ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Elektryka z. 47 Nr kol. 428

Aleksander Żywiec
Władysław Mizia

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

UOGÓLNIONE CHARAKTERYSTYKI MASZYNY INDUKCYJNEJ PIERŚCIENIOWEJ

Streszczenie. Przedstawiono analizę własności statycznych maszyny indukcyjnej pierścieniowej pracującej z impedancjami dodatkowymi w obwodzie stojana i w obwodzie wirnika przy uwzględnieniu dodatkowego zasilania obwodu wirnika ze źródła o częstotliwości zmieniającej się w takt zmian poślizgu. Wyprowadzono równanie charakterystyki mechanicznej maszyny indukcyjnej, które przedstawiono w postaci uogólnionego wzoru Klossa oraz podano zależności umożliwiające konstrukcję wykresu kołowego maszyny indukcyjnej dla tego typu zasilania.

1. Wstęp

Maszyny indukcyjne trójfazowe mają prostą konstrukcję i w związku z tym charakteryzują się dużą pewnością ruchową, łatwością obsługi oraz niskim kosztem. Z tych powodów są one chętnie stosowane w przemysłowych układach napędowych, pracujących zarówno przy nienastawianej jak i przy nastawianej prędkości obrotowej.

Nastawę prędkości obrotowej maszyn indukcyjnych otrzymuje się przez zmianę:

- wartości napięcia i częstotliwości źródła zasilającego uzwojenie stojana,
- impedancji dodatkowej włączonej w obwód uzwojenia stojana.

W maszynach indukcyjnych pierścieniowych dodatkowo można nastawiać prędkość obrotową przez zmianę:

- impednacji dodatkowej włączonej w obwód uzwojenia wirnika,
- wartości napięcia i kąta fazowego źródła trójfazowego (o zmniennej częstotliwości zależnej od poślizgu i częstotliwości sieci zasilającej uzwojenie stojana) przyłączonego do obwodu uzwojenia wirnika.

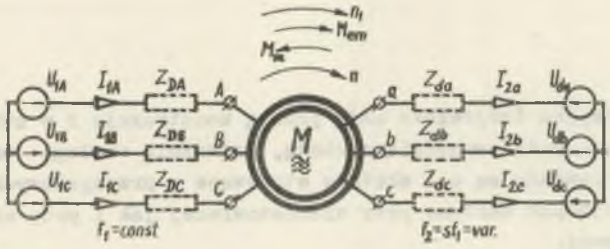
Możliwa jest również nastawa prędkości obrotowej maszyny indukcyjnej przez równoczesną zmianę wymienionych parametrów. Z tego wynika, że maszyna indukcyjna może w ogólności pracować z impedancjami dodatkowymi włączonymi w obwód uzwojenia stojana i wirnika przy przyłączeniu obydwu uzwojeń do niezależnych źródeł napięcia trójfazowego. W dalszej części pracy maszyny indukcyjnej, której uzwojenie stojana jest zasilane dowolną stałą

częstotliwością, a uzwojenie wirnika częstotliwością zmienną zależną od poślizgu, nazywa się maszyną dwustronnie zasilaną.

W niniejszej pracy przedstawia się analizę własności statycznych maszyny indukcyjnej zasilanej dwustronnie. Wyniki analizy mogą być przydatne między innymi przy projektowaniu elektromaszynowych bądź przekształtnikowych kaskad asynchronicznych z silnikiem indukcyjnym.

2. Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej

Na rys. 1 przedstawiono rozpatrywany schemat zasilania trójfazowej maszyny indukcyjnej pierścieniowej. Uzwojenie stojana maszyny jest przyłączone do sieci trójfazowej o stałej częstotliwości (f_1 = const) zaś uzwojenia wirnika do sieci trójfazowej o częstotliwości zmieniającej się (f_2 = var) odpowiednio do zmian prędkości obrotowej wirnika maszyny. Linią przerywaną zaznaczono impedancje dodatkowe, które mogą być włączone w obwód uzwojenia stojana ($Z_{DA,B,C}$) oraz w obwód uzwojenia wirnika ($Z_{da,b,c}$)



Rys. 1. Schemat ideowy trójfazowej maszyny indukcyjnej pierścieniowej dwustronnie zasilanej z impedancjami dodatkowymi w obwodzie stojana i wirnika

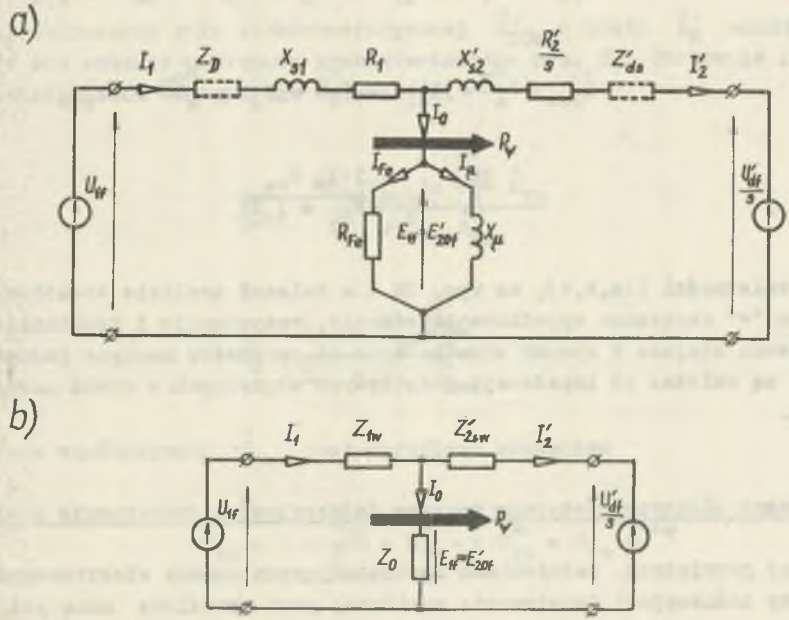
maszyny indukcyjnej. Na rys. 1 zaznaczono przyjęte do obliczeń strzałki napięć ($U_{1A,B,C}$) sieci zasilającej stojan, prądów ($I_{1A,B,C}$) uzwojenia stojana, napięć ($U_{da,b,c}$) sieci zasilającej wirnik prądów ($I_{2a,b,c}$) uzwojenia wirnika, prędkości synchronicznej (n_1) pola magnetycznego, prędkości obrotowej (n) wirnika, momentu elektromagnetycznego (M_{em}) i momentu mechanicznego (M_m) działającego na wirnik maszyny.

Analiza własności maszyny indukcyjnej pracującej w układzie zasilania z rys. 1 zostanie przeprowadzona przy założeniu:

- nienasyconego obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej,
- symetrii elektrycznej i magnetycznej maszyny indukcyjnej,
- pomijalności strat mocy czynnej w rdzeniu wirnika maszyny indukcyjnej,
- pomijalności wpływu zmian częstotliwości na wartość rezystancji uzwojeń maszyny indukcyjnej,

- pomijalności wyższych harmonicznych rozkładu pola magnetycznego wzdłuż rozwiniętego obwodu magnetycznego maszyny,
- symetrii i sinusoidalnego przebiegu napięć sieci trójfazowych przyłączonych do stojana i wirnika maszyny indukcyjnej,
- zmienności częstotliwości sieci zasilającej obwód wirnika w takt zmian poślizgu s maszyny zgodnie z zależnością $f_2 = sf_1$,
- równości impedancji dodatkowych włączonych w obwód uzwojenia stojana,
- równości impedancji dodatkowych włączonych w obwód uzwojenia wirnika.

Przy przyjętych założeniach układowi z rys. 1 odpowiada schemat zastępczy jednej fazy przedstawiony na rys. 2a, w którym zastąpiono obwód rzeczywisty wirnika maszyny obwodem zastępczym o parametrach wynikających z zasad sprowadzenia parametrów wirnika na stronę obwodu stojana. Na rys. 2a



Rys. 2. Schematy zastępcze jednej fazy maszyny indukcyjnej pierścieniowej dwustronnie zasilanej z impedancjami dodatkowymi w obwodzie stojana i wirnika

przyjęto ogólnie stosowane oznaczenie parametrów schematu zastępczego maszyny indukcyjnej (X_{s1}, R_1, X'_{s2}, R'_2, X_μ, R_{Fe}) określanych dla częstotliwości (f_1) sieci zasilającej stojan maszyny. Ponadto w schemacie z rysunku 2a:

U_{1f}, I_1 - napięcie fazowe sieci i prąd fazowy obwodu stojana,

U'_{df}, I'_2 - napięcie fazowe sieci i prąd fazowy obwodu wirnika sprowadzone na stronę uzwojenia stojana,

$s = \frac{n_1 - n}{n_1}$ - poślizg wirnika,

Z_D, Z'_{ds} - impedancja dodatkowa w obwodzie stojana i zastępcza impedancja dodatkowa w obwodzie wirnika przy poślizgu s sprowadzona na stronę uzwojenia stojana.

Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej przedstawiony na rys. 2b wynika bezpośrednio z rys. 2a. Przy założeniu rezystancyjno-reaktancyjnego charakteru impedancji dodatkowych parametry schematu z rys. 2b oblicza się z zależności:

$$\hat{Z}_{1w} = (R_1 + jX_{s1}) + (R_D + jX_D) = R_{1w} + jX_{s1w} \tag{1a}$$

$$\hat{Z}'_{2sw} = (\frac{R'_2}{s} + jX'_{s2}) + (\frac{R'_d}{s} + jX'_d) = \frac{R'_{2w}}{s} + jX'_{s2w} \tag{1b}$$

$$\hat{Z}_0 = \frac{j\,X_\mu\,R_{Fe}}{R_{Fe} + j\,X_\mu} \tag{1c}$$

W zależności (1a,b,c), na rys. 2b i w dalszej analizie dodatkowym indeksem "w" oznaczono wypadkowe impedancje, rezystancje i reaktancje wzdłużne obwodu stojana i obwodu wirnika oraz te parametry maszyny indukcyjnej, które są zależne od impedancji dodatkowych włączonych w obwód uzwojeń maszyny.

3. Moment elektromagnetyczny maszyny indukcyjnej i dwustronnie zasilanej

Przy przyjętych założeniach upraszczających moment elektromagnetyczny maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej jest określony mocą pola wirującego P_ψ i kątową prędkością synchroniczną ($\omega_{1m} = 2\pi n_1 = 2\pi \frac{f_1}{p_b}$) podstawowej harmonicznej rozkładu przestrzennego pola magnetycznego:

$$M_{em} = \frac{P_\psi}{\omega_{1m}} = \frac{p_b\,P_\psi}{2\pi f_1} \tag{2}$$

Moc pola wirującego jest równa mocy czynnej przekazywanej z obwodu stojana do obwodu wirnika maszyny za pośrednictwem pola magnetycznego (rys.2)

$$P_\psi = m\,E'_{20f}\,I'_2\cos\psi_2 = m\,\mathrm{Re}\left\{\hat{E}'_{20f}\,\check{I}'_2\right\} \tag{3}$$

W zależnościach (2) i (3) przyjęto następujące oznaczenia:

p_b - liczba par biegunów maszyny indukcyjnej,

m - liczba faz maszyny indukcyjnej,

ψ_2 - kąt fazowy opóźnienia prądu wirnika względem siły elektromotorycznej, indukowanej w uzwojeniu wirnika przez strumień główny maszyny,

$\hat{E}'_{20f}$ - wartość zespolona siły elektromotorycznej indukowanej w zastępczym uzwojeniu wirnika przez strumień główny przy nieruchomym wirniku,

$\check{I}'_2$ - wartość sprzężona prądu płynącego w zastępczym obwodzie wirnika przy rozpatrywanej prędkości obrotowej maszyny.

Przy obliczaniu siły elektromotorycznej $\hat{E}'_{20f}$ i prądu $\hat{I}'_2$ wirnika wyzyskuje się schemat zastępczy przedstawiony na rys. 2b. Otrzymuje się po przekształceniach następujące zależności:

$$\hat{E}'_{20f} = \frac{\hat{U}'_{1f}\hat{Z}'_{2sw} + \frac{\hat{U}'_{df}}{s}\hat{Z}_{1w}}{\hat{Z}_{1w} + \hat{C}_{1w}\hat{Z}'_{2sw}} \tag{4a}$$

$$\hat{I}'_2 = \frac{\hat{U}_{1f} - \hat{C}_{1w}\frac{\hat{U}'_{df}}{s}}{\hat{Z}_{1w} + \hat{C}_{1w}\hat{Z}'_{2sw}} \tag{4b}$$

w których współczynnik $\hat{C}_{iw}$ jest określony równaniem

$$\hat{C}_{1w} = 1 + \frac{\hat{Z}_{1w}}{\hat{Z}_0} = C^*_{1w} - j\,C^{**}_{1w} = C_{1w}\,e^{j\varrho_w} \tag{5a}$$

Wprowadzając do równania (5a) zależności (1a,c) otrzymuje się

$$C^*_{1w} = 1 + \frac{X_{s1w}}{X_\mu} + \frac{R_{1w}}{R_{Fe}} = C_{1w}\cos\varrho_w \tag{5b}$$

$$C^{**}_{1w} = \frac{R_{1w}}{X_\mu} - \frac{X_{s1w}}{R_{Fe}} = C_{1w}\sin\varrho_w \tag{5c}$$

$$C_{1w} = \sqrt{C_{1w}^{*2} + C_{1w}^{**2}} \tag{5d}$$

$$\varrho_w = \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{C_{1w}^{**}}{C_{1w}^{*}}\right\} \tag{5e}$$

Na podstawie zależności (4b) wyznacza się wartość sprzężoną prądu zastępczego obwodu wirnika

$$\check{I}_2' = \frac{\check{U}_{1f} - \check{C}_{1w}\dfrac{\check{U}_{df}'}{s}}{\check{Z}_{1w} + \check{C}_{1w}\check{Z}_{2sw}'} \tag{6}$$

Uwzględniając zależności (4a) i (6) otrzymuje się po przekształceniach

$$\hat{E}_{20f}'\check{I}_2' = \frac{\hat{U}_{1f}\check{U}_{1f}\hat{Z}_{2sw}' - \hat{U}_{1f}\dfrac{\check{U}_{df}'}{s}\check{C}_{1w}\hat{Z}_{2sw}' + \check{U}_{1f}\dfrac{\hat{U}_{df}'}{s}\hat{Z}_{1w} - \dfrac{\hat{U}_{df}'}{s}\dfrac{\check{U}_{df}'}{s}\check{C}_{1w}\hat{Z}_{1w}}{\hat{Z}_{1w}\check{Z}_{1w} + \hat{C}_{1w}\check{Z}_{1w}\hat{Z}_{2sw}' + \check{C}_{1w}\hat{Z}_{1w}\check{Z}_{2sw}' + \hat{C}_{1w}\check{C}_{1w}\hat{Z}_{2sw}'\check{Z}_{2sw}'} \tag{7}$$

Aby z równania (3) wyznaczyć moc pola wirującego przyjmuje się, że napięcia źródeł przyłączonych do uzwojeń maszyny indukcyjnej wynoszą:

- napięcie zasilania fazy obwodu stojana

$$\hat{U}_{1f} = U_{1f}\, e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{8a}$$

- napięcie zasilania fazy zastępczego obwodu wirnika

$$\hat{U}_{df}' = U_{df}'\, e^{j(\frac{\pi}{2} - \alpha_d)} = k_d U_{1f}\, e^{j(\frac{\pi}{2} - \alpha_d)} \tag{8b}$$

przy czym:

k_d - stosunek napięcia sieci zasilającej obwód wirnika sprowadzonego na stronę uzwojenia stojana do napięcia sieci zasilającej obwód stojana

$$k_d = \frac{U_{df}'}{U_{1f}} = \nu_{uM}\frac{U_{df}}{U_{1f}} \tag{8c}$$

α_d - kąt fazowy opóźnienia napięcia sieci zasilającej obwód nika względem napięcia sieci zasilającej obwód stojana maszyny indukcyjnej,

ϑ_{uM} - przekładnia napięciowa maszyny indukcyjnej.

Równanie momentu elektromagnetycznego maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej wynika z zależności (2) po wprowadzeniu wyrażeń (3),(7),(8a,b), (1a,b,c)

$$M_{em} = \frac{mp_b}{2\pi f_1} U_{1f}^2 \frac{sZ_{d1} - Z_{d2}}{\left[(R_{1w}+C_{1w}^{**}X'_{s2w})^2+(X_{s1w}+C_{1w}^{*}X'_{s2w})^2\right]s^2+\left[2R'_{2w}(C_{1w}^{*}R_{1w}-C_{1w}^{**}X_{s1w})\right]s+C_{1w}^2R'^2_{2w}} \tag{9a}$$

przy czym:

$$Z_{d1} = R'_{2w} + k_d\left[(R_{1w} + C_{1w}^{**}X'_{s2w})\cos\alpha_d + (X_{s1w} + C_{1w}^{*}X'_{s2w})\sin\alpha_d\right] \tag{9b}$$

$$Z_{d2} = k_d^2(C_{1w}^{*}R_{1w} - C_{1w}^{**}X_{s1w}) + k_d R'_{2w}(C_{1w}^{*}\cos\alpha_d - C_{1w}^{**}\sin\alpha_d) \tag{9c}$$

Uwzględniając w równaniach (9a,b,c) wielkości figurujące we wzorze Klossa opisującym charakterystykę mechaniczną maszyny indukcyjnej zasilanej tylko od strony stojana otrzymuje się dla maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej

$$M_{em} = \frac{(M_{kw}(2+\varepsilon_w)}{\frac{s}{s_{kw}} + \frac{s_{kw}}{s} + \varepsilon_w}\left\{\left[1 + \frac{C_{1w}}{s_{kw}}k_d\cos(\alpha_d - \beta_{wo})\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{C_{1w}}{s_{kw}}k_d\left[\frac{C_{1w}\varepsilon_w}{2}k_d + s_{kw}\cos(\alpha_d - \varrho_w)\right]\frac{1}{s}\right\} \tag{10a}$$

W zależności (10a) wielkości charakteryzujące własności maszyny indukcyjnej zasilanej jedynie od strony stojana i pracującej z impedancjami dodatkowymi w obwodzie stojana i w obwodzie wirnika są określone następującymi wyrażeniami [3]:

- moment krytyczny

$$M_{kw} = \frac{m\,p_b}{2\pi f_1} U_{1f}^2 \frac{1}{2\left[(C_{1w}^{*}R_{1w}-C_{1w}^{**}X_{s1w})+C_{1w}\sqrt{(R_{1w}+C_{1w}^{**}X'_{s2w})^2+(X_{s1w}+C_{1w}^{*}X'_{s2w})^2}\right]} \tag{10b}$$

- poślizg krytyczny

$$s_{kw} = \frac{C_{1w} R'_{2w}}{\sqrt{(R_{1w} + C^{**}_{1w} X_{s2w})^2 + (X_{s1w} + C^{*}_{1w} X'_{s2w})^2}} \tag{10c}$$

- współczynnik ε_w

$$\varepsilon_w = \frac{2(C^{*}_{1w} R_{1w} - C^{**}_{1w} X_{s1w})}{C_{1w}\sqrt{(R_{1w} + C^{**}_{1w} X'_{s2w})^2 + (X_{s1w} + C^{*}_{1w} X'_{s2w})^2}} = 2\,\frac{C^{*}_{1w} R_{1w} \quad C^{**}_{1w} X_{s1w}}{C^{2}_{1w} \quad R'_{2w}} \tag{10d}$$

- kąt fazowy $\beta_{w\infty}$

$$\beta_{w\infty} = \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{X_{s1w} + C^{*}_{1w} X'_{s2w}}{R_{1w} + C^{**}_{1w} X'_{s2w}}\right\} \tag{10e}$$

Z równań (10a,...,e) wynika, że moment elektromagnetyczny maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej zależy od warunków zasilania uzwojenia stojana i wirnika, od parametrów schematu zastępczego maszyny, od impednacji włączonych w obwód stojana i wirnika oraz od poślizgu. Zależność momentu elektromagnetycznego M_{em} od poślizgu s przy niezmiennych warunkach jest nazywana charakterystyką mechaniczną maszyny indukcyjnej. Charakterystyka maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej przecina się z osią poślizgu przy tzw. poślizgu idealnego biegu jałowego (s_{0d}). Poślizg idealnego biegu jałowego wyznacza się z warunku

$$\left\{M_{em}\right\}_{s=s_{0d}} = 0$$

z którego po uwzględnieniu równania (10a) otrzymuje się:

$$s_{0d} = \frac{C_{1w}\, k_d \left[C_{1w} k_d \varepsilon_w + 2\, s_{kw} \cos(\alpha_d + \varrho_w)\right]}{2\left[s_{kw} + C_{1w}\, k_d \cos(\alpha_d - \beta_{w\infty})\right]} \tag{11}$$

Poślizgi krytyczne s_{kd}, przy których występują ekstremalne wartości momentu elektromagnetycznego maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej, wynikają z warunku

$$\left\{\frac{d\,M_{em}}{ds}\right\}_{s=s_{kd}} = 0$$

z którego po uwzględnieniu zależności (10a) wyznacza się dwie wartości:

$$s_{kd1} = s_{0d} + \sqrt{s_{kw}^2 + s_{0d}^2 + s_{kw}\,s_{0d}\,\varepsilon_w} \tag{12a}$$

$$s_{kd2} = s_{0d} - \sqrt{s_{kw}^2 + s_{0d}^2 + s_{kw}\,s_{0d}\,\varepsilon_w} \tag{12b}$$

Tym dwom wartościom poślizgu krytycznego odpowiadają dwie wartości ekstremalne momentu maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej obliczone z zależności (10a):

- przy pracy silnikowej dla $s = s_{kd1}$

$$M_{kd1} = \left\{M_{em}\right\}_{s=s_{kd1}} = M_{kw}\,\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_w}{2}\right)\left[1+\frac{C_{1w}}{s_{kw}}\,k_d\,\cos(\alpha_d-\beta_{2\infty})\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{s_{0d}}{s_{kw}}\right)^2+\varepsilon_w\left(\frac{s_{0d}}{s_{kw}}\right)}+\left(\frac{s_{0d}}{s_{kw}}+\frac{\varepsilon_w}{2}\right)} \tag{13a}$$

- przy pracy prądnicowej dla $s = s_{kd2}$

$$M_{kd2} = \left\{M_{em}\right\}_{s=s_{kd2}} = -M_{kw}\,\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_w}{2}\right)\left[1+\frac{C_{1w}}{s_{kw}}\,k_d\,\cos(\alpha_d-\beta_{w\infty})\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{s_{0d}}{s_{kw}}\right)^2+\varepsilon_w\left(\frac{s_{0d}}{s_{kw}}\right)}-\left(\frac{s_{0d}}{s_{kw}}+\frac{\varepsilon_w}{2}\right)} \tag{13b}$$

Wprowadzając do zależności (10a) wyrażenia (11), (12a), (13a), otrzymuje się równanie charakterystyki mechanicznej maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej w postaci uogólnionego wzoru Klossa

$$M_{em} = \frac{M_{md}(2+\varepsilon_d)}{\frac{s_d}{s_{md}}+\frac{s_{md}}{s_d}+\varepsilon_d} \tag{14a}$$

w którym:

- poślizg uogólniony:

$$s_d = s - s_{0d} \tag{14b}$$

- poślizg krytyczny uogólniony:

$$s_{md} = s_{kd1} - s_{0d} \tag{14c}$$

- moment krytyczny uogólniony:

$$M_{md} = M_{kd1} \tag{14d}$$

- współczynnik korekcyjny uogólniony:

$$\varepsilon_d = \frac{2\, s_{0d} + \varepsilon_w}{s_{kd1} - s_{0d}} \tag{14e}$$

Na podstawie równań (10a) lub (14a) można wyznaczyć przebieg charakterystyk mechanicznych maszyny indukcyjnej pracującej przy dowolnych warunkach zasilania obwodu stojana i wirnika dla przypadku, gdy częstotliwość źródła zasilającego obwód wirnika maszyny zmienia się w takt zmian poślizgu s maszyny zgodnie z zależnością $f_2 = sf_1$.

4. Wykresy kołowe prądów maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej

Wykres kołowy jest to miejsce geometryczne wartości zespolonej prądu maszyny indukcyjnej przy zmianach poślizgu dla pracy maszyny przy niezmiennych warunkach zasilania obwodu stojana i wirnika i przy niezmiennych impedancjach dodatkowych włączonych w obwód uzwojeń. Wykres kołowy wyznacza się z równań wynikających ze schematu zastępczego maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej przedstawionego na rys. 2.

Na podstawie schematu zastępczego z rys. 2b otrzymuje się zależność określającą prąd stojana maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej [3]

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10i} + \hat{I}_2'' \tag{15a}$$

w której:

- prąd idealnego biegu jałowego ($s = 0$) maszyny indukcyjnej zasilanej tylko od strony stojana

$$\hat{I}_{10i} = \frac{\hat{U}_{1f}}{\hat{Z}_{1w} + \hat{Z}_0} \tag{15b}$$

- składowa prądu stojana reprezentująca obwód wirnika maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej

$$\hat{I}_2'^{*} = \frac{\hat{I}_2'}{\hat{C}_{1w}} \tag{15c}$$

Prąd $\hat{I}_{10i}$ idealnego biegu jałowego maszyny nie zmienia się przy zmianach poślizgu. Zależność prądu $\hat{I}_2'^{*}$ od poślizgu wynika z równań (15c), (5a), (4b), (1a,b), z których otrzymuje się po przekształceniach:

$$\hat{I}_2'^{*} = \frac{e^{j(\varrho_w)}}{C_{1w}} \frac{s\hat{U}_{1f} - \hat{U}'_{df}(C^{*}_{1w} - jC^{**}_{1w})}{R'_{2w}(C^{*}_{1w} - jC^{**}_{1w}) + s\left[(R_{1w} + C^{**}_{1w} X'_{s2w}) + j(X_{s1w} + C^{*}_{1w} X'_{s2w}\right]} \tag{16}$$

Równanie powyższe przekształca się do postaci:

$$\hat{I}_2'^{*} = \frac{e^{j(\varrho_w)}}{C_{1w}} \frac{\hat{A} + s\hat{B}}{\hat{C} + s\hat{D}} = \hat{M}^{*}_{d} + \hat{K}^{*}_{d}\, e^{-j(2\beta_{ws})} \tag{17}$$

w której:

- współczynniki zespolone $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ wynikają bezpośrednio z porównania równań (16) i (17)

$$\hat{A} = -\hat{U}'_{df}(C^{*}_{1w} - jC^{**}_{1w}) \tag{18a}$$

$$\hat{B} = \hat{U}_{1f} \tag{18b}$$

$$\hat{C} = R'_{2w}(C^{*}_{1w} - j\,C^{**}_{1w}) \tag{18c}$$

$$\hat{D} = (R_{1w} + C^{**}_{1w} X'_{s2w}) + j(X_{s1w} + C^{*}_{1w} X'_{s2w}) \tag{18d}$$

- współczynniki $\hat{M}^{*}_{d}$ i $\hat{K}^{*}_{d}$ oraz argument β_{ws} oblicza się z wyrażeń

$$\hat{M}^{*}_{d} = \frac{e^{j(\varrho_w)}}{C_{1w}} \frac{\hat{B}\check{C} - \hat{A}\check{D}}{\check{C}\hat{D} - \hat{C}\check{D}} \tag{19a}$$

$$\hat{K}^{*}_{d} = \frac{e^{j(\varrho_w)}}{C_{1w}} \frac{\hat{A}\hat{D} - \hat{B}\hat{C}}{\check{C}\hat{D} - \hat{C}\check{D}} \tag{19b}$$

$$\beta_{ws} = \arg\left\{\hat{C} + s\hat{D}\right\} \tag{19c}$$

Z wyrażeń (19a,b,c) otrzymuje się po wstawieniu zależności (18a,b,c,d) oraz po uwzględnieniu (10c) i (10e)

$$\hat{M}_d^* = \frac{\hat{U}_{1f}\, e^{-j(\frac{\pi}{2} - 2\varrho_w)} + \hat{U}'_{df}\, \frac{C_{1w}}{s_{kw}}\, e^{-j(\frac{\pi}{2} + \beta_{w\infty})}}{2(C_{1w}^* X_{s1w} + C_{1w}^2 X'_{s2w} + C_{1w}^{**} R_{1w})} \tag{20a}$$

$$\hat{K}_d^* = \frac{\hat{U}_{1f}\, e^{j(\frac{\pi}{2})} + \hat{U}'_{df}\, \frac{C_{1w}}{s_{kw}}\, e^{j(\frac{\pi}{2} + \beta_{w\infty})}}{2(C_{1w}^* X_{s1w} + C_{1w}^2 X'_{s2w} + C_{1w}^{**} R_{1w})} \tag{20b}$$

$$\beta_{ws} = \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{X_{s1w} + C_{1w}^* X'_{s2w} - C_{1w}^{**} \frac{R'_{2w}}{s}}{R_{1w} + C_{1w}^{**} X'_{s2w} + C_{1w}^* \frac{R'_{2w}}{s}}\right\} \tag{20c}$$

Równania określające współczynniki $\hat{M}_d^*$ oraz $\hat{K}_d^*$ można zapisać w postaci

$$\hat{M}_d^* = \hat{M}^* + \Delta \hat{M}_d^* \tag{21a}$$

$$\hat{K}_d^* = \hat{K}^* + \Delta \hat{K}_d^* \tag{21b}$$

w których współczynniki $\hat{M}^*$ i $\hat{K}^*$ są zależne jedynie od napięcia zasilania obwodu stojana, zaś współczynniki $\Delta \hat{M}_d^*$ i $\Delta \hat{K}_d^*$ są zależne od napięcia zasilania obwodu wirnika. Wyznacza się je z porównania wyrażeń (20a,b) z wyrażeniami (21a,b) po uwzględnieniu zależności (8a,b):

$$\hat{M}^* = \frac{\hat{U}_{1f}}{2(C_{1w}^* X_{s1w} + C_{1w}^2 X'_{s2w} + C_{1w}^{**} R_{1w})}\, e^{-j(\frac{\pi}{2} - 2\varrho_w)} \tag{21c}$$

$$\Delta M_d^* = \left(\frac{C_{1w}}{s_{kw}} k_d\right) \hat{M}^*\, e^{-j(2\varrho_w + \beta_{w\infty} + \alpha_d)} \tag{21d}$$

$$\hat{K}^* = \hat{M}^* e^{j(\pi - 2\varrho_w)} \tag{21e}$$

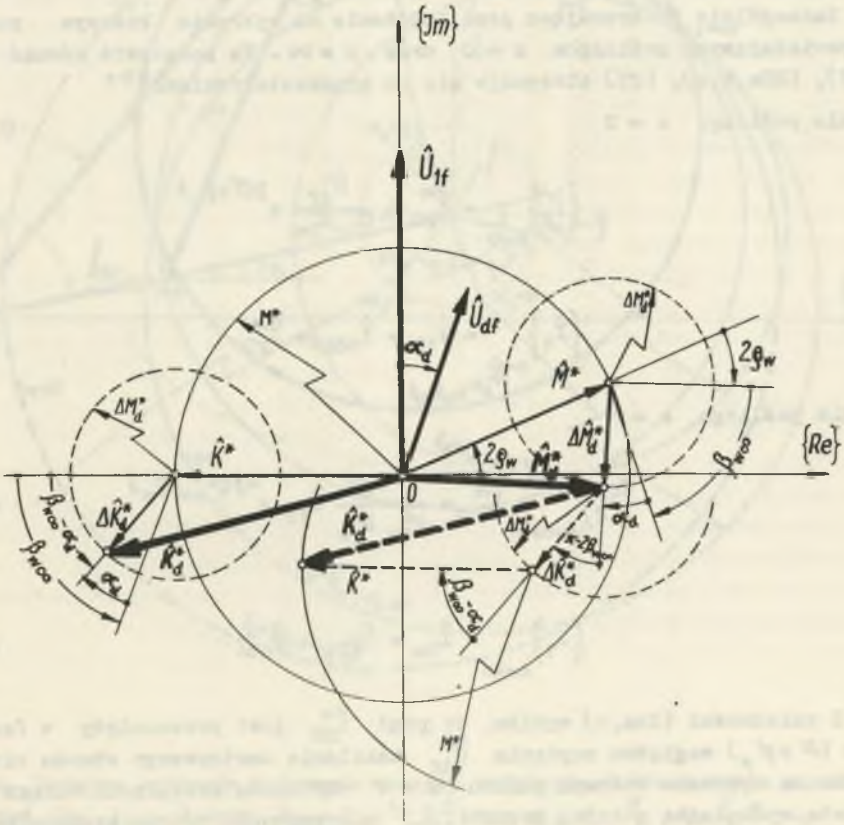
$$\Delta \hat{K}_d^* = \left(\frac{C_{1w}}{s_{kw}} k_d\right) \hat{K}^* e^{j(\beta_{w\infty} - \alpha_d)} = \Delta \hat{M}_d^* e^{-j(\pi - 2\beta_{w\infty})} \tag{21f}$$

Z przedstawionych zależności wynikają następujące równości dla modułów

$$M^* = |\hat{M}^*| = |\hat{K}^*| = \frac{U_{1f}}{2(C_{1w}^* X_{s1w} + C_{1w}^2 X'_{s2w} + C_{1w}^{**} R_{1w})} \tag{22a}$$

$$\Delta M^* = |\Delta \hat{M}_d^*| = |\Delta \hat{K}_d^*| = M^* \left(\frac{C_{1w}}{s_{kw}} k_d\right) \tag{22b}$$

Zasadę wyznaczania współczynników $\hat{M}_d^*$ oraz $\hat{K}_d^*$ na podstawie równań (21a,...f) przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Wyznaczenie współczynników $\hat{M}_d^*$ oraz $\hat{K}_d^*$ na płaszczyźnie zespolonej Gaussa

Miejsce geometryczne prądu stojana maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej otrzymuje się po wprowadzeniu do równania (15a) wyrażenia (17)

$$\hat{I}_1 = (\hat{I}_{10i} + \hat{M}_d^*) + \hat{K}_d^* e^{-j(2\beta_{ws})} \tag{23}$$

Zależność (23) jest równaniem okręgu w postaci zespolonej, przy czym:

- położenie środka okręgu jest określone przez sumę $(\hat{I}_{10i} + \hat{M}_d^*)$,
- promień okręgu jest określony współczynnikiem $\hat{K}_d^*$,
- położenie punktu na okręgu odpowiadające danemu poślizgowi s jest określone argumentem β_{ws}.

Z równania (20c) wynika, że każdej wartości poślizgu s odpowiada jedna wartość argumentu β_{ws}, a zatem jest możliwe wyznaczenie skali poślizgu na wykresie kołowym. Skalę poślizgu można również wyznaczyć z zasady inwersji prostej w okrąg.

Szczególnie interesujące jest położenie na wykresie kołowym punktów odpowiadających poślizgom $s = 0$ oraz $s = \infty$. Na podstawie równań (5e), (17), (20a,b,c), (23) otrzymuje się po przekształceniach:

- dla poślizgu $s = 0$

$$\left\{\hat{I}_2'^*\right\}_{s=0} = \hat{I}_{20}'^* = \frac{\hat{U}_{df}'}{C_{1w}R_{2w}'} e^{j(\pi+\varrho_w)} \tag{24a}$$

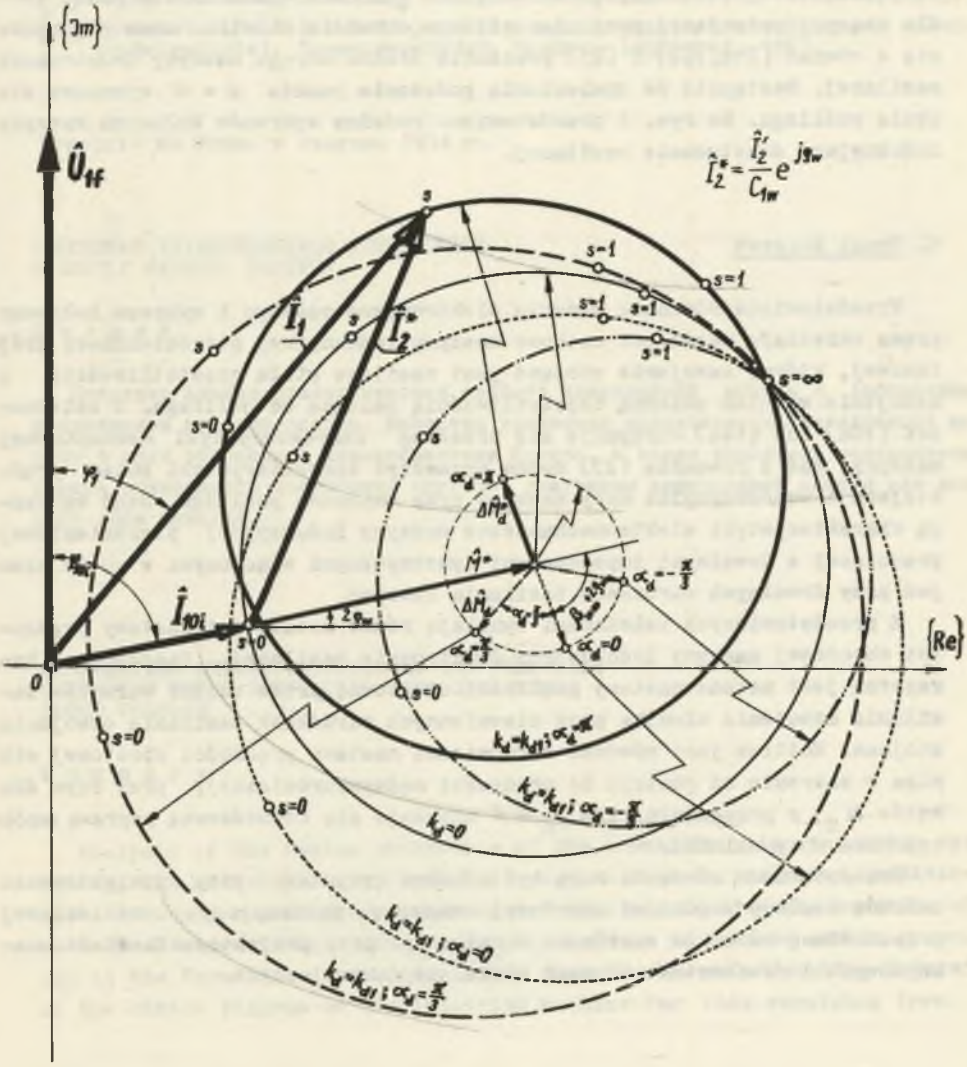
$$\left\{\hat{I}_1\right\}_{s=0} = \hat{I}_{10} = \hat{I}_{10i} + \hat{I}_{20}'^* \tag{24b}$$

- dla poślizgu $s = \infty$

$$\left\{\hat{I}_2'^*\right\}_{s=\infty} = \hat{I}_{2\infty}'^* = \frac{s_{kw}}{C_{1w}^2 R_{2w}'} \hat{U}_{1f} e^{-j(\beta_{w\infty}-\varrho_w)} \tag{25a}$$

$$\left\{\hat{I}_1\right\}_{s=\infty} = \hat{I}_{1\infty} = \hat{I}_{10i} + \hat{I}_{2\infty}'^* \tag{25b}$$

Z zależności (24a,b) wynika, że prąd $\hat{I}_{20}'^*$ jest przesunięty w fazie o kąt $(\pi + \varrho_w)$ względem napięcia $\hat{U}_{df}'$ zasilania zastępczego obwodu wirnika. Zatem na wykresie kołowym punktu $s = 0$ odpowiada przecięciu okręgu z półprostą wychodzącą z końca prądu $\hat{I}_{10i}$ o argumencie równym argumentowi prądu $\hat{I}_{20}'^*$. Natomiast z zależności (25a,b) wynika, że przy poślizgu $s = \infty$ prądy $\hat{I}_{2\infty}'^*$ oraz $\hat{I}_{1\infty}$ nie zależą od napięcia $\hat{U}_{df}'$ zasilania obwodu wir-


{Im}
{Re}
0
s=1
s=∞
s=0
s=0
s=0

nika maszyny. Wobec tego wszystkie wykresy kołowe maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej, narysowane dla dowolnej wartości k_d i fazy α_d napięcia zasilającego wirnik, mają wspólny punkt $s = \infty$

Wyzyskując powyższe wnioski można narysować rodzinę wykresów kołowych maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej dla różnych wartości k_d i α_d na podstawie uproszczonej konstrukcji. W tym celu wyznacza się punkt $s = \infty$ dla maszyny pracującej przy niezasilanym obwodzie wirnika oraz wyznacza się z równań (21a,c,d) i (23) położenie środka okręgu maszyny dwustronnie zasilanej. Następnie po znalezieniu położenia punktu $s = 0$ wyznacza się skalę poślizgu. Na rys. 4 przedstawiono rodzinę wykresów kołowych maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej.

5. Uwagi końcowe

Przedstawione równania momentu elektromagnetycznego i wykresu kołowego prądu określają własności ruchowe maszyny indukcyjnej pierścieniowej trójfazowej, której uzwojenie stojana jest zasilane stałą częstotliwością a uzwojenie wirnika zmienną częstotliwością zależną od poślizgu. Z zależności (10a) lub (14a) otrzymuje się przebieg charakterystyki mechanicznej maszyny, zaś z równania (23) można wyznaczyć charakterystyki zmian prądu stojana i współczynnika mocy maszyny przy zmianach poślizgu. Stąd wynikają charakterystyki elektromechaniczne maszyny indukcyjnej pierścieniowej pracującej z dowolnymi impedancjami symetrycznymi włączonymi w obwód uzwojeń przy dowolnych warunkach zasilania uzwojeń.

Z przedstawionych zależności wynikają różne możliwości nastawy prędkości obrotowej maszyny indukcyjnej dwustronnie zasilanej. Szczególnie korzystna jest metoda nastawy prędkości obrotowej przez zmianę warunków zasilania uzwojenia wirnika przy niezmiennych warunkach zasilania uzwojenia stojana. Możliwa jest wówczas ekonomiczna nastawa prędkości obrotowej silnika w zakresie od postoju do prędkości nadsynchronicznej, przy czym dla kątów α_d z przedziału $0 \leq \alpha_d \leq \pi$ uzyskuje się równoczesną poprawę współczynnika mocy silnika.

Przedstawione równania mogą być również wyzyskane przy projektowaniu układów nastawy prędkości obrotowej maszyny indukcyjnej pierścieniowej przez zmianę warunków zasilania wirnika np. przy projektowaniu elektromaszynowych i przekształtnikowych kaskad asynchronicznych.

LITERATURA

[1] Plamitzer A.M.: Maszyny elektryczne. WNT, Warszawa, 1963

[2] Praca zbiorowa: Technika napędu elektrycznego - podstawy teoretyczne. WNT, Warszawa, 1968.

[3] Praca zbiorowa: Zadania z maszyn elektrycznych. WNT, Warszawa, 1973.

[4] Syromiatników I.A.: Reżimy raboty asinchronnych i sinchronnych elektrodwigatielej. Goseniergoizdat, Moskwa- Leningrad, 1963.

Przyjęto do druku w czerwcu 1974 r.

ОБОЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ С ФАЗНЫМ РОТОРОМ

Р е з ю м е

Приведен анализ статистических свойств асинхронной машины с добавочным напряжением питания ротора. Выведены уравнения характеристик асинхронной машины в виде обобщенной характеристики Клосса, а также приведены зависимости, дающие возможность построения круговой диаграммы асинхрониой машины для данного типа питания.

GENERALIZED CHARACTERISTICS OF THE INDUCTION SLIP-RING MOTOR CONTROLLED WITH ADDITIONAL ROTOR VOLTAGE

S u m m a r y

Analysis of the static properties of the induction slip-ring motor operating with additional slip variabel rotor voltage is presented. Additional stator and rotor impedances were taken into account. The equation of mechanical characteristic of the induction motor is derived and is presen ted in the form of a generalized Kloss formula. The relationships determine the circle diagram of the induction machine for this supplying type.