ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: AUTOMATYKA z. 61 Nr kol. 701

Wojciech CICHOCKI

# ZAGADNIENIE WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH DLA REKURENCYJNEGO ALGORYTMU NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW Z DOWOLNIE ZMIENIANYM ZBIOREM POMIARÓW

Streszczenie. Przedstawiono metody doboru warunków początkowych dla rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. Wyprowadzono oryginalne zależności określające poprawki, których uwzględnienie w rekurencyjnym algorytmie najmniejszych kwadratów umożliwia całkowitą eliminację wpływu arbitralnie przyjmowanych warunków początkowych na wyznacza wartości estymatora parametrów modelu oraz podano warunek konieczny i wystarczający istnienia jednoznacznie określonych wartości tych poprawek.

## 1. Wstęp

W artykule [1] został przedstawiony rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów (RANK) z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów, w którym dowolna zmienność zbioru pomiarów polegała na tym, że w poszczególnych krokach obliczeniowych był on uaktualniany nie tylko przez wprowadzanie pomiarów nowych, ale również przez jednoczesne usuwanie szeregu dowolnie wybieranych pomiarów starych. Tak jak wszelkie algorytmy rekurencyjne, przedstawiony algorytm wymaga znajomości warunków początkowych umożliwiających inicjację jego działania. Znane metody doboru warunków początkowych [2] stosowane w RANK ze zbiorem pomiarów, do którego w każdym kroku obliczeniowym pomiary są tylko wprowadzane, nie zawsze mogą być bezpośrednio stosowane w RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. Dotyczy to głównie metod bazujących na stwierdzeniu, że przy bardzo dużych (teoretycznie nieskończonych) liczbach pomiarów wpływ warunków początkowych na wartości estymatora parametrów modelu jest pomijalnie mały.

Poniżej w p. 2 przytoczono wyprowadzony w [1] RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. W p. 3 omówiono wady i zalety metod doboru warunków początkowych stosowanych w RANK dla zbioru pomiarów, do którego pomiary są tylko wprowadzane oraz omówiono przydatność tych metod do wyznaczania parametrów początkowych w RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. W p. 4 wyprowadzono zależności określające poprawki, których uwzględnienie umożliwia eliminację wpływu warunków początkowych na wyznaczane wartości estymatora parametrów modelu. W p. 5 został podany algorytm całkowitej eliminacji wpływu warunków początkowych w oparciu o wyprowadzone w p. 4 równania poprawek oraz o sformułowany i udowodniony warunek konieczny i wystarczający istnienia jednoznacznie określonych wartości tych poprawek.

## 2. RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów [1]

Rozpatrywany jest obiekt o l+1 wejściach: $u_0, u_1, \dots, u_l$ oraz jednym wyjściu y, któremu został przyporządkowany model postaci

$$y_m = \underline{u}^T \underline{b} \tag{2.1}$$

gdzie: $y_m$ - wielkość wyjściowa modelu, $\underline{u}^T = [u_0, u_1, \dots, u_l]$ - wektor wielkości wejściowych obiektu będących jednocześnie wejściami modelu, $\underline{b} = [b_0, b_1, \dots, b_l]^T$ - wektor nieznanych parametrów modelu.

Zakłada się, że dostępne są pomiary w postaci wektorów blokowych $\underline{m}_i^T = [\underline{u}_i^T \mid y_i]$, których składowymi są pomiary $\underline{u}_i^T = [u_{0i}, u_{1i}, \dots, u_{li}]$ wielkości wejściowych oraz odpowiadające tym pomiarom pomiary $y_i$ wielkości wyjściowej. Ponadto zakłada się, że w szeregu kolejnych krokach obliczeniowych k=1,2,... wyznaczane są wartości $\hat{\underline{b}}(k)$ estymatora wektora $\underline{b}$ w oparciu o algorytm najmniejszych kwadratów na podstawie pomiarów należących do zbioru pomiarów, przy czym zbiór pomiarów dla obliczeń w k-tym kroku obliczeniowym jest uaktualniany przez wprowadzenie do zbioru z poprzedniego kroku obliczeniowego s(k) nowych pomiarów oraz jednocześnie przez usunięcie dowolnie wybranych r(k) starych pomiarów.

W [1] wykazano, że wartość estymatora $\hat{\underline{b}}(k+1)$ wyznaczona na podstawie pomiarów należących do uaktualnionego zbioru w k+1-szym kroku obliczeniowym, dana jest zależnościami:

$$\hat{\underline{b}}(k+1) = \hat{\underline{b}}(k) + \underline{G}(k+1)\left[\tilde{\underline{y}}(k+1) - \tilde{\underline{U}}(k+1)\hat{\underline{b}}(k)\right] \tag{2.2}$$

$$\underline{P}(k+1) = \left[\underline{I}_{l+1} - \underline{G}(k+1)\tilde{\underline{U}}(k+1)\right]\underline{P}(k) \tag{2.3}$$

gdzie:

$\underline{G}(k+1)$ - macierz współczynników korekcyjnych dana zależnością

$$\underline{G}(k+1) = \underline{P}(k)\tilde{\underline{U}}^T(k+1)\left[\tilde{\underline{U}}(k+1)\underline{P}(k)\tilde{\underline{U}}^T(k+1) + \tilde{\underline{E}}(k+1)\right]^{-1}, \tag{2.4}$$

$\hat{\underline{b}}(k), \underline{P}(k)$ - odpowiednio: estymator wektora $\underline{b}$ oraz macierz pomocnicza wyznaczona na podstawie pomiarów należących do zbioru pomiarów w k-tym kroku obliczeniowym,

$[\tilde{\underline{U}}(k+1) \mid \tilde{\underline{y}}(k+1)] = \tilde{\underline{M}}(k+1)$ - macierz zawierająca wyłącznie pomiary wymieniane w zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym, gdzie:

$$\tilde{\underline{U}}(k+1) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{u}_i^T \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{y}}(k+1) = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{bmatrix}; \left(\begin{array}{l} \dim \tilde{\underline{U}}(k+1) = w(k+1)x(l+1) \\ \dim \tilde{\underline{y}}(k+1) = w(k+1)x1 \end{array}\right) \tag{2.5}$$

$w(k+1) = s(k+1) + r(k+1)$ - ilość pomiarów wymienianych w zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym,

$\underline{u}_i^T$, $y_i$ - i-ty pomiar wektora wielkości wejściowych oraz odpowiadający mu pomiar wielkości wyjściowej wymieniane w zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym,

$\underline{\tilde{E}}(k+1)$ - diagonalna macierz ściśle przyporządkowana macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ określająca kierunek wymiany pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym o postaci

$$\underline{\tilde{E}}(k+1) = \begin{bmatrix} \ddots & & \underline{0} \\ & e_i & \\ \underline{0} & & \ddots \end{bmatrix}; \quad \dim \underline{\tilde{E}}(k+1) = w(k+1)\times w(k+1) \qquad (2.6)$$

gdzie: $e_i = 1$ jeżeli w i-tym wierszu macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ znajduje się pomiar wprowadzony do zbioru pomiarów, natomiast $e_i = -1$, jeżeli w i-tym wierszu macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ znajduje się pomiar usuwany ze zbioru pomiarow.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia w każdym kroku obliczeniowym jednoznacznie określonych wartości estymatora $\underline{\hat{b}}(k+1)$ jest, by w każdym kroku obliczeniowym w zmiennym zbiorze pomiarów było tyle liniowo niezależnych pomiarów wielkości wejściowych ile jest nieznanych parametrów modelu.

Warunkiem koniecznym istnienia w każdym kroku obliczeniowym jednoznacznie określonej wartości estymatora $\underline{\hat{b}}(k+1)$ jest, by dla każdego kroku obliczeniowego był spełniony warunek,

$$h(k+1) = h(k) + \mathrm{Tr}\underline{\tilde{E}}(k+1) \geqslant l+1 \qquad (2.7)$$

gdzie $h(k)$ jest horyzontem obserwacji równym liczbie pomiarów zawartych w zmiennym zbiorze pomiarów w k-tym kroku obliczeniowym.

## 3. Metody doboru warunków początkowych

RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów dany zależnościami (2.2), (2.3), (2.4) wymaga znajomości warunków początkowych $\underline{\hat{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$. W wersji klasycznej RANK najczęściej stosowanymi metodami sa [2]:

A. Wyznaczenie wartości $\underline{\hat{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ w zerowym kroku obliczeniowym, przy pomocy nierekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów, w oparciu o grupę pomiarów zawierającą l+1 pomiarów o liniowo niezależnych pomiarach wielkości wejściowych oraz stanowiącą część pomiarów znajdujących się w zbiorze pomiarów dla pierwszego kroku obliczeniowego.

B. Przyjęcie

$$\underline{\hat{b}}(0) = \underline{b}', \quad \underline{P}(0) = \underline{P}'$$

gdzie: $\underline{b}'$, $\underline{P}'$ są wcześniej znanymi wstępnymi oszacowaniami wektora $\underline{b}$ oraz macierzy $\underline{P}$.

C. Przyjęcie pewnych w znacznym stopniu dowolnych warunków początkowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ takich jednak, aby ich wpływ na końcowy wynik był mały. Ze względu na właściwości macierzy $\underline{P}(k)$ konieczne jest przy tym by $\underline{P}(0)$ było również macierzą symetryczną dodatnio określoną.

Przy stosowaniu parametrów startowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ wyznaczonych według metody A, uzyskujemy (przy założeniu niewystępowania błędów przetwarzania numerycznego) w każdym kroku obliczeniowym wartość estymatora $\hat{\underline{b}}(k)$ identyczną z wartością dokładną w sensie algorytmu najmniejszych kwadratów. Stąd metoda ta może być stosowana przy wyznaczaniu warunków początkowych w RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. Przy dużych ilościach identyfikowanych parametrów obiektu wadą tej metody jest konieczność odwracania w zerowym kroku obliczeniowym macierzy o dużych wymiarach $(l+1)$.

Przy stosowaniu parametrów startowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ wyznaczonych według metody B, występują trudności z otrzymaniem odpowiedniej dokładności oszacowań $\underline{b}'$, $\underline{P}'$. Oszacowania te w wielu przypadkach przed zastosowaniem algorytmu najmniejszych kwadratów są wręcz niemożliwe do uzyskania.

Przy stosowaniu parametrów startowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ wyznaczonych według metody C, uzyskujemy w każdym kroku obliczeniowym wartość estymatora $\hat{\underline{b}}(k)$ w ogólnym przypadku różną od wartości dokładnej w sensie algorytmu najmniejszych kwadratów. Spowodowane to jest tym, że przyjmowane wartości $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ w ogólnym przypadku nie są związane z identyfikowanym obiektem oraz pomiarami przeprowadzonymi na tym obiekcie. W pracy [3] R.C. Lee zaproponował dobór parametrów $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ w postaci:

$$\hat{\underline{b}}(0) = \underline{0}, \quad P(0) = a^2\underline{I}_{l+1} \tag{3.1}$$

gdzie a jest bardzo dużą liczbą rzeczywistą. Ponadto wykazał, że przy $a \to \infty$ wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$ wyznaczone w oparciu o RANK są zbieżne do wartości dokładnych w sensie algorytmu najmniejszych kwadratów już dla zbioru pomiarowego zawierającego tylko $l+1$ liniowo niezależnych pomiarów, a więc dla najmniej licznego zbioru, na podstawie którego można w oparciu o algorytm najmniejszych kwadratów wyznaczyć estymator wektora $\underline{b}$. W trakcie numerycznej realizacji RANK z warunkami początkowymi (3.1) wyznaczane w poszczególnych krokach obliczeniowych wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$ obarczone są błędami w porównaniu z wartościami dokładnymi w sensie algorytmu najmniejszych kwadratów pomimo odpowiedniej ilości liniowo niezależnych pomiarów. Błędy te są wynikiem:

- przyjęcia w obliczeniach numerycznych w miejsce $a \to \infty$ wartości skończonej,
- małej dokładności obliczeń numerycznych spowodowanej dużą wartością a.

W celu wyeliminowania błędu wynikającego z dokładności przetwarzania, wartość a należy przyjąć odpowiednio ograniczoną od góry w zależności od długości słowa maszynowego oraz od sposobu reprezentacji liczb w danej maszynie [5]. Natomiast błąd wynikający ze skończonej wartości a jest tym większy, im a posiada mniejszą wartość i maleje ze wzrostem liczby pomiarów zawartych w zbiorze pomiarów w danym kroku obliczeniowym. Przy odpowiednio dużej liczbie tych pomiarów błąd ten staje się pomijalnie mały. W pracy [5] wyprowadzono zależności określające poprawki, których uwzględnienie eliminuje częściowo wpływ wartości $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ na wyznaczane wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$, przy czym dokładność tej eliminacji jest tym lepsza, im większa jest liczba pomiarów na podstawie których wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$ zostały wyznaczone.

Reasumując, można stwierdzić, że warunki początkowe (3.1) mogą być stosowane w RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów w przypadku, gdy zbiór pomiarów posiada w poszczególnych krokach obliczeniowych odpowiednio duży horyzont obserwacji. Natomiast w przypadku, gdy zbiór pomiarów w poszczególnych krokach obliczeniowych posiada mały horyzont obserwacji, warunki początkowe (3.1), mimo uwzględniania poprawek [5] częściowo eliminujących wpływ tych warunków, nie mogą być stosowane.

Ze względu na dużą wygodę w stosowaniu arbitralnie przyjmowanych warunków początkowych (metoda C), zostały poniżej wyprowadzone zależności określające poprawki, których uwzględnienie umożliwia całkowitą eliminację wpływu przyjmowanych w RANK warunków początkowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ na wartość $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$. Stąd uzyskano możliwość zapewnienia równości wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$ wyznaczanych przy pomocy RANK z wartościami dokładnymi w sensie algorytmu najmniejszych kwadratów oraz uzyskano możliwość stosowania arbitralnie przyjmowanych warunków początkowych w RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów niezależnie od wielkości horyzontu obserwacji.

## 4. Równania poprawek eliminujących wpływ warunków początkowych

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Dla warunków początkowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$, gdzie $\hat{\underline{b}}(0)$ jest wektorem o dowolnych składowych rzeczywistych, a $\underline{P}(0)$ jest macierzą rzeczywistą symetryczną dodatnio określoną, można zawsze wyznaczyć taki zbiór l+1 pomiarów $\underline{m}_{-i}$, zwanych pomiarami fikcyjnymi, o postaci:

$$\underline{m}^T_{-i} = \left[\underline{u}^T_{-i} \,\middle|\, y_{-i}\right] = \left[\underline{s}^T_{-i} \,\middle|\, \underline{s}^T_{-i}\hat{\underline{b}}(0)\right], \quad \text{dla} \quad i=0,1,\dots,l \tag{4.1}$$

gdzie macierz $\underline{S} = \left[\underline{s}_0 \,\middle|\, \underline{s}_{-1} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{s}_{-l}\right]^T$ jest macierzą nieosobliwą spełniającą zależność

$$\underline{S}^T\underline{S} = \underline{P}^{-1}(0), \tag{4.2}$$

który po przetworzeniu przez algorytm najmniejszych kwadratów daje wektor $\hat{\underline{b}}(0)$ oraz macierz $\underline{P}(0)$.

Dowód. Dla symetrycznej dodatnio określonej macierzy $\underline{P}(0)$ istnieje zawsze taka macierz nieosobliwa $\underline{S}$, że $\underline{P}^{-1}(0) = \underline{S}^T\underline{S}$. Stąd dla danych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ istnieją zawsze pomiary (4.1), dla których spełniony jest warunek (4.2). Wyznaczając według algorytmu najmniejszych kwadratów [4] na podstawie pomiarów (4.1) estymator $\hat{\underline{b}}$, otrzymujemy

$$\hat{\underline{b}} = \underline{P}\underline{S}^T\underline{y}$$

gdzie:

$$\underline{P} = (\underline{S}^T\underline{S})^{-1}, \qquad \underline{y} = \underline{S}\hat{\underline{b}}(0)$$

Stąd uwzględniając (4.2), otrzymujemy:

$$\underline{P} = \left[\underline{P}^{-1}(0)\right]^{-1} = \underline{P}(0) \quad \text{oraz} \quad \hat{\underline{b}} = \underline{P}(0)\underline{S}^T\underline{S}\hat{\underline{b}}(0) = \hat{\underline{b}}(0)$$

c.n.w.

Z przedstawionego twierdzenia wynika, że przyjęcie w RANK warunków początkowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ ma taki sam wpływ na wyniki estymacji jak wprowadzenie do zbioru pomiarów dodatkowych l+1 pomiarów fikcyjnych (4.1), praktycznie zawsze nie związanych z własnościami identyfikowanego obiektu. Oczywistym jest, że wpływ l+1 pomiarów fikcyjnych na wyznaczane wartości estymatora parametrów modelu jest przy dużym horyzoncie obserwacji $h(k) \gg l+1$ pomijalnie mały, natomiast przy małym horyzoncie obserwacji istnienie pomiarów fikcyjnych może wartości te poważnie obciążyć.

W oparciu o RANK z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów (zależności (2.2 ÷ 2.4)) można dokonać wyeliminowania poszczególnych pomiarów fikcyjnych. W tym celu dla zadanych wartości $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$ należy znać pomiary fikcyjne (4.1). Konieczność znajomości tych pomiarów narzuca na wybór macierzy $\underline{P}(0)$ dodatkowy warunek zapewniający łatwość wyznaczania macierzy $\underline{S}$. Ograniczając wybór macierzy $\underline{P}(0)$ do dodatnio określonej macierzy diagonalnej

$$\underline{P}(0) = \mathrm{diag}\left\{p_{00}(0), p_{11}(0), \ldots, p_{ll}(0)\right\} \tag{4.3}$$

gdzie $p_{ii}(0) > 0$ dla $i=0,1,\ldots,l$, otrzymujemy spełniającą zależność (4.2) macierz $\underline{S}$ w postaci[1]

$$\underline{S} = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{p_{00}(0)}}, \frac{1}{\sqrt{p_{11}(0)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{p_{ll}(0)}}\right\}$$

[1] Ograniczono się do macierzy $\underline{S}$ o elementach dodatnich. Przyjęcie rozwiązania równania (4.2) w postaci $\underline{S}^* = -\underline{S}$ nie zmienia ostatecznych wyników rozważań.

Stąd dla wektora $\hat{\underline{b}}(0) = \left[\hat{b}_0(0),\ \hat{b}_1(0),\ldots,\hat{b}_l(0)\right]^T$ pomiary (4.1) posiadają postać:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\underline{u}_0^T \,\middle|\, y_0\right] &= \left[\frac{1}{\sqrt{p_{00}(0)}},0,0,\ldots,0 \,\middle|\, \frac{\hat{b}_0(0)}{\sqrt{p_{00}(0)}}\right]\\
\left[\underline{u}_{-1}^T \,\middle|\, y_{-1}\right] &= \left[0,\frac{1}{\sqrt{p_{11}(0)}},0,\ldots,0 \,\middle|\, \frac{\hat{b}_1(0)}{\sqrt{p_{11}(0)}}\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left[\underline{u}_{-l}^T \,\middle|\, y_{-l}\right] &= \left[0,\ldots,0,\frac{1}{\sqrt{p_{ll}(0)}} \,\middle|\, \frac{\hat{b}_l(0)}{\sqrt{p_{ll}(0)}}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Znając wyznaczone w k-tym kroku obliczeniowym wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$ oraz eliminując w kroku pomocniczym ze zbioru pomiarów i-ty pomiar fikcyjny przy pomocy zależności (2.2 ÷ 2.4), otrzymujemy:

$$\hat{\underline{b}}(k) = \hat{\underline{b}}(k) + \underline{g}(k)\left[y_{-i} - \underline{u}_{-i}^T\hat{\underline{b}}(k)\right] \tag{4.5}$$

$$\underline{P}(k) = \left[\underline{I}_{l+1} - \underline{g}(k)\underline{u}_{-i}^T\right]\underline{P}(k) \tag{4.6}$$

gdzie

$$\underline{g}(k) = \underline{P}(k)\underline{u}_{-i}\left[\underline{u}_{-i}^T\underline{P}(k)\underline{u}_{-i} - 1\right]^{-1}, \tag{4.7}$$

przy czym przez $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$, $\underline{g}(k)$ oznaczono wartości, odpowiednio $\hat{\underline{b}}(k+1)$, $\underline{P}(k+1)$, $\underline{g}(k+1)$ jako wartości uzyskane w k-tym kroku obliczeniowym po zastosowaniu kroku pomocniczego. Uwzględnienie w (4.7) wartości (4.4) daje

$$\underline{g}(k) = \frac{p_{ii}(0)}{p_{ii}(k)-p_{ii}(0)}\,\underline{p}_i(k) \tag{4.8}$$

gdzie $\underline{p}_i(k)$ jest i-tą kolumną macierzy $\underline{P}(k)$. Wprowadzając (4.8) do (4.5) i (4.6) oraz podstawiając w otrzymanych zależnościach wartości (4.4) otrzymujemy:

$$\hat{\underline{b}}(k) = \hat{\underline{b}}(k) - \frac{\hat{b}_i(k)-\hat{b}_i(0)}{p_{ii}(k)-p_{ii}(0)}\,\underline{p}_i(k) \tag{4.9}$$

$$\underline{P}(k) = \left\{\underline{I}_{l+1} - \frac{1}{p_{ii}(k)-p_{ii}(0)}\left[\underline{0},\ldots,\underline{p}_i(k),\underline{0},\ldots,\underline{0}\right]\right\}\underline{P}(k) \tag{4.10}$$

Przedstawiając w 4.10) macierz $\underline{P}(k)$ w postaci $\underline{P}(k) = [\underline{p}_0(k), \underline{p}_1(k), \dots \underline{p}_l(k)]$ oraz wykorzystując, że $\underline{P}(k) = \underline{P}^T(k)$, mamy

$$\underline{P}(k) = \underline{P}(k) - \frac{1}{p_{ii}(k)-p_{ii}(0)} \underline{p}_i(k)\underline{p}_i^T(k) \tag{4.11}$$

Zależność (4.9) łącznie z zależnością (4.11) tworzą układ zależności

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{b}}(k) &= \hat{\underline{b}}(k) + \Delta_i\hat{\underline{b}}(k) \\ \underline{P}(k) &= \underline{P}(k) + \Delta_i\underline{P}(k) \end{aligned}\right| \tag{4.12}$$

wprowadzających poprawki, do wyznaczonych w k-tym kroku obliczeniowym wartości $\hat{\underline{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$, związane z wyeliminowaniem i-tego pomiaru fikcyjnego (4.4), gdzie:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i\hat{\underline{b}}(k) &= -\frac{\hat{b}_i(k)-\hat{b}_i(0)}{p_{ii}(k)-p_{ii}(0)} \underline{p}_i(k) \\ \Delta_i\underline{P}(k) &= -\frac{1}{p_{ii}(k)-p_{ii}(0)} \underline{p}_i(k)\underline{p}_i^T(k) \end{aligned}\right| \tag{4.13}$$

W celu wykorzystania wartości skorygowanych $\hat{\underline{b}}(k)$, $P(k)$ w kolejnym k+1--szym kroku obliczeniowym (zależności (2.2 ÷ 2.4)) względnie w przypadku eliminacji w k-tym kroku obliczeniowym następnego pomiaru fikcyjnego dotąd nie wyeliminowanego, należy dokonać podstawienia:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{b}}(k) &\longrightarrow \hat{\underline{b}}(k) \\ \underline{P}(k) &\longrightarrow \underline{P}(k) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ze względu na addytywny charakter poprawek w (4.12) poprawki całkowite $\Delta_c\hat{\underline{b}}(k)$, $\Delta_c\underline{P}(k)$, związane z wyeliminowaniem w k-tym kroku obliczeniowym wszystkich pomiarów fikcyjnych (4.4), dane są (o ile poszczególne poprawki $\Delta_i\hat{\underline{b}}(k)$, $\Delta_i\underline{P}(k)$ są jednoznacznie określone) zależnościami:

$$\begin{aligned} \Delta_c\hat{\underline{b}}(k) &= \sum_{i=0}^{l} \Delta_i\hat{\underline{b}}(k) \\ \Delta_c\underline{P}(k) &= \sum_{i=0}^{l} \Delta_i\underline{P}(k). \end{aligned} \tag{4.15}$$

przy czym dla każdego $i=0,1,\dots,l$ wielkości $\Delta_i\underline{\hat{b}}(k)$, $\Delta_i\underline{P}(k)$ wyznaczane są w oparciu o zależności (4.13), w których wartości $\hat{b}_i(k)$ oraz $\underline{p}_i(k)$, oprócz wartości dla i odpowiadającego pierwszemu eliminowanemu pomiarowi fikcyjnemu, są uaktualnionymi wartościami według (4.12 ÷ 4.14) z poorzedniego kroku pomocniczego.

W przypadku macierzy $\underline{P}(k)$ diagonalnej uaktualnianie według (4.12÷ ÷4.14), związane z wyeliminowaniem i-tego pomiaru fikcyjnego, nie zmienia elementów wektora $\underline{\hat{b}}(k)$ oraz macierzy $\underline{P}(k)$ występujących w zależnościach (4.13) dla pozostałych pomiarów fikcyjnych. Stąd dla macierzy $\underline{P}(k)$ diagonalnej, otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_c\underline{\hat{b}}(k) &= \left[-\frac{\hat{b}_0(k)-\hat{b}_0(0)}{p_{00}(k)-p_{00}(0)}\,p_{00}(k),\dots\dots,-\frac{\hat{b}_l(k)-\hat{b}_l(0)}{p_{ll}(k)-p_{ll}(0)}\,p_{ll}(k)\right]^T \\ \Delta_c\underline{P}(k) &= \operatorname{diag}\left\{\frac{-p_{00}^2(k)}{p_{00}(k)-p_{00}(0)},\dots\dots,\frac{-p_{ll}^2(k)}{p_{ll}(k)-p_{ll}(0)}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

W k-tym kroku obliczeniowym w oparciu o RANK (2.2 ÷ 2.4) można wyeliminować w jednym kroku pomocniczym zbiór wszystkich pomiarów fikcyjnych (4.4). W przypadku tym mamy:

$$\underline{\tilde{U}}(k+1) = \underline{S}, \quad \underline{\tilde{y}}(k+1) = \underline{S}\underline{\hat{b}}(0), \qquad (4.18)$$

Podstawiając (4.18) do (2.2 ÷ 2.4), otrzymujemy:

$$\underline{\hat{b}}(k) = \underline{\hat{b}}(k) + \underline{G}(k)\left[\underline{S}\underline{\hat{b}}(0) - \underline{S}\underline{\hat{b}}(k)\right] \qquad (4.19)$$

$$\underline{P}(k) = \left[\underline{I}_{l+1} - \underline{G}(k)\underline{S}\right]\underline{P}(k) \qquad (4.20)$$

gdzie

$$\underline{G}(k) = \underline{P}(k)\underline{S}^T\left[\underline{S}\underline{P}(k)\underline{S}^T - \underline{I}_{l+1}\right]^{-1} \qquad (4.21)$$

przy czym przez $\underline{\hat{b}}(k)$, $\underline{P}(k)$, $\underline{G}(k)$ oznaczono jak poprzednio wartości $\underline{\hat{b}}(k+1)$, $\underline{P}(k+1)$, $\underline{G}(k+1)$ jako wartości uzyskane w k-tym kroku obliczeniowym po zastosowaniu kroku pomocniczego. Przekształcając (4.21), otrzymujemy

$$\underline{G}(k) = \underline{P}(k)\left[\underline{P}(k)-\underline{P}(0)\right]^{-1}\underline{S}^{-1}.$$

Podstawiając $\underline{G}(k)$ w (4.19) oraz w (4.20) otrzymujemy zależności:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{b}}(k) &= \hat{\underline{b}}'(k) + \Delta_c\hat{\underline{b}}(k) \\ \underline{P}(k) &= \underline{P}(k) + \Delta_c\underline{P}(k) \end{aligned}\right| \qquad (4.22)$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_c\hat{\underline{b}}(k) &= -\ \underline{P}(k)\left[\underline{P}(k)-\underline{P}(0)\right]^{-1}\left[\hat{\underline{b}}(k)-\hat{\underline{b}}(0)\right] \\ \Delta_c\underline{P}(k) &= -\ \underline{P}(k)\left[\underline{P}(k)-\underline{P}(0)\right]^{-1}\underline{P}(k). \end{aligned}\right| \qquad (4.23)$$

wprowadzające poprawki,do wyznaczonych w k-tym kroku obliczeniowym wartości $\hat{\underline{b}}(k)$ oraz $\underline{P}(k)$, związane z wyeliminowaniem wpływu wszystkich pomiarów fikcyjnych.

W celu wykorzystania wartości skorygowanych $\hat{\underline{b}}(k)$ oraz $\underline{P}(k)$ w kolejnym k+1-szym kroku obliczeniowym, należy tak jak poprzednio dokonać podstawienia według (4.14).

Stosowanie przy wyznaczaniu poprawek $\Delta_c\hat{\underline{b}}(k)$, $\Delta_c\underline{P}(k)$ zależności (4.23) wymaga odwracania macierzy $\underline{P}(k) - \underline{P}(0)$, co w przypadku dużych wartości l+1 jest operacją uciążliwą. W przypadku gdy macierz $\underline{P}(k)$ jest macierzą diagonalną zależności te przyjmują prostą do realizacji numerycznej postać (4.16). W przypadku gdy macierz $\underline{P}(k)$ można pominąć w porównaniu z macierzą $\underline{P}(0)$ zależności (4.23) przyjmują również, ze względu na diagonalność macierzy $\underline{P}(0)$, stosunkowo prostą do realizacji numerycznej postać:

$$\begin{aligned} \Delta_c\hat{\underline{b}}(k) &= \underline{P}(k)\underline{P}^{-1}(0)\left[\hat{\underline{b}}(k)-\hat{\underline{b}}(0)\right] \\ \Delta_c\underline{P}(k) &= \underline{P}(k)\underline{P}^{-1}(0)\underline{P}(k) \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Należy zauważyć, że w przypadku ogólnej postaci macierzy $\underline{P}(k)$ w celu ominięcia operacji odwracania macierzy $\underline{P}(k)-\underline{P}(0)$, można przy eliminacji w k-tym kroku obliczeniowym wszystkich pomiarów fikcyjnych stosować l+1 razy zależności (4.12 ÷ 4.14) związane za każdym razem z wyeliminowaniem jednego pomiaru fikcyjnego. W przypadku tym mamy nakład obliczeń numerycznych tylko o l+1 operacji odejmowania większy od nąkładu obliczeń występującego przy stosowaniu zależności (4.24).

## 5. Algorytm całkowitej eliminacji wpływu warunków początkowych

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli w k-tym kroku obliczeniowym w zmiennym zbiorze pomiarów znajduje się i-ty pomiar fikcyjny (4.4) oraz istnieje w nim, włączając w to również pomiary fikcyjne, l+1 liniowo niezależnych pomiarów wielkości wejściowych, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby

$$p_{ii}(k) < p_{ii}(0)$$

jest by podzbiór powstały przez usunięcie ze zbioru pomiarów i-tego pomiaru fikcyjnego zawierał nadal l+1 liniowo niezależnych pomiarów wielkości wejściowych.

Dowód. Z założenia wynika, że macierz $\underline{U}(k)$, której poszczególne wiersze zawierają pomiary wielkości wejściowych, można przedstawić w postaci

$$\underline{U}(k) = \begin{bmatrix} \underline{u}_i^T \\ --- \\ \underline{U}'(k) \end{bmatrix}$$

gdzie macierz $\underline{U}'(k)$ zawiera $n \geqslant l$ pomiarów wielkości wejściowych. Stąd

$$\underline{Q}(k) = \underline{u}_i \underline{u}_i^T + \underline{Q}'(k) \tag{a}$$

gdzie:

$$\underline{Q}(k) = \left\{q_{rs}(k)\right\}_{r,s=0,1,\ldots,l} = \underline{U}^T(k)\underline{U}(k)$$

$$\underline{Q}'(k) = \left\{q'_{rs}(k)\right\}_{r,s=0,1,\ldots,l} = \underline{U}'^T(k)\underline{U}'(k).$$

Z (a) wynika, że:

$$q_{rs}(k) = \begin{cases} q'_{rs}(k) & \text{dla} \quad r \neq i, s \neq i \\ \dfrac{1}{p_{ii}(0)} + q'_{ii}(k) & \text{dla} \quad r = i, s = i \end{cases}$$

oraz

$$\Delta_{is}(k) = \Delta'_{is}(k) \quad \text{dla} \quad s=0,1,\ldots,l$$

gdzie: $\Delta_{rs}(k)$, $\Delta'_{rs}(k)$ dla $r,s=0,1,\ldots,l$ są dopełnieniami algebraicznymi, odpowiednio: $q_{rs}(k)$ w macierzy $\underline{Q}(k)$ oraz $q'_{rs}(k)$ w macierzy $\underline{Q}'(k)$. Stąd element $p_{ii}(k)$ macierzy $\underline{P}(k) = \left[\underline{U}^T(k)\underline{U}(k)\right]^{-1}$, można przedstawić w postaci

$$p_{ii}(k) = \frac{\Delta_{ii}(k)}{\sum\limits_{s=0}^{l} q'_{is}(k)\,\Delta'_{is}(k) + \dfrac{\Delta_{ii}(k)}{p_{ii}(0)}}$$

Ponieważ $\Delta_{ii}(k) > 0$, to

$$p_{ii}(k) = \frac{1}{\frac{\det \underline{Q}'(k)}{\Delta_{ii}(k)} + \frac{1}{p_{ii}(0)}} \qquad (aa)$$

D. warunku koniecznego: jeżeli w $\underline{U}'(k)$ istnieje l+1 liniowo niezależnych pomiarów wielkości wejściowych, to $\det \underline{Q}(k) > 0$. Stąd na podstawie (aa) $p_{ii}(k) < p_{ii}(0)$.

c.n.u.

D. warunku wystarczającego: jeżeli $p_{ii}(k) < p_{ii}(0)$, to na podstawie (aa) $\det \underline{Q}'(k) > 0$. Stąd w $\underline{U}'(k)$ istnieje l+1 liniowo niezależnych pomiarów wielkości wejściowych.

c.n.u.

Z udowodnionego twierdzenia wynika możliwość wyeliminowania wpływu, na wyznaczane wartości $\hat{\underline{b}}(k)$ oraz $\underline{P}(k)$, wszystkich pomiarów fikcyjnych (4.4) w kroku obliczeniowym, w którym w zbiorze pomiarów znajduje się l+1 liniowo niezależnych pomiarów, nie licząc pomiarów fikcyjnych, tzn. w momencie, w którym w ogóle istnieje możliwość wyznaczenia na podstawie zebranych pomiarów estymatora parametrów modelu według algorytmu najmniejszych kwadratów. Eliminacji tej można dokonać w dwojaki sposób:

1) Po wprowadzeniu do zbioru pomiarów l+1 liniowo niezależnych pomiarów, wykonanie l+1 kroków pomocniczych według (4.12 ÷ 4.14), z których każdy związany byłby z wyeliminowaniem jednego z pomiarów fikcyjnych (4.4), względnie dla szczególnych przypadków postaci macierzy $\underline{P}(k)$, wykonanie: dla $\underline{P}(k)$ diagonalnej - jednego kroku pomocniczego według (4.16) oraz (4.22), natomiast dla $\underline{P}(k)$ pomijalnej w porównaniu z $\underline{P}(0)$ - jednego kroku pomocniczego według (4.24) oraz (4.22).

2) Po każdorazowym wprowadzeniu do zbioru pomiarów grupy s nowych pomiarów, wykonanie r, $r \leq s$, korekt, według zależności (4.12 ÷ 4.14), z których każda związana byłaby z wyeliminowaniem jednego pomiaru fikcyjnego dotąd nie wyeliminowanego, dla którego byłby spełniony warunek

$$p_{ii}(k) < p_{ii}(0).$$

<u>Przykład</u>

Dany jest model obiektu statycznego o dwóch wejściach i jednym wyjściu w postaci $y = \underline{u}^T\underline{b}$, gdzie: $\underline{u}^T = [u_0, u_1]$, $\underline{b}^T = [b_0, b_1]$. Do zmiennego zbioru pomiarów wprowadzane są w poszczególnych krokach obliczeniowych następujące pomiary: krok k = 1: $\underline{m}_1^T = [\underline{u}_1^T \mid y_1] = [1 \;\; 0 \mid 2]$, krok k = 2: $\underline{m}_2^T = [\underline{u}_2^T \mid y_2] = [2 \;\; 1 \mid 7]$, krok k = 3: $\underline{m}_3^T = [\underline{u}_3^T \mid y_3] = [2 \;\; 2 \mid 9]$. Należy wyznaczyć estymator $\hat{\underline{b}}(3)$ według RANK (2.2 ÷ 2.4) z warunkami początkowymi $\underline{P}(0) = \underline{I}_2$, $\underline{\hat{b}}(0) = [0,\ 0]^T$, z jednoczesną eliminacją w każdym kroku obliczeniowym wpływu warunków początkowych.

Dla przypadku wprowadzania do zbioru pomiarów w każdym kroku obliczeniowym jednego pomiaru o indeksie równym numerowi kroku, zależności (2.2÷2.4) przyjmują postać:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\hat{b}}(k+1) &= \underline{\hat{b}}(k) + \underline{g}(k+1)\left[y_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T\underline{\hat{b}}(k)\right] \\ \underline{P}(k+1) &= \left[\underline{I}_2 - \underline{g}(k+1)\underline{u}_{k+1}^T\right]\underline{P}(k) \\ \underline{g}(k+1) &= \underline{P}(k)\underline{u}_{k+1}\left[\underline{u}_{k+1}^T\underline{P}(k)\underline{u}_{k+1} + 1\right]^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

gdzie

Krok pierwszy: $k+1=1$, $\underline{u}_{k+1}^T = [1\ \ 0]$, $y_{k+1}=2$. Po podstawieniu do (5.1), otrzymujemy:

$$g(1) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{b}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{P}(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $p_{00}(1) \neq p_{00}(0)$, to według (4.13) dla $i=0$, otrzymujemy:

$$\Delta_0\underline{b}(1) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \Delta_0\underline{P}(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd według (4.12), otrzymujemy wartości skorygowane, pozbawione wpływu pomiaru fikcyjnego $\underline{m}_0^T$:

$$\underline{\hat{b}}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{P}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla obliczeń w kroku drugim podstawiamy: $\underline{\hat{b}}(1) \leftarrow \underline{\hat{b}}(1)$, $P(1) \leftarrow \underline{P}(1)$.

Krok drugi: $k+1=2$, $\underline{u}_{k+1}^T = [2\ \ 1]$, $y_{k+1} = 7$. Po podstawieniu do (5.1), otrzymujemy:

$$\underline{g}(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix},\quad \underline{b}(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad \underline{P}(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $p_{11}(2) \neq p_{11}(0)$, to według (4.14) dla $i=1$, otrzymujemy:

$$\Delta_1\underline{b}(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix},\quad \Delta_1\underline{P}(2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{25}{6} \end{bmatrix}$$

Stąd według (4.12) otrzymujemy skorygowane wartości, pozbawione wpływu pomiarów fikcyjnych $\underline{m}_0^T$, $m_{-1}^T$ :

$$\hat{\underline{b}}(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}(2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ze względu na wyeliminowanie wszystkich pomiarów fikcyjnych (l+1 = 2) wartości $\hat{\underline{b}}(2)$, $\underline{P}(2)$ są całkowicie pozbawione wpływu warunków początkowych $\hat{\underline{b}}(0)$, $\underline{P}(0)$. Dla obliczeń w kroku trzecim podstawiamy: $\hat{\underline{b}}(2) \leftarrow \hat{\underline{b}}(2)$, $\underline{P}(2) \leftarrow \underline{P}(2)$.

Krok trzeci: k+1 = 3, $\underline{u}_{k+1}^T = [2 \;\; 2]$, $y_{k+1} = 9$. Po podstawieniu do (5.1), otrzymujemy:

$$\underline{q}(3) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{b}}(3) = \begin{bmatrix} 2\frac{2}{9} \\ \\ 2\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Wartość $\hat{\underline{b}}(3)$ jest równa wartości dokładnej w sensie algorytmu najmniejszych kwadratów, wyznaczonej na podstawie pomiarów $\underline{m}_1^T$, $\underline{m}_2^T$, $\underline{m}_3^T$.

## 6. Uwagi końcowe

Przybliżone zależności (4.24) uzyskane z zależności dokładnych (4.23) przez pominięcie macierzy $\underline{P}(k)$ są identyczne z zależnościami, umożliwiającymi częściową eliminację wpływu warunków początkowych, przedstawionymi w [5], a uzyskanymi na drodze odpowiednio przeprowadzonej linearyzacji wyrażeń określających wektor $\hat{\underline{b}}(k)$ oraz macierz $\underline{P}(k)$. Z porównania (4.23) z (4.24) widać, że dokładność uzyskanych w [5] zależności przybliżonych jest tym lepsza, im macierz $\underline{P}(0)$ posiada elementy o większych wartościach oraz im horyzont obserwacji h(k) jest większy. Powyższe wnioski są zgodne z przedstawionymi w [5] wnioskami, potwierdzonymi numerycznie.

## LITERATURA

[1] Cichocki W.: Rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów identyfikacji niestacjonarnych obiektów statycznych przy dowolnie zmieniającym się zbiorze danych pomiarowych. Zesz. nauk. Pol. Śl. seria "Automatyka", z. 61. W druku.

[2] Isermann R.: Process-identifikation. Identifikation und Parameterschätzung dynamischer Processe mit diskreten Signalen. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[3] Lee R.C.K.: Optimal Estimation, Identification and Control. Research Monograph No 28. The M.I.T. Press Cambridge. Massachusetts 1964.

[4] Mańczak K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1971.

[5] Pachelski W.: Teoria równań filtrujących i ich zastosowania do opracowania obserwacji według metody najmniejszych kwadratów. PWN, Warszawa 1972.

Złożono w red. 18.12.80 r.
W formie ostatecznej 30.01.81 r.

Recenzent
Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

ПРОБЛЕМА ИСХОДНЫХ УСЛОВИЙ РЕКУРЕНТНОГО АЛГОРИТМА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ПРОИЗВОЛЬНО МЕНЯЕМЫМ МНОЖЕСТВОМ ИЗМЕРЕНИЙ

Р е з ю м е

Представлено методы подбора исходных условий для рекурентного алгоритма наименших квадратов с произвольно меняемым множеством измерений. Введено своеобразные зависимости определяющие поправки, учитывание которых, в рекурентном алгоритме наименших квадратов, делает возможным полное исключение влияния произвольно принимаемых исходных условий на определяемые величины оценок параметров модели. Представлено необходимые и достаточные условия существования однозначно определённых величин этих поправок.

THE INITIAL CONDITIONS PROBLEM FOR THE RECURSIVE LEAST-SQUARES ALGORITM WITH FREELY CHANGING DATA SET

S u m m a r y

Various methods for choosing the initial conditions in the recursive least-squares algorithm with freely changing data set have been presented. The possibility of eliminanting the influence of initial conditions on the parameter estimates has been demonstrated. A number of simple and original corrections eliminating this influence have been derived. Sufficient and necessary conditions for existence of these corrections have been presented.