ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: AUTOMATYKA z. 61 Nr kol. 701

Andrzej ORDYS

PORÓWNANIE STRATEGII STEROWANIA OPTYMALNEGO PRZY SUMACYJNYM I JEDNOKROKOWYM WSKAŹNIKU JAKOŚCI

Streszczenie. W pracy porównuje się pewne algorytmy sterowania statystycznie optymalnego. Zostaje wyprowadzony algorytm będący uogólnieniem algorytmu Aströma. Ten wyprowadzony algorytm jest porównywany z algorytmem sterowania przy sumacyjnym wskaźniku jakości. Rozważa się także przypadek sumacyjnego wskaźnika z opóźnieniem w obiekcie. Twierdzenie udowodnione w pracy podaje warunki równoważności sterowań przy sumacyjnym i jednokrokowym wskaźniku jakości.

1. Wstęp

Algorytm Aströma, znany z literatury, jest szczególnym przypadkiem algorytmu sterowania statystycznie optymalnego przy jednokrokowym wskaźniku jakości. Mianowicie takim, gdy obiekt sterowany posiada jedno wejście i jedno wyjście.

W pracach [4] i [5] pokazuje się, że algorytm Aströma można zapisać w przestrzeni stanów zamieniając transmitancję Z obiektu na równanie stanu.

Opierając się na tych wynikach w niniejszej pracy rozpatruje się od razu problem w przestrzeni stanów.

Dodatkowo we wskaźniku jakości uwzględnia się koszty sterowania.

Analiza w przestrzeni stanów jest bardzo wygodna dla porównania tego algorytmu z algorytmem przy sumacyjnym wskaźniku jakości.

2. Uogólniony algorytm Aströma

Rozważmy następujący problem sterowania statystycznie optymalnego: znaleźć funkcję $u_k(\overline{y_k})$ minimalizującą wskaźnik jakości:

$$J = E(x_{k+1}^T Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^T P_k u_k). \tag{1}$$

gdzie $\overline{y_k}$ oznacza wektor informacji o systemie dostępnej w chwili k. Q_{k+1}, P_k są macierzami dodatnio określonymi.

Przy ograniczeniu w postaci równania stanu:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \tag{2}$$

Stan obiektu (wektor x) nie jest dostępny pomiarowo, natomiast mierzony jest pewien inny wektor nazywany wektorem wyjść (y). Jest on związany z wektorem stanu relacją:

$$y_k = C_k x_k + v_k \tag{3}$$

w, v są wektorami zakłóceń, o których zakładamy, że są gaussowskimi białymi szumami. W skład wektora $\overline{y}_k$ wchodzi wektor y_k, wektor u_{k-1} oraz wektor oceny stanu $\hat{x}_{k-1}$.

Tak postawione zadanie rozwiązuje się w sposób standardowy podstawiając równanie stanu do wzoru na wskaźnik jakości i dokonując minimalizacji tak uzyskanego równania względem funkcji $u_k(\overline{y}_k)$:

$$J^{opt} = \underset{u_k(\overline{y}_k)}{\mathrm{Min}}\ E\Big[(x_k^T A_k^T + u_k^T B_k^T + w_k^T G_k^T) Q_{k+1} (A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k) +$$

$$+ u_k^T P_k u_k\Big] = E\ \underset{u_k}{\mathrm{Min}}\ E_{/\overline{y}_k} (x_k^T A_k^T Q_{k+1} A_k x_k + 2x_k^T A_k^T Q_{k+1} B_k u_k + \tag{4}$$

$$+ 2x_k^T A_k^T Q_{k+1} G_k w_k + 2u_k^T B_k^T Q_{k+1} G_k w_k + u_k^T B_k^T Q_{k+1} B_k u_k + u_k^T P_k u_k + w_k^T G_k^T Q_{k+1} G_k w_k)$$

gdzie $E_{/\overline{y}_k}$ oznacza uśrednianie warunkowe przy danym $\overline{y}_k$. Łatwo stwierdzić, że dzięki założonym własnościom zakłócenia w_k równanie to ulega uproszczeniu w następujący sposób:

$$J^{opt} = E\ \underset{u_k}{\mathrm{Min}}\ E_{/\overline{y}_k} (x_k^T A_k^T Q_{k+1} A_k x_k + 2x_k^T A_k^T Q_{k+1} B_k u_k + u_k^T B_k^T Q_{k+1} B_k u_k +$$

$$+ w_k^T G_k^T Q_{k+1} G_k w_k + u_k^T P_k u_k) \tag{5}$$

Następny krok to policzenie gradientu wskaźnika jakości względem u_k i przyrównanie go do zera:

$$E_{/\overline{y}_k} (2B_k^T Q_{k+1} A_k x_k) + 2B_k^T Q_{k+1} B_k u_k + 2P_k u_k = 0 \tag{6}$$

Stąd już bezpośrednio otrzymuje się wzór na sterowanie optymalne:

$$u_k = -(B_k^T Q_{k+1} B_k + P_k)^{-1} B_k^T Q_{k+1} A_k \hat{x}_k \tag{7}$$

gdzie przez $\hat{x}_k$ oznacza się ocenę stanu x_k:

$$\hat{x}_k = E_{/\bar{y}_k}(x_k) \tag{8}$$

Przedstawiona tu metoda postępowania opiera się na zasadzie minimalizacji i uśredniania [3] i jest analogiczna do procedur znanych z literatury [1].

Aby istniało sterowanie u_k musi być spełniony warunek, że macierz: $H = B_k^T Q_{k+1} B_k + P_k$ jest nieosobliwa. Zauważmy, że macierz P_k może być macierzą zerową. W takim szczególnym przypadku wzór na sterowanie optymalne przyjmie postać:

$$u_k = -(B_k^T Q_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T Q_{k+1} A_k \hat{x}_k \tag{9}$$

Jeśli dodatkowo założy się, że sterowany obiekt posiada jedno wejście i jedno wyjście (wektory u_k i y_k są jednowymiarowe) to algorytm opisany wzorem (9) staje się znanym z literatury liniowym regulatorem Aströma ([2] [4], [5]) to znaczy wzór (9) odpowiada wzorowi na sterowanie optymalne wyprowadzonemu przez Aströma przy pomocy transformacji Z. Jednakże ze względu na postać wskaźnika jakości (1) oraz sposób wyprowadzania wzoru (7) uzyskane rozwiązanie odpowiada algorytmowi Aströma tylko dla przypadku gdy transmitancja Z obiektu posiada opóźnienie jednostkowe. Problem ten będzie wyjaśniony dokładnie w dalszej części pracy. Zostaną również przedstawione algorytmy obowiązujące dla obiektu o dowolnym opóźnieniu.

Możliwe do zastosowania sposoby tworzenia równań stanu obiektu, gdy znana jest transmitancja Z, podane są w literaturze [4], [5]. W pozycji [4] dowodzi się, że wzór na sterowanie optymalne uzyskany w przestrzeni stanów jest równoważny algorytmowi Aströma.

3. Porównanie ze strategią o sumacyjnym wskaźniku jakości

Rozpatrzmy teraz problem sterowania statystycznie optymalnego, w którym wskaźnik jakości jest sumą wskaźników (1) dla k=1,...,N: Znaleźć ciąg funkcji $u_k(\bar{y}_k)$ minimalizujących wyrażenie:

$$J = E \sum_{k=1}^{N} (x_{k+1}^T Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^T P_k u_k) \tag{10}$$

Jest to problem klasyczny, rozwiązanie jego, doskonale znane z literatury (np. [1]), wyraża się wzorami:

$$u_k = -(B_k^T S_{k+1} B_k + P_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k \hat{x}_k \tag{11}$$

$$S_N = Q_N \tag{12}$$

$$S_k = Q_k + A_k^T \left[S_{k+1} - S_{k+1} B_k (B_k^T S_{k+1} B_k + P_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} \right] A_k \tag{13}$$

Wzór (11), opisujący sterowanie optymalne w tym przypadku, jest bardzo podobny do wyprowadzonego wcześniej wzoru (7). Jedyna różnica, to zastąpienie macierzy Q_{k+1} ze wzoru (7) przez macierz S_{k+1}, która jest elementem rekurencyjnego ciągu macierzy.

Wydaje się, że przyjęcie wskaźnika jakości opisanego wzorem (10) jest bardziej uzasadnione. Oznacza to bowiem, że interesujemy się całym przebiegiem procesu, tym, co będzie się dziać w przyszłości, a nie tylko chwilą bieżącą. Jeśli wyrażenie występujące we wskaźniku jakości interpretuje się jako pewne koszty, to algorytm (11) minimalizuje całkowity koszt procesu, natomiast algorytm (7) tylko koszt jednego kroku.

Z drugiej strony algorytm (7) jest znacznie prostszy pod względem obliczeniowym. Nie wymaga liczenia i pamiętania skomplikowanego ciągu macierzy S_k. W przypadku dużego wymiaru wektora stanu bardziej opłacalne może być stosowanie algorytmu (7). Należy jednak stwierdzić, jaką wartość przyjmie w tym przypadku wskaźnik jakości (10).

Przedstawione poniżej twierdzenie podaje warunki, przy których oba algorytmy są identyczne.

Twierdzenie 1

Założenia:

(1.) Wymiar wektora sterowania wynosi jeden.

(2.) Symetryczna macierz Q_k posiada tylko jeden element różny od zera $k=1,\dots,N$.

(3.) $B_k^T Q_{k+1} B_k \neq 0 \quad k=0,\dots,N-1.$

(4.) $B_k^T A_{k+1}^T Q_{k+2} A_{k+1} B_k \neq 0 \quad k=0,\dots,N-2$

(5.) Istnieje wektor Θ spełniający równanie:

$$B_k = A_k \Theta_k \qquad k=0,\dots,N-1$$

Teza:

$$u_k^1 = u_k^2 \iff P_k = 0 \qquad k=0,\dots,N-1.$$

gdzie u_k^1 i u_k^2 oznaczają funkcje optymalnego sterowania odpowiednio dla sumacyjnego i niesumacyjnego wskaźnika jakości. Dowód twierdzenia 1 znajduje się w Dodatku A.

Uwaga 1. Założenia Twierdzenia 1 są spełnione dla klasy obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu, w których minimalizuje się kwadrat sygnału wyjściowego uzupełniony ewentualnie o kwadrat sygnału wejściowego. Są to więc obiekty, do których stosuje się algorytm Aströma w jego klasycznej postaci.

Uwaga 2. Twierdzenie powyższe obowiązuje tylko dla takich obiektów, w których wymiar wektora sterowania wynosi jeden. Dla obiektów o większym wymiarze sterowania można natomiast sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2

Założenia:

(1.) Macierz $B_k^T Q_{k+1} B_k$ jest nieosobliwa $k=0,\dots,N-1$

(2.) Istnieje macierz Θ_k spełniająca równanie:

$$B_k = A_k\Theta_k \qquad k=0,\dots,N-1$$

i taka, że istnieje macierz nieosobliwa $\mathcal{H}_k$ spełniająca:

$$\Theta_k = B_k\mathcal{H}_k \qquad k=0,\dots,N-1$$

(3.) Istnieje nieosobliwa macierz D_k taka, że:

$$B_{k+1} = B_k D_k$$

(4.) $$P_k = 0 \qquad k=0,\dots,N-2$$

Teza:

$$u_k^1 = u_k^2$$

gdzie u_k^1 i u_k^2 oznaczają funkcje optymalnego sterowania odpowiednio dla sumacyjnego i niesumacyjnego wskaźnika jakości. Dowód Twierdzenia 2 znajduje się w Dodatku B.

Można podać następujący przykład obiektu spełniającego założenia Twierdzenia 2:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k + G_k w_k \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze Θ i $\mathcal{H}$ mają dla tego przypadku postać:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

D jest oczywiście macierzą jednostkową.
Jeśli przyjmie się w tym przypadku różną od zera macierz P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sterowania optymalne pozostają sobie równe ($u_k^1 = u_k^2$ k=0,...,N-1) mimo, że $S_k \neq 0$ ($k \neq N$).
Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 2 nie jest więc słuszne

$$(u_k^1 = u_k^2 \not\Rightarrow P_k = 0).$$

4. Uwzględnienie opóźnienia w obiekcie

Było już wspomniane wyżej, że omawiany algorytm sterowania (wzór (7) w pewnych warunkach staje się równoważny znanemu algorytmowi Aströma dla jednostkowego opóźnienia w obiekcie. Jest sprawą bardzo ważną podkreślenie, że wzór ten ma sens tylko dla opóźnienia jednostkowego. Wynika to z konstrukcji wskaźnika jakości (1):

$$J = E(x_{k+1}^T Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^T P_k u_k)$$

Jeśli struktura obiektu jest taka, że wartość stanu w chwili k (x_k) jest niezależna od sterowania w chwili poprzedniej (u_{k-1}) (opóźnienie większe od jednostkowego), to optymalna strategia staje się trywialna i nieużyteczna - należy przyjąć sterowanie równe zeru.

Można przekonać się, że faktycznie wzór (7) prowadzi do takiej wartości sterowania i dalej można przekonać się, że odpowiedzialny jest za to iloczyn macierzy $B_k^T Q_{k+1}$. jest on macierzą zerową. (Równanie stanu jest równaniem utworzonym w sposób podany w literaturze [5]).

Z powyższych uwag wynika, że w przypadku obiektu o opóźnieniu większym niż jednostkowe wskaźnik jakości opisany wzorem (1) nie ma sensu. Należy zastąpić go wskaźnikiem następującej postaci:

$$J = E(x_k^T Q_k x_k + u_{k-m}^T P_{k-m} u_{k-m}) \tag{14}$$

m - opóźnienie w obiekcie.

Ograniczenia w postaci równań stanu oraz wyjścia (wzory (2), (3) pozostają niezmienione. Tak postawiony problem sterowania optymalnego można rozwiązać w następujący sposób:
Formułuje się wtórny problem optymalizacji w postaci:

$$J^{opt} = E \min_{u_{k-m}} E_{/\bar{Y}_{k-m}} (x_k^T Q_k x_k + u_{k-m}^T P_{k-m} u_{k-m}) \tag{15}$$

Podstawia się równanie stanu do wzoru (15):

$$I = E_{/\bar{Y}_{k-m}} \Big[(A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1})^T Q_k (A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}) + u_{k-m}^T P_{k-m} u_{k-m}\Big] \tag{16}$$

Teraz następuje wymnożenie sum w nawiasach. Ponieważ iloczyn $B_{k-1}^T Q_k$ jest macierzą zerową, więc wszystkie składniki związane ze sterowaniem u_{k-1} zerują się. Oprócz tego część składników zeruje się ze względu na własności zakłócenia w_{k-1} (jest ono szumem białym gaussowskim). Pozostaje następujące wyrażenie:

$$I = E_{/\bar{Y}_{k-m}} (x_{k-1}^T A_{k-1}^T Q_k A_{k-1} x_{k-1} + u_{k-m}^T P_{k-m} u_{k-m} + w_{k-1}^T G_{k-1}^T Q_k G_{k-1} w_{k-1}) \tag{17}$$

Do równania (17) podstawia się ponownie równanie stanu. Również w tym przypadku wszystkie składniki związane ze sterowaniem u_{k-2} ulegną wyzerowaniu.

Postępowanie takie powtarza się aż do chwili k-m. Wtedy to wskaźnik jakości wyraża się wzorem:

$$I = E_{/\bar{Y}_{k-m}} (x_{k-m}^T A_{k-m}^T \bar{\bar{Q}}_k A_{k-m} x_{k-m} + 2u_{k-m}^T B_{k-m}^T \bar{\bar{Q}}_k A_{k-m} x_{k-m} + u_{k-m}^T B_{k-m}^T \bar{\bar{Q}}_k B_{k-m} u_{k-m} + D_k) \tag{18}$$

D_k jest tu składnikiem związanym z wariancją zakłócenia (od chwili k-m do chwili k).
$\bar{\bar{Q}}_k$ jest macierzą opisaną wzorem:

$$\bar{\bar{Q}}_k = A_{k-m+1}^T \dots A_{k-1}^T Q_k A_{k-1} \dots A_{k-m+1} \tag{19}$$

Teraz już iloczyn macierzy $B_{k-m}^T \bar{\bar{Q}}_k$ nie zeruje się. Minimalizacja wskaźnika (18) względem u_{k-m} daje wzór na sterowanie optymalne:

$$u_{k-m} = -(B_{k-m}^{T}\bar{\bar{Q}}_{k}B_{k-m} + P_{k-m})^{-1}B_{k-m}^{T}\bar{\bar{Q}}_{k}A_{k-m}\hat{x}_{k-m} \tag{20}$$

Wzór ten został zapisany w formie, która wskazuje na jego podobieństwo ze wzorem (7).

Dla przypadku jednowymiarowego wejścia i wyjścia z obiektu oraz wskaźnika jakości będącego kwadratem sygnału wyjściowego uzupełnionym ewentualnie o kwadrat sterowania algorytm ten jest równoważny algorytmowi Aströma, tym razem dla dowolnego opóźnienia w obiekcie.

Można jednak spodziewać się, że algorytm ten ma także zastosowanie dla innych przypadków - gdy opóźnienie wyobrazimy sobie jako kwestię zależności wskaźnika jakości od wektora sterowań poprzez równanie stanu.

O ile wskaźnik jakości (1) nie miał sensu dla opóźnień większych od jednostkowego, to wskaźnik jakości (10) zachowuje w tym przypadku swoją aktualność, jeśli tylko $N \gg m$. Wówczas po prostu m pierwszych wartości stanu okaże się niesterowalnych, natomiast m ostatnich sterowań niepotrzebnych (algorytm uczyni je równymi zeru). Bardziej eleganckim postawieniem problemu, omijającym te niedogodności, będzie jednak przyjęcie i w tym przypadku wskaźnika jakości o postaci:

$$J = E\sum_{k=m}^{N}(x_k^{T}Q_kx_k + u_{k-m}^{T}P_{k-m}u_{k-m}) \tag{21}$$

Przy wyprowadzaniu algorytmu sterowania optymalnego wykorzystuje się (tak jak powyżej - dla wskaźnika niesumacyjnego) zerowanie się iloczynów pewnych macierzy. Ponadto korzysta się z zasady programowania dynamicznego. Mianowicie rozwiązywanie rozpoczyna się od ostatniego kroku sterowania $k=N$. W tym kroku do zoptymalizowania pozostaje następujące wyrażenie:

$$T_N = E_{/\bar{Y}_{N-m}}(x_N^{T}Q_Nx_N + u_{N-m}^{T}P_{N-m}u_{N-m}) \tag{22}$$

Podstawienie równania stanu w miejsce x_N i uwzględnienie zerowej wartości przeciętnej zakłócenia daje:

$$\begin{aligned} T_N = E_{/\bar{Y}_{N-m}}(&x_{N-1}^{T}A_{N-1}^{T}Q_NA_{N-1}x_{N-1} + 2x_{N-1}^{T}A_{N-1}^{T}Q_NB_{N-1}u_{N-1} + \\ &+ u_{N-1}^{T}B_{N-1}^{T}Q_NB_{N-1}u_{N-1} + w_{N-1}^{T}G_{N-1}^{T}Q_NG_{N-1}w_{N-1} + u_{N-m}^{T}P_{N-m}u_{N-m} + \\ &+ 2u_{N-1}^{T}B_{N-1}^{T}Q_NG_{N-1}w_{N-1}) \end{aligned} \tag{23}$$

Poprzednio było już wyjaśniane, że iloczyn macierzy $B^T_{N-1}Q_N$ jest macierzą zerową. W związku z tym znikają we wzorze (23) wszystkie składniki związane ze sterowaniem u_{N-1}.

Do wzoru (23) należy ponownie podstawić równanie stanu i ponownie pewne składniki ulegną wyzerowaniu. Postępowanie jest na razie identyczne jak przy wyprowadzaniu wzoru dla niesumacyjnego wskaźnika jakości i kończy się również w momencie gdy z podstawienia równania stanu wyniknie jawnie zależność od u_{N-m}. Sterowanie optymalne w ostatnim kroku będzie więc wyrażać się wzorem:

$$u_{N-m} = -(B^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N B_{N-m} + P_{N-m})^{-1} B^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N A_{N-m}\hat{x}_{N-m} \tag{24}$$

$\bar{\bar{Q}}_N$ jest określone tak jak poprzednio (wzór(19)).

Ocenę $\hat{x}_{N-m}$ mozna przedstawić w postaci:

$$\hat{x}_{N-m} = x_{N-m} - \tilde{x}_{N-m} \tag{25}$$

$\tilde{x}_{N-m}$ błąd oceny.

Teraz należy wyprowadzony wzór (24) podstawić do równania wskaźnika jakości z uwzględnieniem wzoru (25):

$$\begin{aligned} J_N = E_{/\bar{y}_{N-m}} \Big[& x^T_{N-m}A^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N A_{N-m}x_{N-m} - 2(x_{N-m} - \tilde{x}_{N-m})^T A^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N B_{N-m} \cdot \\ & \cdot (B^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N B_{N-m} + P_{N-m})^{-1}\bar{\bar{Q}}_N A_{N-m}x_{N-m} + (x_{N-m} - \tilde{x}_{N-m})^T A^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N B_{N-m} \cdot \\ & \cdot (B^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N B_{N-m} + P_{N-m})^{-1} B^T_{N-m}\bar{\bar{Q}}_N A_{N-m}(x_{N-m} - \tilde{x}_{N-m}) + D_N \Big] \end{aligned} \tag{26}$$

D_N - składnik związany z wariancją zakłócenia.

Widać teraz wyraźnie, że sposób postępowania jest tu identyczny jak przy wyprowadzaniu klasycznego algorytmu sterowania optymalnego przy sumacyjnym wskaźniku jakości (wzór (11)), doskonale znanego z literatury (np. [1]). Jedynie zamiast macierzy Q_N występuje macierz $\bar{\bar{Q}}_N$ zdefiniowana zależnością (19). Ze względu na to podobieństwo łatwo jest przewidzieć rezultat obliczeń. W związku z tym żmudne przekształcenia prowadzące do końcowego wzoru zostaną pominięte. W oparciu o wzór (11) można napisać wzór na sterowanie optymalne w tym przypadku:

$$u_{i-m} = -(B^T_{i-m}\bar{\bar{S}}_i B_{i-m} + P_{i-m})^{-1} B^T_{i-m}\bar{\bar{S}}_i A_{i-m}\hat{x}_{i-m} \tag{27}$$

$i = m,\dots,N$

Gdzie $\bar{\bar{S}}_i$ jest ciągiem macierzy zdefiniowanym następująco:

$$\bar{\bar{S}}_N = \bar{\bar{Q}}_N \tag{28}$$

$$\bar{\bar{S}}_i = \bar{\bar{Q}}_i + A^T_{i-m+1}\Big[\bar{\bar{S}}_{i+1} - \bar{\bar{S}}_{i+1}B_{i-m+1}(B^T_{i-m+1}\bar{\bar{S}}_{i+1}B_{i-m+1} + P_{i-m+1})^{-1}B^T_{i-m+1}\bar{\bar{S}}_{i+1}\Big]A_{i-m+1} \tag{29}$$

Teraz można dokonać porównania dwóch strategii sterowania podobnie jak było to zrobione dla przypadku opóźnienia jednostkowego. Nie ma tu zastosowania Twierdzenie 1, nawet gdy rozpatruje się obiekty o jednym wejściu i jednym wyjściu. Wynika to stąd, że macierz Q posiadająca w takim przypadku tylko jeden element różny od zera została zastąpiona macierzą $\bar{\bar{Q}}$ o zupełnie innej strukturze (co wynika ze wzoru (19)).

Natomiast może być używane w tym przypadku Twierdzenie 2.

5. Zakończenie

Opis obiektu w postaci równań stanu pozwolił na podanie w jednolitej formie wzorów na sterowanie optymalne obowiązujących dla rozpatrywanych strategii sterowania. Dzięki temu możliwe było łatwe porównanie tych strategii. W porównaniu z klasyczną postacią algorytmu Aströma zapis taki charakteryzuje się tym, że część obliczeń przerzuca się na algorytm wyznaczania oceny stanu. Jeśli zakłócenia w i v w równaniach obiektu (wzory (2) i (3)) są wzajemnie niezależne, to ocenę stanu można wyznaczyć przy pomocy filtru Kalmana [1].

W niniejszej pracy problemy związane z wyznaczeniem ocen nie są rozpatrywane.

Praca niniejsza jest streszczeniem z pewną modyfikacją części rezultatów pracy magisterskiej napisanej pod kierunkiem prof. R. Gessinga i z Jego inspiracji.

Pragnę podziękować prof. Gessingowi także za krytyczne uwagi i konsultacje bardzo pomocne przy pisaniu tej publikacji.

Dodatek A: Dowód Twierdzenia 1

1. Warunek konieczny $(u^1_k = u^2_k \Rightarrow P_k = 0)$

$$(B^T_kQ_{k+1}B_k + P_k)^{-1}B^T_kQ_{k+1}A_k\hat{x}_k = (B^T_kS_{k+1}B_k + P_k)^{-1}B^T_kS_{k+1}A_k\hat{x}_k$$

Równość ta ma być spełniona dla dowolnego wektora $\hat{x}_k$. Jako wektor $\hat{x}_k$ przyjmijmy więc wektor Θ z założenia (5.).

Otrzymujemy:

$$(B_k^T Q_{k+1} B_k + P_k)^{-1} B_k^T Q_{k+1} B_k = (B_k^T S_{k+1} B_k + P_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} B_k$$

Niech R i Z oznaczają odpowiednio liczby:

$$R = B_k^T Q_{k+1} B_k$$

$$Z = B_k^T S_{k+1} B_k$$

Wówczas można napisać:

$$\frac{R}{R+P_k} = \frac{Z}{Z+P_k}$$

Stąd wynika, że: $P_k = 0$ lub $R = Z$.
Zajmijmy się tą drugą ewentualnością. Po uwzględnieniu równania Riccatiego dla wyznaczenia S_{k+1} otrzymujemy równanie:

$$B_k^T A_{k+1}^T \left[S_{k+2} - S_{k+2} B_{k+1} (B_{k+1}^T S_{k+2} B_{k+1} + P_{k+1})^{-1} B_{k+1}^T S_{k+2} \right] A_{k+1} B_k = 0$$

Dla $k = N-2$, ponieważ $S_N = Q_N$, mamy:

$$B_{N-2}^T A_{N-1}^T \left[Q_N - Q_N B_{N-1} (B_{N-1}^T Q_N B_{N-1} + P_{N-1})^{-1} B_{N-1}^T Q_N \right] A_{N-1} B_{N-2} = 0$$

Macierz, która powstaje przez wykonanie działań w nawiasie kwadratowym w ostatnim wzorze ma taką samą strukturę jak macierz Q_N. (Ma tylko jeden element różny od zera). Z założenia (4) wynika więc, że równość powyższa będzie spełniona tylko wtedy, gdy macierz w nawiasie kwadratowym będzie macierzą zerową. To zaś może mieć miejsce tylko gdy $P_{N-1} = 0$. (Dokładniejsze rozumowanie ilustrujące ten fakt jest przeprowadzone przy dowodzie warunku wystarczającego). Z dowodu warunku wystarczającego wynika, że dla $P_{N-1} = 0$ $S_{N-1} = Q_{N-1}$. W związku z tym całe rozumowanie można powtórzyć dla wcześniejszej chwili $k = N-3$. Postępując w ten sposób dochodzimy do wniosku, że musi być:

$$P_k = 0 \qquad k = 0,\dots,N-1$$

2. Warunek wystarczający $(P_k = 0 \Rightarrow u_k^1 = u_k^2)$

$$u_k^1 = -(B_k^T S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k \hat{x}_k$$

$$u_k^2 = -(B_k^T Q_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T Q_{k+1} A_k \hat{x}_k$$

Wykażemy, że $S_k = Q_k = 1,\dots,N$.

Dowód indukcyjny:

a) $k = N \quad S_N = Q_N$ (warunek startowy równania Riccatiego)

b) załóżmy, że $S_{k+1} = Q_{k+1}$

$$S_k = Q_k + A_k^T\left[Q_{k+1} - Q'_{k+1} B_k (B_k^T Q_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T Q_{k+1}\right] A_k$$

$Q_{k+1} B_k$ jest to wektor posiadający jeden element różny od zera $-\ b_i q_{ii}$ (wynika to z założeń (1.), (2.))

$B_k^T Q_{k+1}$ jest wektorem do niego transponowanym.

$B_k^T Q_{k+1} B_k$ jest liczbą o wartości $b_i^2 q_{ii}$, gdzie q_{ii} oznacza różny od zera element macierzy Q_{k+1}, b_i - element na i-tej pozycji w wektorze B_k.

W związku z tym zachodzi:

$$Q_{k+1} B_k B_k^T Q_{k+1} (B_k^T Q_{k+1} B_k)^{-1} = Q_{k+1}$$

Stąd wynika już bezpośrednio, że $S_k = Q_k$.

W ten sposób dowód został zakończony.

Dodatek B: Dowód Twierdzenia 2

$$u_k^1 = -(B_k^T S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k \hat{x}_k$$

$$u_k^2 = -(B_k^T Q_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T Q_{k+1} A_k \hat{x}_k$$

Wykażemy, że $B_k^T S_{k+1} = B_k^T Q_{k+1}$.

Dowód indukcyjny:

a) dla $k = N-1 \quad S_N = Q_N$ (warunek startowy równania Riccatiego)

b) załóżmy, że $B_k^T S_{k+1} = B_k^T Q_{k+1}$

$$B_{k-1}^T S_k = B_{k-1}^T Q_k + B_{k-1}^T A_k^T\left[S_{k+1} - S_{k+1} B_k (B_k^T S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T S_{k+1}\right] A_k$$

Po uwzględnieniu założeń (2.), (3.) można napisać:

$$B_{k-1}^T S_k = B_{k-1}^T Q_k + (X_k^T D_{k-1}^T)^{-1}\left[B_k^T Q_{k+1} - B_k^T Q_{k+1} B_k (B_k^T Q_{k+1} B_k)^{-1} B_k Q_{k+1}\right] A_k = B_{k-1}^T Q_k$$

q.e.d.

LITERATURA

[1] Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych. WNT, Warszawa 1975.

[2] Aström K.I.: Introduction to Stochastic Control Theory. Ac. Press NY - London 1970.

[3] Gessing R.: Uogólniona zasada stochastycznej równoważności i jej zastosowania. Arch. Aut. i Telem. z. 4, 1977.

[4] Waston W.: Box, Jenkins - Aström and Kalman Linear Control Laws and Their Equivalence. Proc. IEE No 4, 1976.

[5] Caines P.E.: Relationship Between Box, Jenkins - Aström Control and Kalman Linear Regulator. Proc. IEE No 5, 1972.

Złożono w redakcji 19.11.80 r.
W formie ostatecznej 25.02.81 r.

Recenzent
Prof. dr hab. inż. Ryszard Gessing

СРАВНЕНИЕ СТРАТЕГИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СУММАРНЫМ И ОДНОШАГОВЫМ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА

Р е з ю м е

В работе сравнивается некоторые алгоритмы статистически оптимального управления. Выводится алгоритм являющийся обобщением алгоритма Аштрома. Выведенный алгоритм сравнивается с алгоритмом управления при суммарным критерию качества. Рассматривается тоже случай суммарного критерия качества с задержкой в объекте. Доказанная в работе теорема определяет условия эквивалентности управлений при суммарным и одношаговым критерию качества.

A COMPARISON OF OPTIMAL CONTROL STRATEGIES WITH SUMMARIZED AND ONE-STEP-AHEAD PERFORMANCE INDICES

S u m m a r y

Algoritms of statistical optimal control are being compared in the paper. A generalization of Aström alghoritm has been worked out. This alghoritm is compared to the control alghoritm with a summarized performance index. The case of a summarized performance index with a delay in object is also concerned. The theorem proved in the paper gives conditions of equivalence of controls for both summarized and one-step-ahead performance indices.