

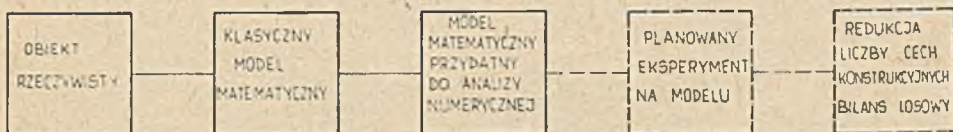
Bożena PALUCHIEWICZ

MODELE MATEMATYCZNE DWUFAZOWEGO ASYNCHRONICZNEGO SILNIKA  
WYKONAWCZEGO PRZYDATNE DO ANALIZY NUMERYCZNEJ

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono przekształcenie klasycznego modelu matematycznego dwufazowego asynchronicznego silnika wykonawczego do postaci umożliwiającej analizę numeryczną oraz przykład liczbowy. Jest to pierwszy etap rozwiązywania zagadnienia syntezy konstrukcji silnika. Analiza numeryczna prowadzona jest przy zastosowaniu wyspecjalizowanego języka do modelowania układów ciągłych na maszynie cyfrowej. Przykład obliczony jest dla modeli matematycznych, w których zmienną niezależną jest w jednym przypadku prąd i płynący w uzwojeniach, a w drugim przypadku liniozwoje  $\psi$ .

1. Wstęp

Zadanie syntezy konstrukcji elektromechanicznych przetworników energii polega na znalezieniu związków między konstrukcją przetwornika a właściwościami dynamiki. Tak rozumiana synteza pozwala na wyznaczenie najlepszych wg pewnego przyjętego kryterium cech konstrukcyjnych przetwornika przy wymaganych właściwościach dynamicznych i ograniczeniach technologicznych. Proponowana metodyka syntezy składa się z kilku etapów, z których schemat pierwszego - modelowanie matematyczne przedstawiony został na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy pierwszego etapu syntezy

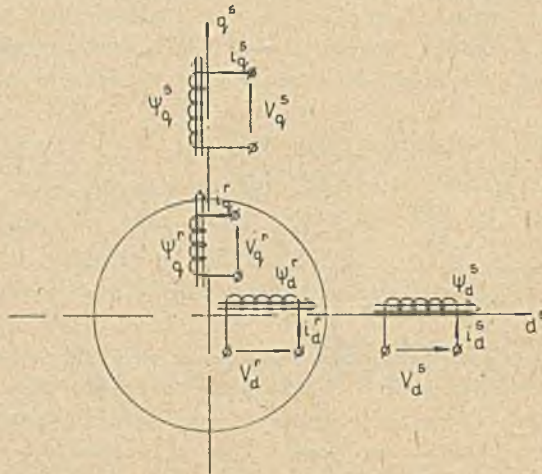
Użyteczny do celów syntezy model matematyczny obiektu powstaje w oparciu o obserwacje zebrane bądź w czasie jego normalnej pracy (eksperyment bierny), bądź w trakcie pracy przy określonej zmianie pewnych jego cech (eksperyment czynny). Obiektem jest w tym przypadku dwufazowy asynchroniczny silnik wykonawczy z wirnikiem puszgowym. Eksperyment bierny jest nieprzydatny [1, 2] do budowy takiego modelu. Prowadzenie zaś eksperymentu czynnego na rzeczywistym silniku jest praktycznie niemożliwe. Wiąże się

ono bowiem z budową dużej liczby (kilkudziesięciu) maszyn o różnych cechach konstrukcyjnych. Wykorzystano więc metodę eksperymentu maszynowego.

W pracach prowadzonych między innymi w Moskiewskim Instytucie Energetycznym, Moskiewskim Instytucie Lotnictwa i Instytucie Automatyki Politechniki Śląskiej [2, 3, 4, 5] zaproponowano metodę badania obiektu drogą prowadzenia eksperymentu nie na obiekcie rzeczywistym, a na jego modelu matematycznym na maszynie matematycznej. Wymagane jest więc przekształcenie znanego w literaturze klasycznego modelu matematycznego do postaci przydatnej do analizy oraz wybór metody analizy. Rozwiązaniu właśnie tych problemów poświęcony jest niniejszy artykuł. Przedstawiony jest w nim model i analiza dwufazowego asynchronicznego silnika wykonawczego z wirnikiem puszковым (DAS) na przykładzie silnika typu SAK-2A [9].

## 2. Model klasyczny

Równania opisujące zjawiska przetwarzania energii w dwufazowych maszynach asynchronicznych stanowią układ nieliniowych równań różniczkowych niestacjonarnych [6, 7]. Współczynnikami w tych równaniach są tzw. parametry elektryczne - indukcyjności i rezystancje. Równania te dla silnika przedstawionego na rysunku 2 powstają po przyjęciu szeregu założeń upraszczających [6] i można je przy pomocy transformacji Stanley'a sprowadzić do postaci układu równań o stałych współczynnikach.



Rys. 2. Schemat ideowy dwufazowej maszyny asynchronicznej



Klasyczny model DAS w zależności od przyjęcia prądu bądź liniozwoi za zmienną niezależną ma następujące postaci:

- gdy zmienną niezależną jest prąd "i"

$$v_d^s = R^s i_d^s + L^s \frac{di_d^s}{dt} + L^{sr} \frac{di_d^r}{dt}$$

$$v_q^s = R^s i_q^s + L^s \frac{di_q^s}{dt} + L^{sr} \frac{di_q^r}{dt}$$

$$0 = L^{sr} \frac{di_d^s}{dt} + pL^{sr}\omega^r i_q^s + R^r i_d^r + L^r \frac{di_d^r}{dt} + pL^r\omega^r i_q^r \quad (1)$$

$$0 = -L^{sr}p\omega^r i_d^s + L^{sr} \frac{di_q^s}{dt} - pL^r\omega^r i_d^r + R^r i_q^r + L^r \frac{di_q^r}{dt}$$

$$M = J \frac{d\omega^r}{dt} - pL^{sr} (i_d^r i_q^s - i_q^r i_d^s)$$

- gdy zmienną niezależną są liniozwoje "ψ"

$$v_d^s = \frac{L^r R^s}{m} \psi_d^s + \frac{d\psi_d^s}{dt} - \frac{L^{sr} R^s}{m} \psi_d^r$$

$$v_q^s = \frac{L^r R^s}{m} \psi_q^s + \frac{d\psi_q^s}{dt} - \frac{L^{sr} R^s}{m} \psi_q^r$$

$$0 = -\frac{L^{sr} R^r}{m} \psi_q^s + \frac{L^s R^r}{m} \psi_d^r + \frac{d\psi_d^r}{dt} + p\omega^r \psi_q^r \quad (2)$$

$$0 = -\frac{L^{sr} R^s}{m} \psi_q^s - p\omega^r \psi_d^r + \frac{L^s R^r}{m} \psi_q^r + \frac{d\psi_q^r}{dt}$$

$$M = J \frac{d\omega^r}{dt} - \frac{pL^{sr}}{m} (\psi_d^r \psi_q^s - \psi_q^r \psi_d^s)$$

gdzie:

- ψ - liniozwoje,
- i, v - prąd i napięcie elektryczne,
- ω<sup>r</sup> - prędkość kątowna wirnika,
- p - liczba par biegunów,
- L - indukcyjność,
- R - rezystancja,

- $M_e$  - moment elektromagnetyczny,  
 $J$  - moment bezwładności wirnika,  
 $M$  - moment obrotowy doprowadzony z zewnątrz,  
 $m = L^s L^r - (L^{sr})^2$

indeksy górne:

- $s$  - stojan,  
 $r$  - wirnik,

indeksy dolne:

- $q$  - uzwojenie DAS w osi  $q$ ,  
 $d$  - uzwojenie DAS w osi  $d$ .

Każdy ze współczynników występujących w układach równań (1) i (2) można przedstawić przy pomocy cech konstrukcyjnych silnika takich jak: długość szczeliny, wirnika i stojana, grubość puszkii wirnika itd. Zmieniając odpowiednio cechy konstrukcyjne zmienia się wartości współczynników równań. Analiza równań pozwala zaś na określenie wpływu tych cech konstrukcyjnych na wybrane właściwości dynamiki.

### 3. Metody analizy modelu

Analizę modelu matematycznego DAS można przeprowadzić między innymi następującymi metodami:

- modelując równania na maszynie analogowej,
- rozwiązując układ równań różniczkowych jedną z metod numerycznych na maszynie cyfrowej,
- wykorzystując wyspecjalizowane języki do modelowania układów ciągłych na maszynie cyfrowej.

Wybór jednej z tych metod jako narzędzia analizy zależy przede wszystkim od celu jaki w zadaniu został postawiony jak również od możliwości jakimi dysponuje prowadzący badania. Wydaje się, że najbardziej racjonalną metodą prowadzenia eksperymentu maszynowego jest wykorzystanie wyspecjalizowanego języka do modelowania układów ciągłych. Do opracowania przykładu posłużono się językiem X3AB [8]. Język ten przeznaczony jest do analizy układów określonych schematami blokowymi podobnymi do stosowanych w modelowaniu na maszynie analogowej. Modeluje on SUMR - sumatory, MULT - multiplikatory, INTG - integratory, NEG - negacje oraz funkcje SINE - sinus i COSN - cosinus.

W pierwszym rzędzie należało więc przekształcić układy równań (1) i (2) do postaci dogodnej do modelowania a następnie zbudować schemat blokowy reprezentujący każdy z układów równań.



3.1. Model przydatny do analizy numerycznej

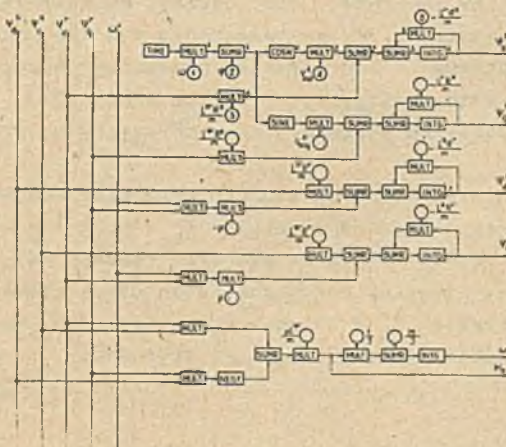
Najbardziej dogodną do modelowania w języku X3AB postacią równań różniczkowych jest przedstawienie ich w postaci układu równań różniczkowych 1-go rzędu (równań stanu). Przykładowo przekazany został układ równań (2) do postaci (2') a zbudowany na jego podstawie schemat blokowy przedstawia rysunek 3

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_d^s}{dt} &= v_d^s - \frac{L^r R^s}{m} \psi_d^s + \frac{L^{sr} R^s}{m} \psi_d^r \\ \frac{d\psi_q^s}{dt} &= v_q^s - \frac{L^r R^s}{m} \psi_q^s + \frac{L^{sr} R^s}{m} \psi_q^r \\ \frac{d\psi_d^r}{dt} &= \frac{L^{sr} R^r}{m} \psi_d^s - \frac{L^s R^r}{m} \psi_d^r - p\omega^r \psi_q^r \\ \frac{d\psi_q^r}{dt} &= \frac{L^{sr} R^r}{m} \psi_q^s + p\omega^r \psi_d^r - \frac{L^s R^r}{m} \psi_q^r \\ \frac{d\omega^r}{dt} &= \frac{M}{J} + \frac{pL^s R^r}{Jm} (\psi_d^r \psi_q^s - \psi_q^r \psi_d^s) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$v_q^s = v_{mq}^s \sin \omega t$  - napięcie wzbudzenia

$v_d^s = v_{md}^s \cos \omega t$  - napięcie sterowania.



Rys. 3. Schemat blokowy układu równań (2')

Na schemacie występują bloki określające funkcję wg której obliczany jest wynik. Specjalna instrukcja pozwala na powtarzanie obliczeń dla różnych zestawów danych przy niezmienionym schemacie blokowym. Wyniki można wyprowadzać w postaci wykresów i tablic. Poniżej przytoczony został fragment programu (obliczenie  $\psi_d^s$ ) napisany w języku X3AB na podstawie schematu blokowego z rysunku 3.

```
COMMENT DASW PSI
PATCH DATA
MULT 1 TIME 0 CONS 1
SUMR 1 MULT 1 CONS 2
COSN 1 SUMR 1
MULT 2 COSN 1 CONS 4
MULT 4 INTG 2 CONS 3
SUMR 2 MULT 2 MULT 4
MULT 3 INTG 1 CONS 5
SUMR 3 SUMR 2 MULT 3
INTG 1 SUMR 3
```

} umożliwia wygenerowanie funkcji  $v_{md}^s \cos \omega t$

} umożliwia obliczenie wartości  $\psi_d^s$

#### 4. Analiza pracy DAS

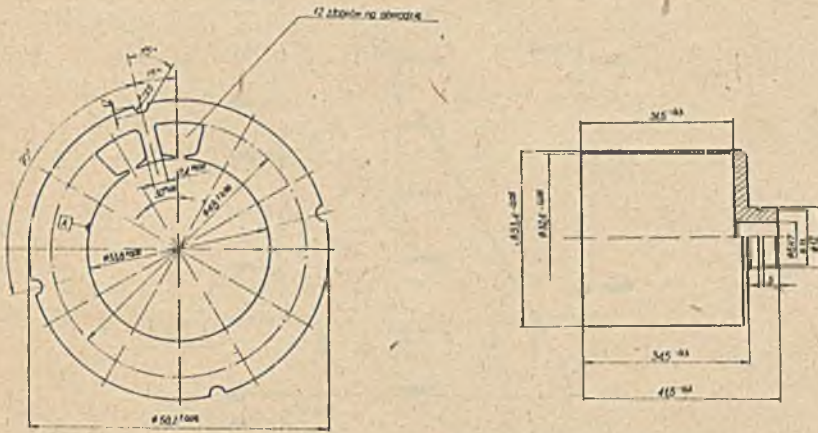
##### 4.1. Przykład

Dany jest dwufazowy asynchroniczny silnik wykonawczy z wirnikiem puszkowym typu SAK-2A, którego budowę przedstawia rysunek 4, o następujących parametrach znamionowych  $U = 20/20$  V/V,  $f = 400$  Hz,  $P = 0,6$  W,  $I = 0,5$  A,  $z = 300$ ,  $p = 3$ . Obliczone z danych cech konstrukcyjnych parametry elektryczne [6, 11] mają wartości:  $L^r = 0,766 \cdot 10^{-2}$  H,  $R^r = 0,125 \cdot 10^2 \Omega$ ,  $L^s = 0,147 \cdot 10^{-1}$  H,  $R^s = 0,331 \cdot 10^1 \Omega$ ,  $L^{sr} = 0,752 \cdot 10^{-2}$  H, a moment bezwładności  $J = 0,169 \cdot 10^{-5}$  Nms<sup>2</sup>. Wielkościami wyjściowymi są prędkość kątowna  $\omega^r(t)$  i moment  $M_e(t)$  po załączeniu silnika przy biegu jałowym i obciążeniu znamionowym, a ich przebieg przedstawiony jest na rys. 5.

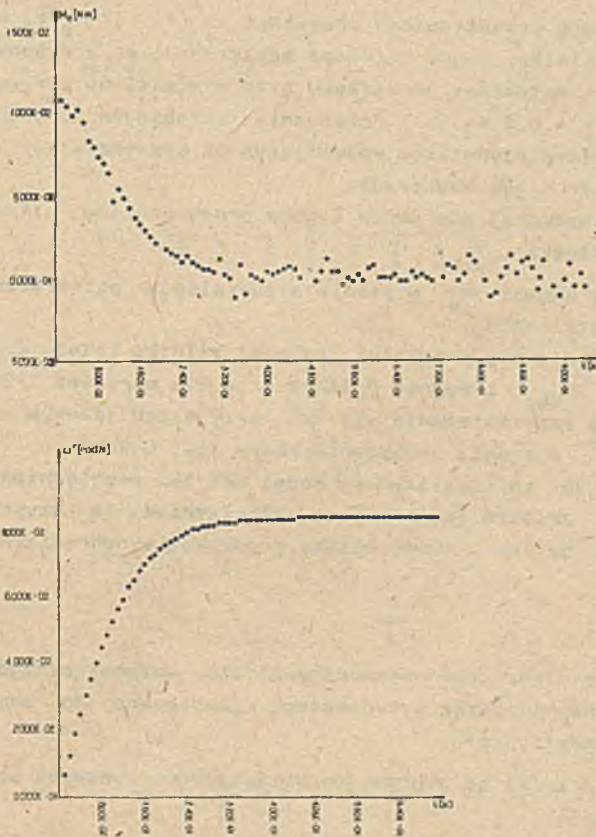
Do przeprowadzenia analizy wykorzystano model (2'), odpowiadający mu schemat przedstawiony na rysunku 3 oraz opisujący go program w języku X3AB.

W celu uzyskania wartości ustalonych prędkości kątowej i momentu obliczenia zostały przeprowadzone w czasie  $T_L = 0,7$ s ( $T_L$  - czas liczenia) z wydrukiem  $\omega T_w = 0,01$ s ( $T_w$  - krok wydruku) (rysunek 5a). Ponieważ na rysunku tym nie jest widoczny początkowy stan nieustalony wykonano dodatkowe obliczenia w czasie  $T_L = 20$  ms z wydrukiem  $\omega T_w = 0,5$  ms (rysunek 5b), ale i wówczas przebiegi momentu są mało czytelne.

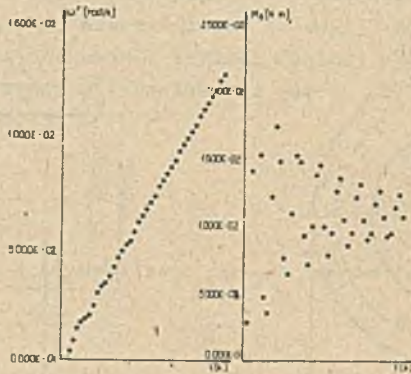




Rys. 4. Schemat stojana i puszkii silnika SAK-2A



Rys. 5a. Przebiegi  $\omega^r(t)$  i  $M_e(t)$  dla biegu jałowego silnika  
 $T_l = 0,7$  s,  $T_w = 0,01$  s



Rys. 5b. Przebiegi  $\omega^r(t)$  i  $M_e(t)$  dla biegu jałowego silnika  
 $T_1 = 20$  ms,  $T_w = 0,5$  ms

Na rysunku 6 przedstawiono przebiegi  $\omega^r(t)$  i  $M_e(t)$  przy znamionowym obciążeniu silnika. Stany ustalone odczytywane są z rysunku 6a ( $T_1 = 0,7$  s,  $T_w = 0,01$  s), natomiast początkowy stan nieustalony z rysunku 6b ( $T_1 = 7,2$  ms,  $T_w = 0,1$  ms). Z porównania przebiegów z rysunków 5b i 6b widać jak istotnym czynnikiem wpływającym na przejrzystość wyników jest właściwy dobór kroku drukowania.

Z przeprowadzonej dla dwóch stanów pracy analizy silnika wynikają następujące wnioski:

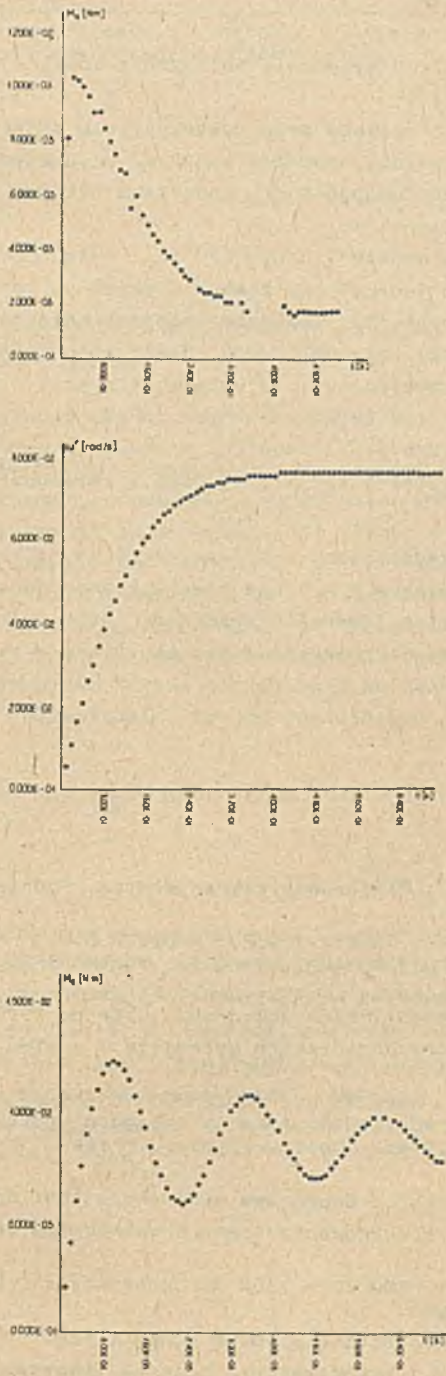
- maksymalny moment  $M_e$  w stanie nieustalonym przekracza kilkakrotnie wartość ustaloną  $M_e$ ,
- czas ustalenia się prędkości kątowej silnika zależy od obciążenia znamionowego  $M_{obc}$  i wynosi 0,33464 s (a dla wartości  $1/2 M_{obc}$  - 0,33424 s) a względny czas ustalania się  $\omega^r$  przy biegu jałowym do czasu ustalenia się  $\omega^r$  w stanie obciążenia równy jest 0,9053,
- ponieważ jest to idealizowany model DAS bez uwzględnienia tarcia i przy przyjęciu założeń [6] nie jest zaskoczeniem, że uzyskana prędkość kątowa (rys. 5a) ma wartość bliską prędkości synchronicznej.

#### 4.2. Wnioski

Dokonując oceny zaproponowanego modelu matematycznego dwufazowego asynchronicznego silnika wykonawczego przydatnego do analizy numerycznej można stwierdzić, że:

- modele (1) i (2) są wygodne do obliczeń numerycznych przy wykorzystaniu języka X3AB,





Rys. 6. Przebiegi  $\omega^r(t)$  i  $M_e(t)$  przy znamionowym obciążeniu silnika  
 a -  $T_1 = 0,7$  s,  $T_w = 0,01$  s, b -  $T_1 = 7,2$  ms,  $T_w = 0,1$  ms

- język X3AB umożliwia wykonanie obliczeń z dowolną zadaną przez użytkownika dokładnością,
- wyniki obliczeń otrzymane przy wykorzystaniu modelu (1) i (2) porównano w celu kontroli między sobą i z wynikami uzyskanymi z rozwiązania układów równań metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu i stwierdzono praktyczną identyczność wyników,
- kryterium wyboru modelu (1) czy (2) jest celem postawionego zadania. Jeżeli stanowią go jedynie np. moment i prędkość kątowna, to bardziej ekonomiczny jest model (2) (wymagana mniejsza objętość pamięci i prawie 2-krotnie mniejszy czas obliczeń). Jeśli natomiast ważne są również wartości prądów w uzwojeniach, to należy korzystać z modelu (1),
- dodatkową zaletą tak skonstruowanego modelu z programem jest to, że uzyskuje się graficzną postać wyników w dowolnie wybranej skali czasu umożliwiającą czytelną kształt rysunku w zależności od wymagań użytkownika.

Reasumując, przedstawiony model matematyczny i program jest prostym narzędziem pozwalającym w krótkim czasie przeprowadzić wszechstronną analizę pracy DAS. Należy jednak przypomnieć, że model i program są etapem pośrednim na drodze do zaproponowania użytecznego do celów syntezy modelu silnika i będą służyć do prowadzenia eksperymentu maszynowego. Następny etap budowy modelu użytecznego został przedstawiony w [10].

#### LITERATURA

- [1] Kacprzyński B.: Planowanie eksperymentów. Podstawy matematyczne WNT, Warszawa 1974.
- [2] Ivobotenko B.A., Ilinskij N.F., Kopyłow J.P.: Płanirovanie eksperimenta v elektromechanike. Energija. Moskwa 1975.
- [3] Marecki F.: Metodyka syntezy dynamiki dwufazowego holonomicznego silnika indukcyjnego. Praca doktorska. Gliwice 1975.
- [4] Modeli elektromechaniczeskich ustrojstw i sistem v zadacach sinteza. Elektricestwo nr 3, s. 36-40, 1973.
- [5] Kowalowski H., Marecki F., Sobień J.: Osobliwości badania układów dynamicznych metodą modelowania cyfrowego w zastosowaniu do automatyzacji prac projektowo-konstrukcyjnych. Prace VI KKA, t. 1, s. 595, Poznań 1974.
- [6] Habiger E.: Silniki dwufazowe wykonawcze, WNT Warszawa 1977.
- [7] Kopyłow I.P.: Elektromechaniczne przetworniki energii. PWN, Warszawa 1978.
- [8] Instrukcja X3AB EMC ODRA 1304 Oprogramowanie. Język do modelowania układów ciągłych.
- [9] Dokumentacja techniczna silnika typu SAK-2A.
- [10] Paluchiewicz B.: Wykorzystanie bilansu losowego do wyznaczenia dominujących z punktu widzenia dynamiki cech konstrukcyjnych DAS. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Automatyka z. 61



- [11] Łopuchina E.M., Somichina G.S.: Projektowanie asinchronnych mikro-  
maszyn z połym rotorem. Energiya, Moskva 1968.

Złożono w red. 17.06.80 r.

Recenzent

W formie ostatecznej 15.04.81 r.

Prof. dr hab. inż. Zygmunt Bajorek

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ  
ПРИГОДНОГО ДЛЯ ЦИФРОВОГО АНАЛИЗА

Р е з ю м е

В статье рассматривается преобразование классической математической модели двухфазного асинхронного двигателя к виду позволяющему на проведение цифрового анализа, а также цифровой пример. Это является первым этапом решения вопроса синтеза конструкции двигателя. Цифровой анализ осуществляется при применении специализированного языка до моделирования непрерывного контура на ЭВМ. Пример вычислен для математической модели, в которой независимой переменной является один раз ток протекающий в обмотках, а во втором случае потокосцепление  $\psi$ .

MATHEMATICAL MODELS OF TWO-PHASE SERVO MOTORS SUITABLE  
OF A NUMERICAL ANALYSIS

S u m m a r y

The paper presents both a conversion of a classic mathematical model of a two-phase servo motor into a form enabling a numerical analysis and a very numerical example. It is the first stage in solving the problem of a motor construction synthesis. A numerical analysis is carried out using a specialized computer language for a continuous systems modelling. An example is calculated for mathematical models where, in the first case a current in windings is an independent variable and in the other case, a flux linkage  $\psi$  plays this role.