - v^j) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=i}}^n \Lambda_{i,jot} (v^i - v^j_{ot}) + (cG)_i \frac{dv^i}{dt} = \\ = \Delta P_{i0} (1 + \alpha_i v^i) + \Delta P_{id}, \quad (3)$$

Dla "j<sub>ot</sub>" - czynnika chłodzącego ważne jest:

$$(cG)_{j,ot} \frac{dv^j_{ot}}{dt} + \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^n \Lambda_{i,jot} (v^j_{ot} - v^i) = 0 \quad (4)$$



Rys. 1. Schemat cieplny "i"-tego elementu maszyny elektrycznej w stanie cieplnie niestabilnym



Rys. 2. Schemat elektryczny "i"-tego elementu maszyny elektrycznej w stanie cieplnie niestabilnym

Stąd po przekształceniu równania (3) i (4)

$$\begin{aligned}
 (cG)_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} + \left[ \sum_{j=1}^n \Lambda_{1,j} + \sum_{j=1}^n \Lambda_{1,j,ot} - \alpha_1 \Delta P_{1o} \right] \vartheta_1 - \sum_{j=1}^n \Lambda_{1,j} \vartheta_j + \\
 - \sum_{j=1}^n \Lambda_{1,j,ot} \vartheta_{j,ot} = (\Delta P_{1o} + \Delta P_{1d})
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$(cG)_{j,ot} \frac{d\vartheta_{j,ot}}{dt} - \sum_{j=1}^n \Lambda_{1,j,ot} \vartheta_1 + \sum_{j=1}^n \Lambda_{1,j,ot} \vartheta_{j,ot} = 0$$

a w zapisie macierzowym:

$$A \frac{d\vartheta}{dt} + B \vartheta = C$$

gdzie:

- A - macierz kwadratowa pojemności cieplnych,
- B - macierz kwadratowa przewodności cieplnych,
- C - macierz kolumnowa strat cieplnych.

Do rozwiązania układu "n" równań różniczkowych (5) można zastosować elektroniczną technikę obliczeniową. Można również stosować modelowanie za pomocą elektrycznych układów analogowych, które wyróżniają się łatwością nastawy parametrów i pomiarów wielkości elektrycznych.

## 2. Przekształcanie cieplnego schematu maszyny elektrycznej w równoważny schemat elektryczny

Dla rozwiązania schematu cieplnego "i"-tego elementu maszyny elektrycznej (rys. 1) wykorzystano analogie zachodzące między równaniami opisującymi ruch ciepła, z przepływem prądu stałego w rozgałęzionych obwodach elektrycznych RC o parametrach skupionych.

Przyjęto następujące analogie cieplno-elektryczne:

straty (źródła ciepła) $\Delta P$ [W]	$\hat{=}$ źródła prądowe	I [A]
strumienie ciepła P [W]	$\hat{=}$ prądy	I [A]
temperatury $\vartheta$ [°C]	$\hat{=}$ napięcia	U [V]



przewodności cieplne	$\wedge \left[ \frac{W}{deg} \right]$	$\hat{=}$ konduktancje	$\frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\Omega} \right]$
pojemności cieplne	$cG \left[ \frac{Ws}{deg} \right]$	$\hat{=}$ pojemności elektryczne	$C [F]$

Przyjęto skale dla:

źródła i strumieni cieplnych	$a_p = \frac{\Delta P}{I} \left[ \frac{W}{A} \right]$
temperatur	$a_{\psi} = \frac{\psi}{U} \left[ \frac{deg}{V} \right]$
przewodności cieplnej	$a_{\wedge} = \frac{\wedge}{R} \left[ \frac{W\Omega}{deg} \right]$ przy czym $a_{\wedge} = \frac{a_p}{a_{\psi}}$
pojemności cieplnej	$a_c = \frac{cG}{C} \left[ \frac{Ws}{F deg} \right]$
czasu	$a_t = \frac{t}{\tau} \left[ \frac{s}{s} \right]$ , przy czym $a_t = \frac{a_c}{a_{\wedge}}$
cieplnego współczynnika rezystancyjnego	$a_{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \left[ \frac{V}{deg} \right]$

Uwzględniając powyższe odpowiedniki w równaniu (3)

$$\Delta P_{i0} = a_p I_{i0}, \quad \psi_{j0t} = a_{\psi} U_{j0t}, \quad (cG)_i = a_c C_i,$$

$$\psi_i = a_{\psi} U_i, \quad \wedge_{ij} = \frac{a_{\wedge}}{R_{ij}}, \quad t = a_t \tau$$

$$\psi_j^* = a_{\psi} U_j^*, \quad \wedge_{i,j0t} = \frac{a_{\wedge}}{R_{i,j0t}}, \quad \alpha_i = a_{\alpha} \alpha_i^*$$

otrzykuje się:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{\wedge} a_{\psi}}{a_p} \left( \frac{U_i - U_{j,0t}}{R_{i,j}} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{a_{\wedge} a_{\psi}}{a_p} \left( \frac{U_i - U_{j,0t}}{R_{i,j0t}} \right) +$$

$$+ \frac{a_c a_{\psi}}{a_p a_t} C_i \frac{d U_i}{d \tau} = I_{i0} (1 + a_{\alpha} \alpha_i^* a_{\psi} U_i) + I_{id}^*$$

(6)

Uwzględniając wskaźniki podobieństwa:

$$\frac{a_c a_{\gamma}}{a_p a_t} = 1, \quad \frac{a_{\wedge} a_{\gamma}}{a_p} = 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{a_{\wedge} a_t}{a_c} = 1 \quad (7)$$

oraz

$$a_{\alpha} a_{\gamma} = 1$$

zjawiska zachodzące w "i"-tym elemencie cieplnym opisane przez przekształcone równanie (3), sprowadza się do równania wiążącego wielkości elektryczne w "i"-tym elemencie:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{U_i - U_j}{R_{i,j}} \right) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{U_i - U_{jot}}{R_{i,jot}} \right) + C_i \frac{dU_i}{dt} = I_{io}(1 + \alpha_i^* U_i) + I_{id} \quad (8)$$

Stąd schemat zastępczy "i"-tego elementu maszyny elektrycznej pokazany na rys. 1 ma odpowiednik w schemacie elektrycznym przedstawionym na rys. 2.

Układem modelującym przebieg temperatury w funkcji czasu jest układ sieci RC ze źródłem prądowym I.

Temperaturę czynnika chłodzącego modeluje się za pomocą źródeł napięciowych U.

Rozwiązaniem równania jest przebieg napięcia  $U = f(\tau)$  na zaciskach kondensatora. W chwili początkowej kondensator może być naładowany do napięcia odpowiadającego warunkom początkowym procesu.

### 3. Opis budowy analogu rezystancyjno-pojemnościowego RC

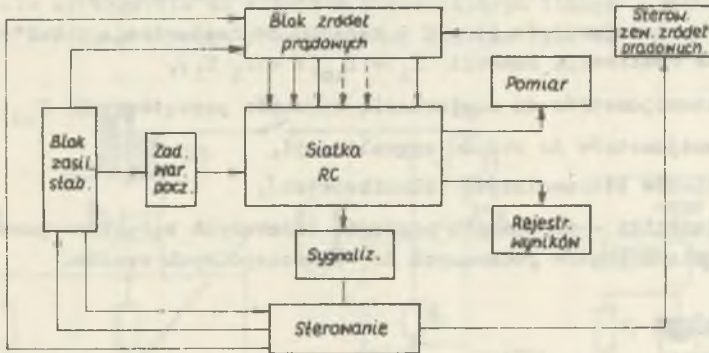
Analog rezystancyjno-pojemnościowy składa się z następujących elementów:

- 1) płyty czołowej z polem komutacyjnym,
- 2) stabilizowanego bloku zasilania,
- 3) bloku źródeł prądowych,
- 4) oporów nastawianych do modelowania przewodności cieplnych,
- 5) pojemności nastawianych do modelowania pojemności cieplnych.

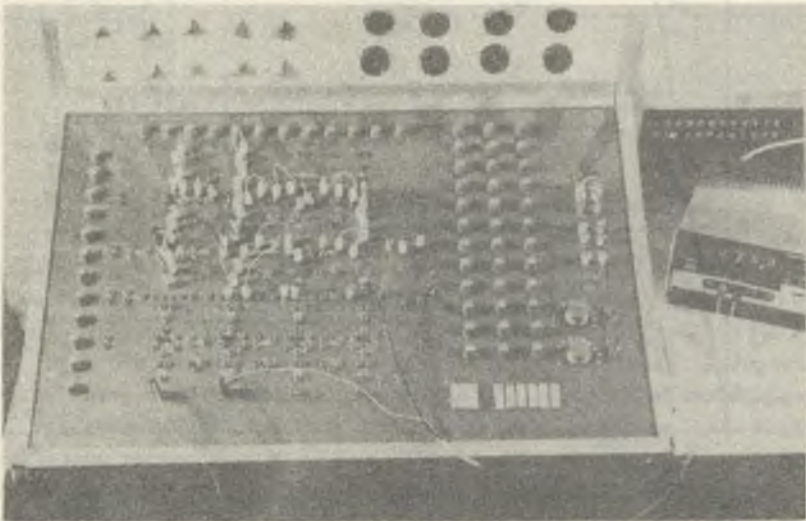
Schemat blokowy urządzenia przedstawiony jest na rys. 3a.

#### 3.1. Budowa i działanie poszczególnych zespołów analogu RC

Tablica komutacyjna wykonana z gniazd wtykowych posiada 12 węzłów, do których doprowadzone są wyjścia źródeł prądowych. Pomędzy sąsiednimi węzłami znajdują się wyprowadzenia oporów i kondensatorów, tworząc siatkę RC przedstawioną na rys. 3b.



Rys. 3a. Schemat blokowy analogu rezystancyjno-pojemnościowego RC



Rys. 3b. Płyta czółowa analogu RC z widoczną tablicą komutacyjną



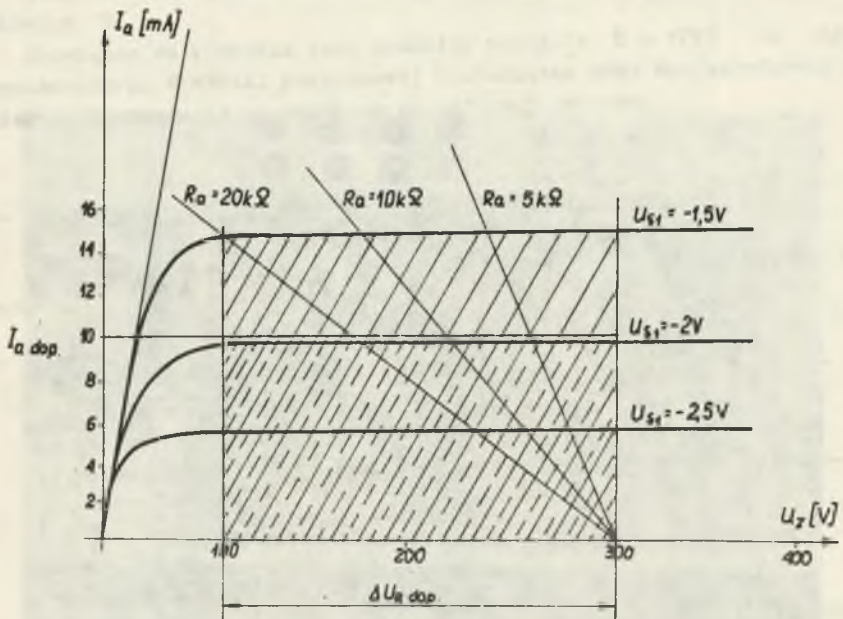
Podobnie jak w klasycznej maszynie analogowej możliwości rozwiązania bardziej złożonych problemów są ograniczone ilością bloków operacyjnych, tak w analogu RC decyduje o tym liczba elementów siatki, a więc liczba elementów oporowych i pojemnościowych. Mając do dyspozycji dużo elementów RC można uzyskać dokładniejsze rozwiązanie.

Na płycie czołowej poza polem komutacyjnym znajdują się:

- 3 rzędy potencjometrów (po 12 w każdym) do nastawienia wartości prądów oraz realizacji funkcji  $I_1 = I_{10}(1 + \alpha_1^* U_1)$ ,
- rzęd potencjometrów do nastawiania warunków początkowych  $U_{ci}(0)$ ,
- 12 potencjometrów do układu sygnalizacji,
- 7 przycisków sterowniczych (klawiszowych),
- 2 przełączniki - do pomiaru napięcia zadawanych warunków początkowych oraz pomiaru prądów podawanych do poszczególnych węzłów.

### Źródła prądowe

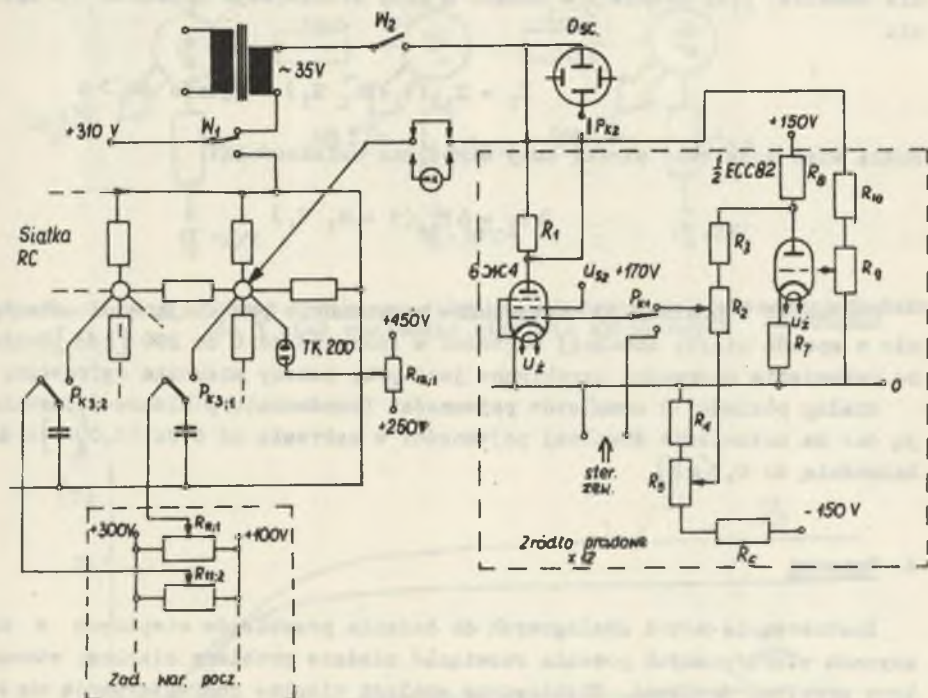
Zaprojektowane urządzenie analogowe posiada 12 źródeł prądowych. Są to układy elektroniczne pozwalające na uzyskanie dowolnej (stałej) wartości prądu w zakresie od 0 do 10 [mA] i utrzymania  $I = \text{const.}$  przy napięciach modelujących temperatury zmieniające się w zakresie od 0 do 200 [V]. Podstawowymi elementami źródeł są pentody (typu 6Ж4). Nastawa prądu odbywa



Rys. 4. Charakterystyki napięciowo-prądowe pentody 6Ж4



się poprzez zmianę napięcia siatki sterującej ( $S_1$ ). Charakterystyki  $I_a = f(U_z)$  przedstawione są na rys. 4. Dokładne pomiary wykazują, że same pentody nie zapewniają stałości prądu, jego wahania przy zmianie napięcia od ok. 80 do 300 [V] wynoszą (4÷5%). Wysoką stałość prądu uzyskano stosując napięciowe dodatnie sprzężenie zwrotne. W tym celu każde źródło prądowe zostało sprzęgnięte ze stopniem wzmacniającym (lampa  $\frac{1}{2}$  ECC82). Schemat ideowy źródła prądowego przedstawiony jest na rys. 5.



Rys. 5. Schemat ideowy analogu rezystancyjno-pojemnościowego RC

Napięcie sterujące otrzymujemy z dzielnika napięcia (oporu  $R_4, R_5, R_6$ ). Potencjometr  $R_5$  daje regulację napięcia w zakresie od  $-10$  do  $-2$  [V], co pozwala na uzyskanie prądu anodowego  $I_a$  od  $\approx 0$  do  $I_{a\text{ dop}} = 10$  [mA]. Przełącznik  $P_{k1}$  w obwodzie sterowania siatki daje możliwość przejścia na sterowanie zewnętrzne. Można tu zastosować dodatkowy układ modelujący  $I_a = I(t)$ . Włączenie wszystkich źródeł jednocześnie następuje po włączeniu  $W_1$  podającego napięcie  $+310$  [V] na siatkę RC. W układzie zastosowano szybkie przekaźniki kontaktronowe ( $P_{k\dots}$ ). Szybkość przekaźnika ma istotne znaczenie przy starcie procesu z warunkami początkowymi. Przy starcie następuje ładowanie kondensatorów do żądanych napięć, a następnie szybkie włączenie ich do siatki z jednoczesnym włączeniem napięcia anodowego.

Obwód sterowania lampy 6Ж4 współpracuje ze stopniem wzmacniającym realizującym sprzężenie zwrotne napięciowe (uzależnia prąd źródła od napięcia występującego w węźle). A więc realizowana jest funkcja typu:

$$I_1 = I_{10}(1 + \alpha_1^* U_1)$$

Przeprowadzając regulację potencjometrami  $R_2$  i  $R_3$  można uzyskać sprzężenie zwrotne, przy którym  $I = \text{const.}$  a przy silniejszym dodatnim sprzężeniu

$$I_1 = I_{10}(1 + \alpha_1^* U_1) \quad \text{gdzie } \alpha_1^* > 0$$

Można więc modelować straty mocy określone zależnością:

$$\Delta P_1 = \Delta P_{10}(1 + \alpha_1 \psi_1)$$

Siatka RC - posiada 33 nastawialne rezystancje pozwalające na ustawienie w sposób ciągły dowolnej wartości w zakresie od 0 do 200 [kΩ] Dokładne ustawienie oporności uzyskiwane jest przy pomocy miernika cyfrowego.

Analog posiada 12 kompletów pojemności (kondensatory blokowe), pozwalają one na ustawienie dowolnej pojemności w zakresie od 0 do 10,0 [μF] z dokładnością do 0,1 [μF].

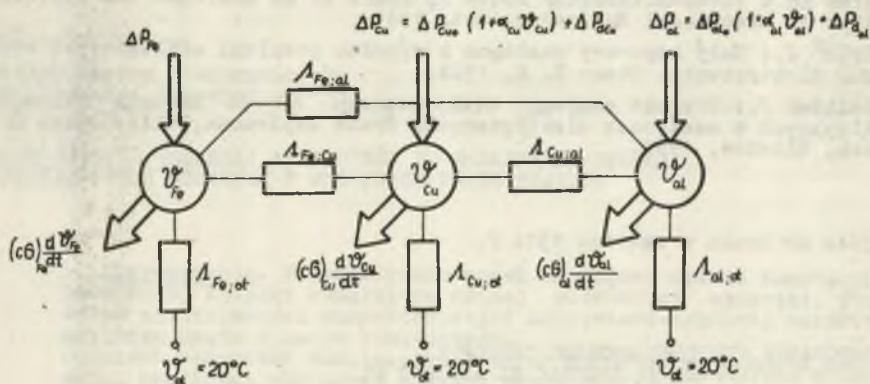
#### 4. Wnioski

Zastosowanie metod analogowych do badania przebiegów cieplnych w maszynach elektrycznych pozwala rozwiązać złożone problemy cieplne stosunkowo prostymi środkami. Elektryczne analogi cieplne charakteryzują się łatwością nastawy parametrów schematu, szybkim przygotowaniem do pracy, prostotą obsługi, dużą pewnością i stosunkowo niską ceną.

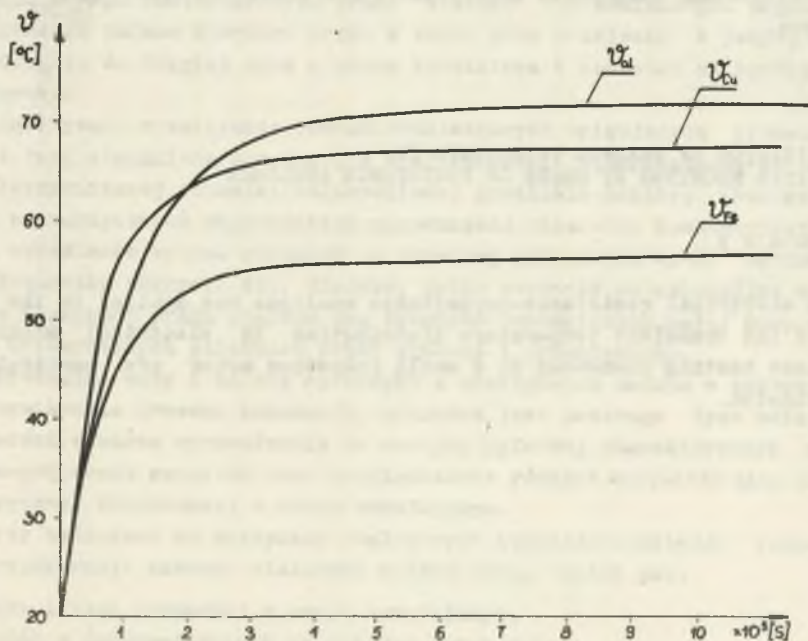
Analog elektryczny RC można wykorzystać nie tylko do eksperymentalnego wyznaczania przebiegów temperatury, gdy znane są parametry cieplne układu. Umożliwia on również ocenę wpływu zmian tych parametrów na wypadkowy przebieg temperatury zarówno w stanie cieplnie nieustalonym, jak i ustalonym. Może być cennym narzędziem dla konstruktora przy optymalizacji parametrów cieplnych maszyny elektrycznej.

#### 5. Przykład obliczeniowy

Na elektrycznym analogu RC zmodelowano przebieg nagrzewania silnika indukcyjnego, klatkowego reprezentowanego przez układ trzech ciał cieplnie sprzężonych (rys. 6). Uzyskane na analogu RC przebiegi  $\psi_{Fe} = f(t)$ ,  $\psi_{Cu} = f(t)$ ,  $\psi_{Al} = f(t)$  przedstawione są na rys. 7.



Rys. 6. Ciepły schemat zastępczy silnika indukcyjnego sprowadzony do układu 3 ciał wzajemnie cieplnie sprzężonych



Rys. 7. Przebieg nagrzewania silnika indukcyjnego  $\psi_{P0} = f(t)$ ,  $\psi_{Cu} = f(t)$ ,  $\psi_{Al} = f(t)$  uzyskany na analogu RC



## LITERATURA

- [1] Weedy B.M.: The determination of the transient temperature distribution in a turbo-alternator rotor by means of an analogue. The Institution of Electrical Engineers. Oct. 1961.
- [2] Rybář J.: Malý odporový analogon k výpočtu oteplení elektrických stroju. Elektrotechn. Obzor č. 8, 1962.
- [3] Książek J.: Projekt analogu elektrycznego RC do badania procesów cieplnych w maszynach elektrycznych. Praca dyplomowa, Politechnika Śląska, Gliwice, 1969.

Przyjęto do druku w czerwcu 1974 r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕПЛОВЫХ  
РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ НА АНАЛОГЕ RC

Р е з ю м е

Представлена возможность использования электроаналога RC для исследования неустановившихся тепловых процессов в электрических машинах. Описан процесс исследования нагревания асинхронного двигателя по схеме трех тепловых элементов.

INVESTIGATION OF THERMAL TRANSIENTS IN  
ELECTRICAL MACHINES BY MEANS OF RESISTANCE ANALOGUE

S u m m a r y

The electrical resistance-capacitance analogue was applied to the problem of the transient temperature distribution in electrical machines. Transient heating phenomena in a small induction motor are particularly investigated.