ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: AUTOMATYKA z. 61

Ernest CZOGAŁA
Świetła STOJANOWA

ANALIZA BŁĘDÓW SZUMU KWANTYZACJI W ZALEŻNOŚCI OD DŁUGOŚCI SŁOWA WYJŚCIOWEGO PRZETWORNIKA ANALOGOWO-CYFROWEGO

Streszczenie. W pracy przeanalizowano dwa rodzaje błędów: bezwzględnego i względnego spowodowanych szumem kwantyzacji. Dokonano oszacowania błędu względnego w zależności od liczby bitów słowa wyjściowego przetwornika analogow-cyfrowego, posługując się kryterium całkowym zbieżności szeregów. Wyniki obliczeń zilustrowano wykresem.

1. Wstęp

Zastosowanie analogowo-cyfrowej konwersji sygnałów (np. poprzez przetworniki analogowo-cyfrowe) powoduje pewien szczególny rodzaj błędów, zwanych szumem kwantyzacji [1], [2], [3]. Oczywistym jest fakt, że błędy te muszą maleć wraz ze wzrostem liczby bitów słowa wyjściowego urządzenia dokonującego konwersji przy ustalonym zakresie wielkości przetwarzanej i stałym okresie próbkowania.

Poza szumem kwantyzacji przetwarzanie analogowo-cyfrowe wprowadza jeszcze szereg innych błędów i zniekształceń [1]. Należy tu wymienić chociażby takie efekty, jak:

1° zniekształcenia aperturowe wynikające z faktu, że czas apertury, tj. czas potrzebny na pobranie próbki jest skończony. W czasie tym uśrednia się próbkowany przebieg, przy czym czas powinien być niewielki w porównaniu z okresem próbkowania

2° migotanie czyli fluktuacje momentów próbkowania, jest to efekt wynikający z losowych wahań długości okresu próbkowania

3° nieliniowość

i inne [1].

W niniejszej pracy dokonano analizy dwóch rodzajów błędów: względnego i bezwzględnego, spowodowanych szumem kwantyzacji. Przedstawiono również wyniki obliczeń zmian względnego błędu szumu kwantyzacji w zależności od liczby bitów słowa wyjściowego. Wyniki obliczeń zilustrowano wykresem.

2. Błąd bezwzględny szumu kwantyzacji

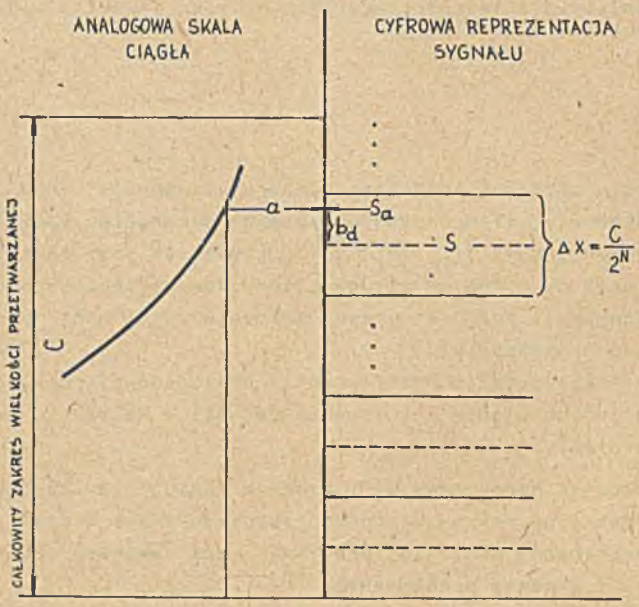
W celu ilustracji mechanizmu powstawania błędu (bezwzględnego) szumu kwantyzacji rozpatrzymy relację między wielkością przetwarzania a cyfrowym wynikiem przetwarzania.

Relację zilustrowaną na rys. 1 można zapisać w postaci:

$$s_a = s + b_d \tag{1}$$

gdzie:

- a - wartość wielkości przetwarzanej,
- s_a - wynik przetwarzania niezaokrąglony do wartości całkowitych,
- s - wynik przetwarzania zaokrąglony do wartości całkowitych,
- b_d - wartość błędu kwantyzacji wynikająca z zaokrąglenia s_a do s.



Rys. 1. Kwantowanie sygnału analogowego

Wartość błędu kwantyzacji b_d jest więc różnicę między niezaokrągloną wartością s_a a jej zaokrągleniem s, tj.:

$$b_d = s_a - s \tag{1a}$$

Oczywiście błąd kwantyzacji jest zmienną losową, którą oznaczać będziemy B_d, o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Przyjmuje się [1], że błąd kwantyzacji ma równomierny rozkład prawdopodobieństwa tzn. rozkład o gęstości opisanej wzorem

$$f_{B_d}(b_d) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & \text{dla} \quad -\frac{1}{2}\Delta x \leqslant B_d \leqslant +\frac{1}{2}\Delta x \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych wartości błędu,} \end{cases} \tag{2}$$

gdzie Δx jest przedziałem (skokiem) kwantowania.
Wartość oczekiwana błędu kwantyzacji wynosi:

$$E(B_d) = m_{B_d} = \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{+\frac{1}{2}\Delta x} b_d \frac{1}{\Delta x}\, db_d = 0 \tag{3}$$

natomiast jego wariancja i odchylenie standardowe wynoszą odpowiednio

$$\sigma^2_{B_d} = E\left\{\left[B_d - E(B_d)\right]^2\right\} = \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{+\frac{1}{2}\Delta x} b_d^2 \frac{1}{\Delta x}\, db_d = \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \tag{4}$$

$$\sigma_{B_d} = \sqrt{\frac{1}{12}}\,\Delta x \tag{4a}$$

Traktując błąd B_d jako proces stochastyczny możemy wyznaczyć jego podstawowe charakterystyki probabilistyczne, tj. wartość oczekiwaną:

$$m_{B_d}(t) = E\left[B_d(t)\right] \tag{5}$$

oraz funkcję autokorelacji

$$K_{B_d}(i\,\Delta t) = E\left\{\left[B_d(t) - E(B_d(t))\right]\left[B_d(t+i\Delta t) - E(B_d(t + i\,\Delta t))\right]\right\} \tag{6}$$

Przyjmując, że $B_d(t)$ jest nieskorelowanym szumem o średniej równej zero dla funkcji autokorelacji mamy:

$$K_{B_d}(i\Delta t) = \begin{cases} \frac{1}{12}(\Delta x)^2 & \text{dla} \quad i = 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } i \end{cases} \tag{7}$$

Obliczymy teraz funkcję widmową gęstości mocy dokonując transformacji Fouriera na funkcji autokorelacji:

$$S_{B_d}(\omega) = 2\int_{+\infty}^{-\infty} K_{B_d}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cong 2\sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_{B_d}(i\,\Delta t)e^{j\omega i\,\Delta t}\,\Delta t \tag{8}$$

skąd dla $i=0$ mamy tylko jeden składnik sumy

$$S_{B_d}(\omega) = \frac{1}{6}(\Delta x)^2 \cdot \Delta t \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{\Delta t} \tag{9}$$

gdzie: Δt jest okresem próbkowania.

Jeżeli zakres C jednostek wielkości przetwarzanej odpowiada 2^N jednostkom arbitralnym (N-liczba bitów słowa wyjściowego) czyli

$$\Delta x = \frac{C}{2^N} \tag{10}$$

wówczas widmo gęstości mocy $S_{B_d}(\omega)$ można wyrazić w następujący sposób:

$$S_{B_d}(\omega) = \frac{\Delta t}{6}\frac{C^2}{2^{2N}} \qquad 0 < \omega \leqslant \frac{\pi}{\Delta t} \tag{11}$$

Można tutaj zauważyć, że widmo gęstości mocy będące funkcją okresu próbkowania Δt, zakresu C i liczby bitów słowa wyjściowego nie zależy od ω w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$ (w pozostałym przedziale wynosi zero). Z ostatniej zależności wynika również, że gęstość widmowa mocy błędu bezwzględnego szumu kwantyzacji maleje wykładniczo wraz ze wzrostem liczby bitów słowa wyjściowego dla ustalonego zakresu wielkości przetwarzanej i stałego okresu próbkowania.

3. Określenie i oszacowanie błędu względnego szumu kwantyzacji

W tym punkcie przedstawimy możliwość określenia błędu względnego szumu kwantyzacji będącego jedynie funkcją długości słowa wyjściowego przetwornika analogowo-cyfrowego. Biorąc pod uwagę zależność na funkcję widmową gęstości mocy

$$S_{B_d}(\omega, \Delta t, C) = \frac{\Delta t}{6}\frac{C^2}{2^{2N}} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{\Delta t} \tag{11a}$$

należy tak określić błąd, aby charakteryzował efekt wywołany skończoną długością słowa.

Błąd taki określimy wzorem:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{N=N_0}^{\infty} S_{B_d}(\omega, \Delta t, C)}{\sum_{N=1}^{\infty} S_{B_d}(\omega, \Delta t, C)} \tag{12}$$

Należy tu zaznaczyć, że wyrażenia w liczniku i mianowniku nie reprezentują mocy widma (sumowanie nie zachodzi po ω, a po N). Wyrażenia te przedstawiają odpowiednie sumy ciągów wartości funkcji gęstości mocy widma dla kolejnych długości słów. Mianownik zawiera sumę wszystkich wartości widma gęstości mocy począwszy od słowa 1-bitowego, aż do nieskończonej długości, licznik natomiast zawiera sumę takich wartości gęstości mocy począwszy od słowa określonej długości do nieskończonej długości.

Określony powyżej błąd maleje, gdy liczba bitów słowa się zwiększa, natomiast dla długości słowa równego 1 bit, tak zdefiniowany błąd wynosi 100%. Można więc zauważyć, że błąd ten jest ściśle związany z informacją o długości słowa wyjściowego przetwornika dokonującego konwersji analogowo-cyfrowej.

Wykorzystując zależności (11a) i (12) oraz kryterium całkowe zbieżności odpowiednich szeregów [4], błąd względny zdefiniowany powyżej można oszacować za pomocą nierówności:

$$\varepsilon \leqslant \frac{A \int_{N_0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}\, dn}{A \int_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}\, dn} \tag{13}$$

gdzie: $A = \frac{\Delta t}{6} C^2$.

Dokonując obliczeń powyższych całek otrzymuje się oszacowanie

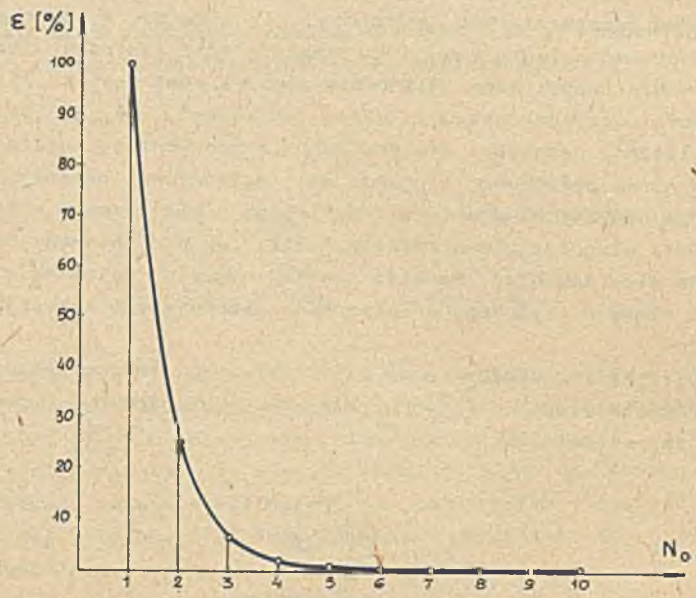
$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{2^{2N_0-2}} \tag{14}$$

Przyjmując kolejno długości słowa uzyskuje się z powyższej zależności następujące wyniki:

Tabela 1

Długość słowa No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Błąd wzgl. ε [%]	100	25	6,2500	1,5625,	0,3906	0,0976	0,0244	0,0061	0,0015	0,0004

Wyniki podane w tabeli 1 można też przedstawić na wykresie (rys. 2).



Rys. 2. Zależność błędu względnego szumu kwantyzacji od długości słowa wyjściowego

4. Uwagi i wnioski końcowe

W pracy przeanalizowano dwa rodzaje błędów szumu kwantyzacji błędu bezwzględnego, którego gęstość widmowa mocy, będąca funkcją okresu próbkowania i zakresu, maleje wykładniczo ze wzrostem długości słowa wyjściowego przetwornika analogowo-cyfrowego oraz wprowadzonego w pracy błędu względnego niezależnego od okresu próbkowania i zakresu również malejącego wykładniczo ze wzrostem długości słowa.

Z uwagi na niezależność ostatniego błędu od innych parametrów dokonano oszacowania tego błędu posługując się kryterium całkowym zbieżności szeregów.

Z obliczeń wynika, że tak przyjęty błąd względny wyrażony w procentach począwszy od długości słowa równej 5 bitów jest mniejszy od 1%. Z uwagi na fakt, że błąd ten jest związany z dużą ilością informacji o długości słowa wyjściowego, może być użyteczną miarą w szybkiej ocenie jakości przetworników dokonujących konwersji analogowo-cyfrowej.

LITERATURA

[1] Otnes R.K., Enochson L.: Analiza numeryczna szeregów czasowych, WNT, W-wa 1978.

[2] Bendat J.S., Piersol A.G.: Measurement and Analysis of Random Data, New York, Wiley 1966.

[3] Oliver B.M., Cage J.H.: Pomiary i przyrządy elektroniczne, WKŁ, W-wa 1978.

[4] Whittaker E.T., Watson G.N.: Kurs analizy współczesnej, PWN W-wa 1967.

Złożono w redakcji 10.07.80 r.
W formie ostatecznej 8.11.80 r.

Recenzent
Doc. dr inż. Jerzy Kopka

АНАЛИЗ ОШИБОК ШУМА КВАНТОВАНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДЛИНЫ ВЫХОДНОГО СЛОВА АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Р е з ю м е

В работе проанализированы два вида ошибок: абсолютные и относительные, вызванных шумом квантования. Сделано оценку относительной ошибки в зависимости от числа битов выходного слова аналого-цифрового преобразователя, используя интегральный критерий сходимости рядов. Результаты вычислений проилюстрировано графиком.

QUANTIZATION NOISE ERROR ANALYSIS DUE TO AN OUTBUT WORD LENGTH OF AN ANALOG-DIGITAL CONVERTER

S u m m a r y

Two kinds of errors: absolute and relative are analised. A relative error estimation formulated as a function of an A-D converter output word length bases on a series convergence integrating criterion. The calculations are illustrated in a graphical form.