ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: AUTOMATYKA z. 61 Nr kol. 701

Wojciech CICHOCKI

REKURENCYJNY ALGORYTM NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW IDENTYFIKACJI NIESTACJONARNYCH OBIEKTÓW STATYCZNYCH PRZY DOWOLNIE ZMIENIAJĄCYM SIĘ ZBIORZE DANYCH POMIAROWYCH

Streszczenie. Przedstawiono modyfikację rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów dla identyfikacji liniowych statycznych obiektów niestacjonarnych. Algorytm ten przetwarza zmienny zbiór danych pomiarowych, do którego są wprowadzane nowe dane oraz z którego usuwane są stare dane.

1. Wstęp

Jednym z algorytmów identyfikacji obiektów niestacjonarnych [2] jest algorytm ruchomej najmniejszej sumy kwadratów. Algorytm ten wyznacza w każdym kroku obliczeniowym oceny parametrów identyfikowanego obiektu w oparciu o algorytm najmniejszej sumy kwadratów oraz zmienny ("ruchomy") zbiór danych pomiarowych, do którego w każdym kroku obliczeniowym wprowadzane są bieżące dane pomiarowe z obiektu oraz usuwane dane pomiarowe najstarsze. Podstawową wadą tego algorytmu jest jego nierekurencyjność. Algorytm ten w każdym kroku obliczeniowym wyznacza oceny parametrów identyfikowanego obiektu w oparciu o cały uaktualniany zbiór danych pomiarowych nie wykorzystując wyników z poprzednich kroków obliczeniowych. Z takim działaniem algorytmu związane są, ograniczając jego przydatność, duże czasy obliczeniowe silnie rosnące z ilością estymowanych parametrów.

Poniżej w punkcie 2 została wyprowadzona rekurencyjna wersja algorytmu najmniejszej sumy kwadratów przy ruchomym zbiorze danych pomiarowych. Przy czym przez ruchomy zbiór danych pomiarowych rozumiany jest zbiór, który w każdym kroku obliczeniowym uaktualniany jest przez wprowadzenie na jego początek grupy kolejnych pomiarów bieżących oraz usunięcie z jego końca grupy kolejnych pomiarów najstarszych. W punkcie 3 zostało wyprowadzone uogólnienie algorytmu przedstawionego w punkcie 2 na przypadek dowolnie zmieniającego się zbioru danych pomiarowych. Przy czym przez dowolnie zmieniający się zbiór danych pomiarowych rozumiany jest zbiór, który w każdym kroku obliczeniowym uaktualniany jest w ten sposób, że pomiary usuwane ze zbioru są wybierane z dowolnego jego miejsca a pomiary wprowadzane do zbioru są umieszczane w dowolnym jego miejscu.

2. Rekurencyjna wersja algorytmu najmniejszych kwadratów przy ruchomym zbiorze danych pomiarowych

Rozpatrywany będzie obiekt statyczny o $l+1$ wejściach $u_0, u_1, \dots, u_l$ oraz jednym wyjściu y, któremu został przyporządkowany model postaci

$$y_m = \underline{u}^T \underline{b} \tag{2.1}$$

gdzie:

y_m - wielkość wyjściowa modelu,

$\underline{u}^T = [u_0, u_1, \dots, u_l]$ - wektor wielkości wejściowych obiektu oraz modelu

$\underline{b}^T = [b_0, b_1, \dots, b_l]$ - wektor nieznanych parametrów modelu.

Załóżmy, że w k-tym kroku obliczeniowym został utworzony na podstawie $h(k) \geq l+1$ pomiarów, gdzie $h(k)$ jest horyzontem obserwacji w k-tym kroku obliczeniowym, ruchomy zbiór pomiarow opisany macierzą blokową $\underline{M}_{p,q}(k)$

$$\underline{M}_{p,q}(k) = \left[\underline{U}_{p,q}(k) \,\middle|\, \underline{y}_{p,q}(k)\right] \tag{2.2}$$

gdzie $\underline{U}_{p,q}(k)$ jest macierzą kolejnych: $p, p+1, \dots, q$ pomiarów wielkości wejściowych

$$\underline{U}_{p,q}(k) = \begin{bmatrix} u_{0p} & u_{1p} & \dots & u_{lp} \\ u_{0,p+1} & u_{1,p+1} & \dots & u_{l,p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{0q} & u_{1q} & \dots & u_{lq} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

a $\underline{y}_{pq}(k)$ jest wektorem kolejnych: $p, p+1, \dots, q$ pomiarów wielkości wyjściowej

$$\underline{y}^T_{pq}(k) = [y_p, y_{p+1}, \dots, y_q]. \tag{2.4}$$

Zgodnie z algorytmem najmniejszych kwadratów [1], przy założeniu, że

$$\det\left[\underline{U}'_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k)\right] \neq 0 \tag{2.5}$$

estymator wektora parametrów modelu (2.1) wyznaczony w k-tym kroku obliczeniowym wyrażony jest zależnością

$$\hat{\underline{b}}_{pq}(k) = \underline{P}_{pq}(k)\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k) \tag{2.6}$$

gdzie

$$\underline{P}_{pq}(k) = \left[\underline{U}^{T}_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k)\right]^{-1}. \tag{2.7}$$

Załóżmy, że w celu wyznaczenia estymatora wektora $\underline{b}$ w k+1-szym kroku obliczeniowym, zmieniono ruchomy zbiór pomiarów przez usunięcie z niego r początkowych kolejnych: $p, p+1, \dots, p+r-1$ pomiarów oraz wprowadzenie s nowych kolejnych: $q+1, q+2, \dots, q+s$ pomiarów. Przy czym nowy horyzont obserwacji spełnia zależność

$$h(k+1) = h(k) + s - r \geqslant l+1.$$

Tak zmienionemu zbiorowi pomiarów odpowiada macierz $\underline{M}_{p+r,q+s}(k+1)$ o postaci

$$\underline{M}_{p+r,q+s}(k+1) = \left[\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1) \,\middle|\, \underline{y}_{p+r,q+s}(k+1)\right] \tag{2.8}$$

gdzie $\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1)$ jest macierzą kolejnych: $p+r, p+r+1, \dots, q+s$ pomiarów wielkości wejściowych

$$\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1) = \begin{bmatrix} u_{0,p+r} & u_{1,p+r} & & u_{l,p+r} \\ u_{0,p+r+1} & u_{1,p+r+1} & \cdots & u_{l,p+r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{0,q+s} & u_{1,q+s} & \cdots & u_{l,q+s} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

a $\underline{y}_{p+r,q+s}(k+1)$ jest wektorem kolejnych: $p+r, p+r+1, \dots, q+s$ pomiarów wielkości wyjściowej

$$\underline{y}^{T}_{p+r,q+s}(k+1) = \left[y_{p+r}, y_{p+r+1}, \dots, y_{q+s}\right] \tag{2.10}$$

Macierze (2.2) oraz (2.8) można przedstawić w postaci blokowej:

$$\underline{M}_{pq}(k) = \begin{bmatrix} \underline{M}_{p,p+r-1}(k+1) \\ \hdashline \underline{M}_{p+r,q}(k) \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_{p+r,q+s}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{M}_{p+r,q}(k) \\ \underline{M}_{q+1,q+s}(k+1) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

gdzie: $\underline{M}_{p,p+r-1}(k+1)$, $\underline{M}_{q+1,q+s}(k+1)$, $\underline{M}_{p+r,q}(k)$ są macierzami zawierającymi pomiary, które odpowiednio: zostały usunięte w k+1-szym kroku obliczeniowym z ruchomego zbioru pomiarów, zostały w k+1-szym kroku obliczeniowym wprowadzone do ruchomego zbioru pomiarów, były w k-tym kroku obliczeniowym w ruchomym zbiorze pomiarów i zostały w nim w k+1-szym kroku obliczeniowym.

Odpowiednio do (2.11) mamy:

$$\underline{U}_{pq}(k) = \begin{bmatrix} \underline{U}_{p,p+r-1}(k+1) \\ ------- \\ \underline{U}_{p+r,q}(k) \end{bmatrix}, \quad \underline{y}_{pq}(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}_{p,p+r-1}(k+1) \\ ------- \\ \underline{y}_{p+r,q}(k) \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

oraz

$$\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{U}_{p+r,q}(k) \\ ------- \\ \underline{U}_{q+1,q+s}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \underline{y}_{p+r,q+s}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{y}_{p+r,q}(k) \\ ------- \\ \underline{y}_{q+1,q+s}(k+1) \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Obliczając iloczyny: $\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k)$, $\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k)$ oraz $\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)$ $\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1)$, $\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{y}_{p+r,q+s}(k+1)$ dla poszczególnych czynników w postaci (2.12) oraz (2.13), otrzymujemy:

$$\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k) = \underline{U}^T_{p,p+r-1}(k+1)\underline{U}_{p,p+r-1}(k+1) + \underline{U}^T_{p+r,q}(k)\underline{U}_{p+r,q}(k) \qquad (2.14)$$

$$\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k) = \underline{U}^T_{p,p+r-1}(k+1)\underline{y}_{p,p+r-1}(k+1) + \underline{U}^T_{p+r,q}(k)\underline{y}_{p+r,q}(k) \qquad (2.15)$$

oraz

$$\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{U}^T_{p+r,q}(k)\underline{U}_{p+r,q}(k) + \underline{U}^T_{q+1,q+s}(k+1)\underline{U}_{q+1,q+s}(k+1) \qquad (2.16)$$

$$\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{y}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{U}^T_{p+r,q}(k)\underline{y}_{p+r,q}(k) + \underline{U}^T_{q+1,q+s}(k+1)\underline{y}_{q+1,q+s}(k+1) \qquad (2.17)$$

Eliminując z układu równań (2.14), (2.16) macierz $\underline{U}^T_{p+r,q}(k)\underline{U}_{p+r,q}(k)$ oraz z układu równań (2.15), (2.17) wektor $\underline{U}^T_{p+r,q}(k)\underline{y}_{p+r,q}(k)$, otrzymujemy:

$$\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{U}^T_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k) + \underline{U}^T_{q+1,q+s}(k+1)\underline{U}_{q+1,q+s}(k+1) + \\ - \underline{U}^T_{p,p+r-1}(k+1)\underline{U}_{p,p+r-1}(k+1) \qquad (2.18)$$

oraz

$$\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{y}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k) + \underline{U}^T_{q+1,q+s}(k+1)\underline{y}_{q+1,q+s}(k+1) + \\ - \underline{U}^T_{p,p+r-1}(k+1)\underline{y}_{p,p+r-1}(k+1) \qquad (2.19)$$

W otrzymanych zależnościach (2.18) oraz (2.19) po prawej stronie oprócz składników zawierających pomiary należące do ruchomego zbioru pomiarów w k-tym kroku obliczeniowym występują składniki zawierające wyłącznie pomiary wymieniane w ruchomym zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym.

Definiując:

- macierz $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ jako macierz składającą się z pomiarów wymienianych w k+1-szym kroku obliczeniowym w postaci

$$\underline{\tilde{M}}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{M}_{p,p+r-1}(k+1) \\ \hline \underline{M}_{q+1,q+s}(k+1) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

której odpowiadają zgodnie z (2.2) macierz $\underline{\tilde{U}}(k+1)$ oraz wektor $\underline{\tilde{y}}(k+1)$:

$$\underline{\tilde{U}}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{U}_{p,p+r-1}(k+1) \\ \hline \underline{U}_{q+1,q+s}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{y}}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{y}_{p,p+r-1}(k+1) \\ \hline \underline{y}_{q+1,q+s}(k+1) \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

- diagonalną macierz $\underline{\tilde{E}}(k+1)$ ściśle przyporządkowaną macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$, określającą kierunek wymiany pomiarów w ruchomym zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym, w postaci

$$\underline{\tilde{E}}(k+1) = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e_{r+s,r+s} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

gdzie:

$e_{ii} = 1$ - jeżeli w i-tym wierszu macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ znajduje się pomiar wprowadzany do ruchomego zbioru pomiarów,

$e_{ii} = -1$ - jeżeli w i-tym wierszu macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ znajduje się pomiar usuwany z ruchomego zbioru pomiarów,

zależności (2.18), (2.19) można przedstawić w postaci:

$$\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{U}^T_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k)+\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{U}}(k+1) \tag{2.23}$$

$$\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{y}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k)+\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1) \tag{2.24}$$

Estymator $\hat{\underline{b}}_{p+r,q+s}(k+1)$ wektora parametrów modelu (2.1) wyznaczony w k+1-szym kroku obliczeniowym na podstawie macierzy pomiarów $\underline{M}_{p+r,q+s}(k+1)$ przy założeniu, że

$$\det\left[\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1)\right] \neq 0, \tag{2.25}$$

przez analogię do (2.6) oraz (2.7) posiada postać

$$\hat{\underline{b}}_{p+r,q+s}(k+1) = \underline{P}_{p+r,q+s}(k+1)\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{y}_{p+r,q+s}(k+1) \tag{2.26}$$

gdzie

$$\underline{P}_{p+r,q+s}(k+1) = \left[\underline{U}^T_{p+r,q+s}(k+1)\underline{U}_{p+r,q+s}(k+1)\right]^{-1} \tag{2.27}$$

Uwzględniając w zależności (2.27) zależność (2.23), otrzymujemy

$$\underline{P}_{p+r,q+s}(k+1) = \left[\underline{P}^{-1}_{pq}(k)+\tilde{\underline{U}}^T(k+1)\tilde{\underline{E}}(k+1)\tilde{\underline{U}}(k+1)\right]^{-1} \tag{2.28}$$

gdzie

$$\underline{P}^{-1}_{pq}(k) = \underline{U}^T_{pq}(k)\underline{U}_{pq}(k)$$

Wykorzystując w zależności (2.28) tożsamość [1]:

$$(\underline{A}^{-1} + \underline{B}\underline{C}^{-1}\underline{D})^{-1} = \underline{A} - \underline{A}\underline{B}(\underline{D}\underline{A}\underline{B} + \underline{C})^{-1}\underline{D}\underline{A}$$

gdzie: $\underline{A}, \underline{C}, (\underline{A}^{-1} + \underline{B}\underline{C}^{-1}\underline{D})$ są macierzami kwadratowymi nieosobliwymi, otrzymujemy

$$\underline{P}_{p+r,q+s}(k+1) =$$

$$= \underline{P}_{pq}(k)-\underline{P}_{pq}(k)\tilde{\underline{U}}^T(k+1)\left[\tilde{\underline{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\tilde{\underline{U}}^T(k+1)+\tilde{\underline{E}}^{-1}(k+1)\right]^{-1}\tilde{\underline{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k) \tag{2.29}$$

Wyciągając lewostronnie macierz $\underline{P}_{pq}(k)$ oraz uwzględniając, że $\tilde{\underline{E}}^{-1}(k+1) = \tilde{\underline{E}}(k+1)$, otrzymujemy rekurencyjny wzór na macierz $\underline{P}_{p+r,q+s}(k+1)$ w k+1-szym kroku obliczeniowym w postaci

$$\underline{P}_{p+r,q+s}(k+1) =$$

$$= \underline{P}_{pq}(k)\left\{\underline{I}_{l+1}-\tilde{\underline{U}}^T(k+1)\left[\tilde{\underline{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\tilde{\underline{U}}^T(k+1)+\tilde{\underline{E}}(k+1)\right]^{-1}\tilde{\underline{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\right\} \tag{2.30}$$

Uwzględniając w wyrażeniu (2.26) na wektor $\hat{\underline{b}}_{p+r,q+s}(k+1)$ zależności (2.24) oraz (2.30), otrzymujemy

$$\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1) =$$

$$= \left\{\underline{P}_{pq}(k) - \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) + \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1}\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k) + \underline{\tilde{U}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1)\right\}$$

Stąd w wyniku kolejnych przekształceń z uwzględnieniem, że

$$\underline{\hat{b}}_{pq}(k) = \underline{P}_{pq}(k)\underline{U}^T(k)\underline{y}_{pq}(k),$$

otrzymujemy:

$$\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1) =$$

$$= \underline{\hat{b}}_{pq}(k) + \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1) - \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) +\right.$$

$$\left.+ \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1}\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\left[\underline{U}^T_{pq}(k)\underline{y}_{pq}(k) + \underline{\tilde{N}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1)\right] =$$

$$= \underline{\hat{b}}_{pq}(k) + \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left\{\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1) - \left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) + \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{\hat{b}}_{pq}(k) + \underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1)\right]\right\} =$$

$$= \underline{\hat{b}}_{pq}(k) + \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) + \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) + \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1) - \underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{b}_{pq}(k) +\right.$$

$$\left.- \underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{y}}(k+1)\right\}$$

Wykorzystując $\underline{\tilde{E}}(k+1)\underline{\tilde{E}}(k+1) = \underline{I}_{s+r}$ otrzymujemy równanie które łącznie z równaniem (2.30) tworzy układ zależności:

$$\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1) =$$

$$= \underline{\hat{b}}_{pq}(k) + \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) + \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1}\left[\underline{\tilde{y}}(k+1) - \underline{\tilde{U}}(k+1)\cdot\underline{\hat{b}}_{pq}(k)\right]$$

$$\underline{P}_{p+r,q+s}(k+1) = \tag{2.31}$$

$$= \underline{P}_{pq}(k)\left\{\underline{I}_{l+1} - \underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1) + \underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1}\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\right\}$$

umożliwiający rekurencyjne wyznaczenie estymatora $\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1)$ wektora nieznanych parametrów modelu w k+1-szym kroku obliczeniowym na podstawie:

- znajomości estymatora $\underline{\hat{b}}_{pq}(k)$ oraz macierzy $\underline{P}_{pq}(k)$ wyznaczonych w k-tym kroku obliczeniowym
- znajomości pary macierzy: $\underline{\tilde{M}}(k+1)$, $\underline{\tilde{E}}(k+1)$, określających wymianę pomiarów w ruchomym zbiorze pomiarów k+1-szym kroku obliczeniowym.

Zależności (2.31) można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1) &= \underline{\hat{b}}_{pq}(k)+\underline{G}(k+1)\left[\underline{\tilde{y}}(k+1)-\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{\hat{b}}_{pq}(k)\right]\\ \underline{P}_{p+r,q+s}(k+1) &= \left[\underline{I}_{l+1}-\underline{G}(k+1)\underline{\tilde{U}}(k+1)\right]\underline{P}_{pq}(k)\end{aligned} \tag{2.32}$$

gdzie $\underline{G}(k+1)$ jest macierzą współczynników korekcyjnych określoną zależnością

$$\underline{G}(k+1) = \underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}_{pq}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)+\underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1} \tag{2.33}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia w każdym kroku obliczeniowym jednoznacznie określonych wartości estymatora $\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1)$ jest, by w każdym kroku obliczeniowym w ruchomym zbiorze pomiarów było tyle liniowo niezależnych pomiarów wielkości wejściowych ile jest nieznanych parametrów modelu.

Warunkiem koniecznym istnienia w każdym kroku obliczeniowym jednoznacznie określonych wartości estymatora $\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1)$ jest, by dla każdego kroku obliczeniowego był spełniony warunek

$$h(k+1) = h(k)+\mathrm{Tr}\underline{\tilde{E}}(k+1) \geqslant l+1 \tag{2.34}$$

Warunek ten oznacza, że w każdym kroku obliczeniowym horyzont obserwacji ruchomego zbioru pomiarów nie może być mniejszy od ilości nieznanych parametrów modelu.

3. Rekurencyjna wersja algorytmu najmniejszych kwadratów przy dowolnie zmieniającym się zbiorze danych pomiarowych

W punkcie 2 rozważany był przypadek ruchomego zbioru danych pomiarowych, w tym sensie, że na początek tego zbioru była wprowadzana w każdym kroku obliczeniowym grupa s kolejnych nowych pomiarów a z końca usuwana była grupa r kolejnych pomiarów starych. Przypadek ten można uogólnić korzystając z następującego twierdzenia:

Dowolna zmiana kolejności wierszy w macierzy $[\underline{U}|\underline{y}]$, przy założeniu, że $\det(\underline{U}^T\underline{U}) \neq 0$ nie zmienia wartości macierzy $\underline{P}$ oraz wektora $\underline{b}$ danych zależnościami:

$$\underline{P} = (\underline{U}^T\underline{U})^{-1}$$

$$\underline{b} = (\underline{U}^T\underline{U})^{-1}\underline{U}^T\underline{y}$$

Dowód. Zakładając, że w macierzy $[\underline{U}|\underline{y}]$ zostały wyróżnione dwa dowolne wiersze: wiersz i-ty oraz wiersz k-ty $(i \neq k)$ oraz przyjmując, bez zmniejszenia ogólności rozważań, że $i < k$, macierz $[\underline{U}|\underline{y}]$ można zapisać w postaci blokowej

$$[\underline{U}|\underline{y}] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{U}_1 & \underline{y}_1 \\ \hline \underline{u}_i^T & y_i \\ \hline \underline{U}_2 & \underline{y}_2 \\ \hline \underline{u}_k^T & y_k \\ \hline \underline{U}_3 & \underline{y}_3 \end{array}\right]$$

Zakładając, że na podstawie macierzy $[\underline{U}|\underline{y}]$ została utworzona nowa macierz $[\underline{U}'|\underline{y}']$ przez zamianę wiersza i-tego z k-tym, otrzymujemy

$$[\underline{U}'|\underline{y}'] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{U}_1 & \underline{y}_1 \\ \hline \underline{u}_k^T & y_k \\ \hline \underline{U}_2 & \underline{y}_2 \\ \hline \underline{u}_i^T & y_i \\ \hline \underline{U}_3 & \underline{y}_3 \end{array}\right]$$

Obliczając iloczyny $\underline{U}^T\underline{U}$, $\underline{U}'^T\underline{U}'$ oraz $\underline{U}^T\underline{y}$, $\underline{U}'^T\underline{y}'$, otrzymujemy:

$$\underline{U}^T\underline{U} = \underline{U}'^T\underline{U}' = \sum_{j=1}^{3} \underline{U}_j^T\underline{U}_j + \underline{u}_i\underline{u}_i^T + \underline{u}_k\underline{u}_k^T$$

oraz

$$\underline{U}^T\underline{y} = \underline{U}'^T\underline{y}' = \sum_{j=1}^{3} \underline{U}_j^T\underline{y}_j + \underline{u}_i y_i + \underline{u}_k y_k$$

Stąd, ponieważ $\det(\underline{U}^T\underline{U}) \neq 0$ otrzymujemy:

$$(\underline{U}^T\underline{U})^{-1} = (\underline{U}'^T_{\ast}\underline{U}')^{-1} = \underline{P}$$

$$(\underline{U}^T\underline{U})^{-1}\underline{Uy} = (\underline{U}'^T\underline{U}')^{-1}\underline{U}'^T\underline{y}' = \underline{b}$$

co kończy dowód.

Z powyższego twierdzenia wynika niezależność estymatora $\underline{\hat{b}}_{p+r,q+s}(k+1)$, wyrażonego zależnością (2.26), od kolejności występowania wyników pomiarów w macierzy $\underline{M}_{p+r,q+s}(k+1)$. Tak więc wartość estymatora wektora parametrów modelu zależy (zależność (2.31)) w danym kroku obliczeniowym tylko od: wartości estymatora $\underline{\hat{b}}_{pq}(k)$ i macierzy $\underline{P}_{pq}(k)$ wyznaczonych w poprzednim kroku obliczeniowym oraz macierzy wymienianych pomiarów $\underline{\tilde{M}}(k+1) = \left[\underline{\tilde{U}}(k+1) \,\vdots\, \underline{\tilde{y}}(k+1)\right]$ z przyporządkowaną jej macierzą kierunku wymiany pomiarów $\underline{\tilde{E}}(k+1)$. Przy czym w macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$ nie jest istotna kolejność występowania wymienianych pomiarów, natomiast w macierzy $\underline{\tilde{E}}(k+1)$ element e_{ii} musi odpowiadać kierunkowi wymiany pomiaru zawartego w i-tym wierszu macierzy $\underline{\tilde{M}}(k+1)$.

Stąd dla dowolnie zmieniającego się w k+1-szym kroku obliczeniowym zbioru danych pomiarowych w równaniach (2.31) można pominąć indeksy oznaczające początek i koniec odpowiednio uporządkowanych zbiorów pomiarowych. W wyniku czego otrzymujemy rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów, dla dowolnie zmieniającego się zbioru danych pomiarowych, w postaci:

$$\begin{aligned} &\underline{\hat{b}}(k+1)=\underline{\hat{b}}(k)+\underline{P}(k)\underline{\tilde{U}}(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)+\underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1}\left[\underline{\tilde{y}}(k+1)-\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{\hat{b}}(k)\right] \\ &\underline{P}(k+1)=\underline{P}(k)\left\{\underline{I}_{l+1}-\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)+\underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1}\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}(k)\right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Zależności (3.1) można analogicznie do (2.32), (2.33) przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{b}}(k+1) &= \underline{\hat{b}}(k)+\underline{G}(k+1)\left[\underline{\tilde{y}}(k+1)-\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{\hat{b}}(k)\right] \\ \underline{P}(k+1) &= \left[\underline{I}_{l+1}-\underline{G}(k+1)\underline{\tilde{U}}(k+1)\right]\underline{P}(k) \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie $\underline{G}(k+1)$ jest macierzą współczynników korekcyjnych określoną zależnością

$$\underline{G}(k+1) = \underline{P}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)\left[\underline{\tilde{U}}(k+1)\underline{P}(k)\underline{\tilde{U}}^T(k+1)+\underline{\tilde{E}}(k+1)\right]^{-1} \tag{3.3}$$

Warunek konieczny (2.34) istnienia jednoznacznie określonych wartości estymatorów parametrów modelu w każdym kroku obliczeniowym posiada postać:

$$h(k+1) = h(k)+\mathrm{Tr}\underline{\bar{E}}(k+1) \geqslant l+1$$

Ponadto warunkom:

$$\mathrm{Tr}\underline{\bar{E}}(k+1) > 0$$
$$\mathrm{Tr}\underline{\bar{E}}(k+1) = 0$$
$$\mathrm{Tr}\underline{\bar{E}}(k+1) < 0$$

odpowiadają, odpowiednio: wzrost, stałość oraz zmniejszanie się horyzontu obserwacji w k+1-szym kroku obliczeniowym.

4. Uwagi końcowe

Zależności (3.1) ((3.2)) dla:

$s \neq 0$, $r = 0$ – pokrywają się ze znanymi zależnościami rekurencyjnej wersji algorytmu najmniejszych kwadratów [3], [4], która umożliwia w k+1-szym kroku obliczeniowym uwzględnienie wpływu s nowych pomiarów na wartość estymowanego wektora parametrów.

$s = 0$, $r \neq 0$ – stanowią oryginalną rekurencyjną wersję algorytmu najmniejszych kwadratów, która umożliwia w k+1-szym kroku obliczeniowym wyeliminowanie wpływu r pomiarów na wartość estymowanego wektora parametrów.

$s \neq 0$, $r \neq 0$ – stanowią oryginalną rekurencyjną wersję algorytmu najmniejszych kwadratów, która umożliwia w k+1-szym kroku obliczeniowym wymianę wpływu s+r pomiarów (uwzględnienie wpływu s pomiarów oraz wyeliminowanie wpływu r pomiarów) na wartość estymowanego wektora parametrów.

Stopień macierzy odwracanej w zależnościach (3.1) ((3.2)) jest równy stopniowi macierzy $\bar{E}(k+1)$ wynoszącemu s+r, tzn. jest równy ilości pomiarów w ogólnym przypadku wymienianych w danym kroku obliczeniowym w uaktualnianym zbiorze danych pomiarowych. Tak więc w przypadku $s+r > l+1$ z zastosowaniem algorytmu rekurencyjnego (3.1) związane jest odwracanie macierzy o większym stopniu niż w przypadku zastosowania algorytmu nierekurencyjnego (2.26) powodując nieopłacalność stosowania wersji rekurencyjnej.

Wyznaczenie w k+1-szym kroku obliczeniowym wartości estymatora $\underline{b}_{p+r,q+s}(k+1)$ można przeprowadzić w oparciu o zależności (3.1) ((3.2)), stosując s+r pomocniczych kroków obliczeniowych, w każdym z których byłby albo usuwany albo dołączany do zmiennego zbioru pomiarów tylko jeden pomiar. W przypadku tym zamiast jednego kroku obliczeniowego, w którym odwracana jest macierz stopnia s+r mamy s+r kroków obliczeniowych, w każdym z których odwracany jest skalar.

W przypadku, który ma często miejsce w systemach identyfikacji w czasie rzeczywistym, gdy w każdym kroku obliczeniowym do zbioru pomiarów dołączany jest jeden pomiar bieżący oraz jednocześnie usuwany z niego jeden pomiar najstarszy [2], mamy, stosując zależności (3.1) ((3.2)), do czynienia w każdym kroku obliczeniowym z odwracaniem macierzy stopnia drugiego, co jest operacją stosunkowo prostą. Operację tę można w tym przypadku również zastąpić dwukrotnym zastosowaniem ww. zależności oddzielnie dla poszczególnych pomiarów, wymieniając w ten sposób jeden krok obliczeniowy z odwracaniem macierzy stopnia drugiego na dwa kroki obliczeniowe z odwracaniem w każdym z nich wielkości skalarnej.

LITERATURA

[1] Isermann R.: Process-identifikation. Identyfikation und Parameterschatzung dynamischer Processe mit diskreten Signalen. Springer-Verlag. Berlin 1974.

[2] Kozielski S.: Identyfikacja procesów niestacjonarnych w systemach czasu rzeczywistego. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1977.

[3] Mendel J.M.: Diskrete Techniques of Parameter Estimation. Marcel Dekker. INC. New York 1973.

[4] Pachelski W.: Teoria równań filtrujących i ich zastosowanie do opracowania obserwacji według metody najmniejszych kwadratów. PWN, Warszawa 1972.

Złożono w redakcji 20.9.80 r.
W formie ostatecznej 20.11.80 r.

Recenzent
Prof. dr hab. inż. Zdzisław Bubnicki

РЕКУРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ НАЙМНЕЙШИХ КВАДРАТОВ
ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАТИЧЕСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНО ИЗМЕНЯЕМЫМ МНОЖЕСТВЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ДАННЫХ

Р е з ю м е

Представлено модификацию рекурентного алгоритма наймнейших квадратов идентификации нестационарных, статических линейных систем. Алгоритм перерабатывает изменяемые множество измерительных данных,которые принимает новые данные также с которого удавляется старые данные.

A RECURSIVE LEAST-SQUARES ALGORITM
WITH FREELY CHANGING DATA SET FOR IDENTIFICATION
OF NONSTATIONARY STATIC SYSTEMS

S u m m a r y

A modification of the least-squares recursive algorithm applicable for identification of nonstationary static systems has been presented. The algorithm proasses a changing data set with new data added end old data removed.