ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 63 Nr kol. 735

Lech JAMROŻ

Politechnika Krakowska

O PEWNYM ZASTOSOWANIU METODY PODZIAŁU I OGRANICZEŃ DO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMU SZEREGOWANIA ZADAŃ

Streszczenie. Optymalizacja zagadnienia szeregowania operacji jest problemem pojawiającym się w bardzo wielu dyskretnych procesach produkcyjnych. Problem ten jest szczególnie doniosły przy rozważaniach praktycznych zagadnień. W artykule przedstawiono metodę rozwiązania problemu szeregowania bazującą na koncepcji metod podziału i ograniczeń.

1. UWAGI WSTĘPNE

Problem optymalizacji dyskretnych procesów produkcyjnych na poziomie ogólności praktycznych zagadnień staje się trudny, spowodowane to jest brakiem wciąż efektywnych algorytmów. Problematyka ta wiąże się przede wszystkim z zagadnieniem szeregowania operacji technologicznych na poszczególnych maszynach. Niniejszy artykuł poświęcony jest rozwiązywaniu zagadnienia szeregowania w ogólnym procesie produkcyjnym, wyznaczającego kolejność wykonywania poszczególnych operacji minimalizującą zadaną funkcję celu.

Kombinatoryczny aspekt zagadnienia szeregowania oraz związane z tym trudności obliczeniowe inspirowały nowy kierunek w teorii algorytmów, zwany złożonością obliczeniową algorytmów. Złożoność obliczeniowa rozpatrywanego zagadnienia jest NP-zupełna ponieważ NP-zupełny jest problem TRÓJPODZIAŁU, do którego redukowalny jest problem $J|3|p_{ij} = 1|C_{max}$ [10].

W związku z tym do rozwiązania problemu uzasadnione jest wykorzystanie algorytmu opartego na koncepcji metod podziału i ograniczeń (b-a-b), w których wybór kolejnego rozwiązania ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych odbywa się zgodnie z ustalonym sposobem. W zasadzie istnieją trzy podstawowe strategie przeszukiwania zbioru rozwiązań [15].

i) w głąb drzewa rozwiązań (liniowe),
ii) wszerz drzewa rozwiązań (z węzła o minimalnej wartości),
iii) heurystyczne.

Wybór konkretnej strategii do obliczeń numerycznych zależeć będzie od charakteru rozwiązywanego problemu, należy zwrócić uwagę, że jeżeli w strategii i) zapotrzebowanie na pamięć jest funkcją liniową, to w strategii

ii) jest już funkcją wykładniczą. Modyfikacje metody b-a-b obok algorytmów heurystycznych są najczęściej stosowanymi metodami w rozwiązywaniu praktycznych zagadnień.

2. OGÓLNE PODEJŚCIE DO ZAGADNIENIA SZEREGOWANIA

Wyznaczanie rozwiązania zagadnienia szeregowania jest głównie dziedziną optymalizacji kombinatorycznej. Najwcześniejsze metody leżą u podstaw programowania całkowitoliczbowego oraz technik płaszczyzn odcinających [17]. Wówczas pojawiły się ważne numerycznie koncepcje, włączając w to zarówno dekompozycję zagadnienia, jak i pojęcie podziału i ograniczenia zbioru rozwiązań, które z powodzeniem wykorzystywano w późniejszych metodach.

Obecnie, najczęściej do rozwiązywania tych problemów stosowane są algorytmy oparte na następujących metodach:

i) podziału i ograniczeń [1, 4, 15, 19, 13],
ii) programowania dynamicznego [3, 17, 13],
iii) heurystycznych [3, 6, 20],
iv) optymalizacji subgradientowej [14].

Przegląd wymienionych metod przedstawiają w szczególności prace [6, 13, 17].

Natomiast ze względu na zwiększenie efektywności obliczeniowej algorytmów stosowane obecnie podejścia należy zakwalifikować do następujących klas:

i) etapowa konstrukcja rozwiązania.
Algorytm generuje rozwiązanie poprzez sukcesywne dodawanie wielkości (np. łuku, wierzchołka) będącej komponentem zagadnienia. Dopuszczalne rozwiązanie znane jest dopiero po zakończeniu obliczeń (greedy algorithm) [8, 9].
ii) kolejne ulepszenia rozwiązania.
Startując z dopuszczalnego rozwiązania kolejne jego ulepszenia lub zmiana dokonywane są poprzez tzw. procedurę λ-optimum [20].
iii) dekompozycja problemu na ciąg podproblemów, w których do rozwiązania następnego korzystamy z rozwiązania poprzedniego [3,18,26].
iv) relaksacja zagadnienia, która polega na pominięciu pewnych klas ograniczeń w modelach zagadnienia w celu otrzymywania korzystnych warunków uzyskania globalnego rozwiązania [12, 13, 19, 22].
v) ograniczenie przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań.
W konkretnych zagadnieniach możliwe jest zawężenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych do takiego zbioru, dla którego istnieje efektywny algorytm [21, 24].

3. MODEL FORMALNY OGÓLNEGO PROCESU DYSKRETNEGO

Dany jest zbiór zadań $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)$, który jest wykonywany za pomocą zbioru maszyn $M = (M_1, M_2, \dots, M_m)$. Każde zadanie $J_i \in J$ składa się z sekwencji m_i niepodzielnych operacji $(O_{1i}, O_{2i}, \dots, O_{m_i i})$ wykonywanych za pomocą sekwencji maszyn $\mu_i = (\mu_i^1, \mu_i^2, \dots, \mu_i^{m_i})$. Dana maszyna w tej samej jednostce czasu wykonuje co najwyżej jedną operację. Każda operacja $O_{\mu_i^{ki}}$ wykonywana jest nieprzerwanie w $p_{\mu_i^{ki}}$ jednostek czasowych.

Dla ułatwienia przeindeksujemy dwuwskaźnikowe operacje w jednowskaźnikowe wg następującej zależności:

$$\left\{O_{ki}\right\} \to \left\{O_u\right\} \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m_i}, \quad u = \sum_{j=1}^{i-1} m_j + k. \tag{1}$$

W celu ustalenia uwagi wprowadzimy dwie fikcyjne operacje, początkową O_B oraz końcową O_F o zerowych czasach wykonywania, przy założeniu, że O_B bezpośrednio poprzedza wszystkie operacje O_{1i}, natomiast O_F bezpośrednio następuje po ostatnich operacjach $O_{m_i i}$ każdego zadania $J_i \in J$.

Wówczas otrzymujemy zbiór ogółu operacji

$$O = (O_B, O_1, \dots, O_K, O_F), \quad K = \sum_{j=1}^{n} m_j \tag{2}$$

połączonych zbiorem łuków, będący zbiorem relacji między operacjami

$$\mathcal{R} = A_B \cup A_T \cup A_F, \tag{3}$$

gdzie:

$$A_B = \left\{\left(B, \sum_{j=1}^{i-1} m_j + 1\right)\right\} \text{ - zbiór łuków } \left\{(O_B, O_{1i}) \Big| \bigwedge J_i \in J\right\}$$

$$A_T = \left\{(u, u+1) \Big| u = \sum_{j=1}^{i-1} m_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^{i} m_j - 1, \ i = \overline{1,n}\right\}$$

- zbiór łuków będących wymaganiami technologicznymi

$$A_F = \left\{\left(\sum_{j=1}^{i} m_j, F\right)\right\} \text{ - zbiór łuków } \left\{(O_{m_i i}, O_F) \Big| \bigwedge J_i \in J\right\}$$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{l=1}^{m} \left\{ (u,v) \,\middle|\, \mu_u^l(O_u) = \mu_v^l(O_v),\quad u \neq v \right\}$$ – zbiór łuków reprezentujący

możliwe uszeregowania operacji na wspólnej maszynie.

Z każdą operacją związana jest trójka wielkości (p_i, μ_i^k, J_i) przyporządkowująca jej odpowiednio czas wykonania, maszynę oraz związek z konkretnym zadaniem. Rozwiązaniem problemu jest określenie takiego uszeregowania $D \in \mathcal{D}$ operacji na poszczególnych maszynach, który minimalizuje następującą funkcję celu

$$f_{max} = \min \max_i f(C(O_{m_i i})). \tag{4}$$

gdzie:

$C(O_{m_i i})$ – czas zakończenia realizacji operacji $O_{m_i i}$,

$f(t) = t$ – liniowa, niemalejące funkcja czasu.

Funkcja celu zapewnia efektywne wykorzystanie maszyn oraz realizację planu w możliwie najkrótszym czasie.

Powyższy model wygodnie sformułować w terminach grafu dysjunkcyjnego [4, 24] $G = (V, \mathcal{A} \cup \mathcal{D})$ w którym zbiór wierzchołków reprezentuje zbiór operacji, natomiast zbiór łuków sumę mnogościową zbiorów $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{D}$.

Grafy dysjunkcyjne pozwalają modelować zagadnienia mające stopień złożoności ogólnych zagadnień typu job-shop. W terminach grafu dysjunkcyjnego, wykorzystując jego własności, budowane są algorytmy oparte najczęściej na metodach podziału i ograniczeń [4, 12, 13, 19, 24].

Przedstawiony model pozwala uwzględniać:

- seryjną produkcję wyrobów wieloasortymentowych,
- określonym wyrobem wprowadzonym do ciągu technologicznego dysponuje się po zadanym czasie,
- maszyna przygotowana do wykonania poszczególnej operacji wykonuje całą serię. W związku z tym pojęcie operacji odnosić się będzie do całej serii wyrobów,
- przezbrojenia mogą być wykonywane na granicach czasów harmonogramowania. W celu zmniejszenia liczby przezbrojeń wyznacza się optymalne długości serii, przy których czas przezbrojeń jest minimalny i pomijany.

W praktycznych dyskretnych procesach produkcyjnych tego typu zagadnienia występują w taśmowej produkcji wyrobów seryjnych [16, 25] w przemyśle hutniczym [5, 27] czy też lotniczym [24].

4. OPIS METODY ROZWIĄZANIA PROBLEMU

Ogólna koncepcja rozwiązania problemu polega na relaksacji zagadnienia wyjściowego do zagadnień jednomaszynowych, uwzględniając w zbiorze $\mathcal{D}$ łuki odnoszące się do aktualnie rozpatrywanej maszyny.

Podejście takie jest powszechnie stosowane w wielu problemach kombinatorycznych [13, 24], pozwalając z jednej strony rozwiązywać praktyczne zagadnienie a z drugiej w prosty sposób wyznaczać dolne ograniczenia na wartość funkcji celu [19, 22, 24].

Uszeregowania operacji na poszczególnych maszynach wyznaczane są poprzez podzbiór D o takiej własności, że jeżeli $(u,v) \in D$, to wówczas $(v,u) \in \mathcal{D} - D$. Podzbiór D, korespondując z wierzchołkiem drzewa rozwiązań, wyznacza częściowe rozwiązanie, poprzez kolejne jego rozszerzenia otrzymujemy globalne rozwiązanie. Uszeregowanie wyznaczane podzbiorem D są dopuszczalne, jeżeli graf $G(D) = (V, \mathcal{R} \cup D)$ jest acykliczny. Istnieje kilka praktycznych sposobów sprawdzania acykliczności grafów [7].

Posłużymy się sposobem wyznaczania podzbiorów krytycznych operacji, których uszeregowania wpływają na wartość funkcji celu [19]. W związku z tym dla każdej pary operacji rozpatrywanej maszyny wyznaczamy następujący zbiór

$$E^1(D) = \left\{(u,v) \middle| c_u + p_u > c_v, \quad c_v + p_v > c_u, \quad \mu_v^1(O_v) = \mu_u^1(O_u)\right\}, \tag{5}$$

gdzie:

$c_u = \max\left\{c_v + p_v \middle| (u,v) \in \mathcal{R} \cup D\right\}$ $\quad c_B = 0$ – jest najwcześniejszym czasem rozpoczęcia wykonywania operacji O_u.

Korzystając ze zbioru $E^1(D)$ określamy w stosunku do tych par współczynnik kary Δf_{uv}^1, będący miarą zmian wartości funkcji celu.

$$\Delta f_{uv}^1 = c_u + p_u - Cv, \tag{6}$$

gdzie:

$C_v = \min\left\{C_v - p_v \middle| (u,v) \in \mathcal{R} \cup D\right\}$ $\quad C_F = c_F$ – jest najpóźniejszym czasem rozpoczęcia wykonywania operacji O_v.

5. WYZNACZANIE DOLNYCH ORAZ GÓRNYCH OGRANICZEŃ

Globalne dolne ograniczenie LB(D) na wartość całkowitego uszeregowania wyznaczane jest poprzez rozwiązywanie zagadnień jednomaszynowych, otrzymanych w wyniku relaksacji polegającej na pominięciu wszystkich łuków dysjunkcyjnych, z wyjątkiem dotyczących rozpatrywanej maszyny. W związku z tym wartość LB(D) wyznacza się z następującej zależności

$$LB(D) = \max\left\{c_F, \max_l LB^l(D)\right\} \tag{7}$$

gdzie:

$l \in L$ – jest zbiorem wskaźników nierozpatrywanych dotąd maszyn.

Globalne górne ograniczenia UB(D) na wartość całkowitego uszeregowania wyznaczane jest z uszeregowań otrzymanych w procesie obliczeń LB(D).

Niech $G(D_{uv}) = G(D \cup (u,v))$ będzie grafem otrzymanym w wyniku przyłączenia łuku $(u,v) \in E^l(D)$.

Przy rozszerzeniu podzbioru D nie maleją wartości c_u oraz $LB(D_{uv})$ $(LB(D_{uv}) \geqslant c_F + \Delta f^l_{uv}$ dla $\Delta f^l_{uv} \geqslant 0)$.

6. WYZNACZANIE REGUŁ PODZIAŁU I OGRANICZEŃ

Stosowanie reguł podziału i ograniczeń zawężamy do podzbioru operacji, których zmiana uszeregowania powoduje zmianę wartości funkcji celu. Rozpatrywać będziemy te maszyny, dla których $|E^l(D)| \geqslant 1$.

Niech LB(D), UB(D), Δf^l_{uv} będzie odpowiednio globalnym dolnym ograniczeniem, globalnym górnym ograniczeniem, współczynnikiem kary.

Oznaczmy przez

$$\lambda^l_{L(uv)} = \frac{LB(D) - f^l_{uv}}{c_F} \tag{8}$$

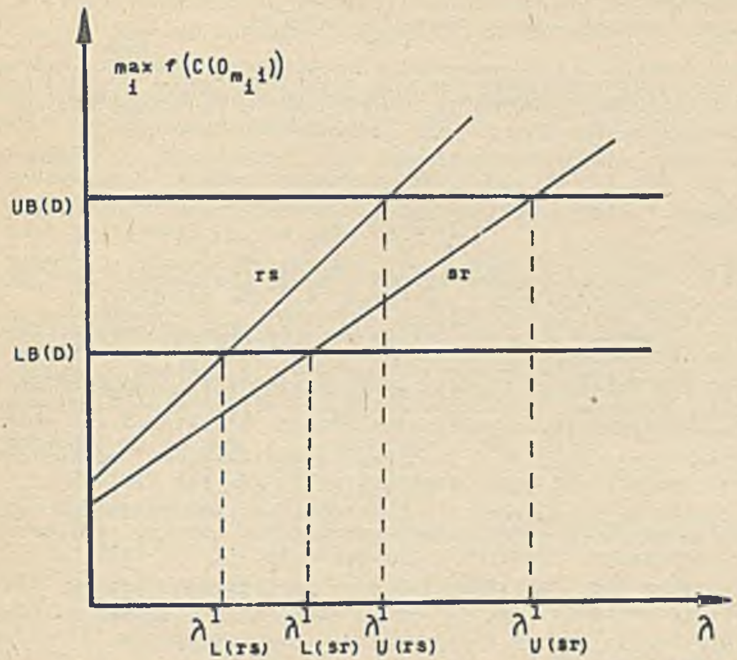
$$\lambda^l_{U(uv)} = \frac{UB(D) - f^l_{uv}}{c_F} \tag{9}$$

$$\lambda^l_{uv} = \frac{\lambda^l_{L(uv)} + \lambda^l_{U(uv)}}{2} \tag{10}$$

Zasady podziału i ograniczenia zbioru rozwiązań zostaną określone na podstawie powyższych parametrów.

Dla każdej pary łuków ze zbioru $E^l(D)$ zostaje wyeliminowany ten łuk $rs \in (rs,sr)$ z każdej pary łuków dysjunkcyjnych, dla których spełniona jest następująca zależność zwana regułą ograniczającą

$$\min\left\{\left|\lambda^l_{U(rs)} - \lambda^l_{U(sr)}\right|, \left|\lambda^l_{L(rs)} - \lambda^l_{L(sr)}\right|\right\} > \left|\lambda^l_{rs} - \lambda^l_{sr}\right| \tag{11}$$



Rys. 1. Geometryczna interpretacja reguły ograniczającej

Z zależności (11) otrzymujemy zredukowany podzbiór łuków $\mathcal{E}^1(D)$, w stosunku do którego określamy regułę podziału, określoną następującą zależnością

$$\lambda^1_{uv} = \max_{wz \in \mathcal{E}^1(D)} \lambda^1_{wz} \tag{12}$$

Do kolejnego podziału wybiera się ten łuk, dla którego spełniona jest zależność (12).

Reguły eliminacyjne (11), (12) mogą służyć w zakresie metod programowania dynamicznego do rozwiązywania innych zagadnień kombinatorycznych, np. zagadnienia flowshop czy listonosza [3].

7. UWAGI KOŃCOWE

W artykule przedstawiono model formalny oraz metodę rozwiązania ogólnego dyskretnego procesu produkcyjnego. Podano również najczęściej spotykane w literaturze podejścia do rozwiązywania tego typu zagadnień.

Odpowiednio określone zasady podziału i ograniczeń bazują na regule heurystycznej, charakteryzującej się:

- prostą algorytmicznością,
- przystosowaniem do licznego zbioru rozwiązań.

W obecnej chwili nie ma jednolicie opracowanej metody rozwiązywania problemów szeregowania, wyważone korzystanie z dotychczasowych podejść dają zadowalające wyniki z praktycznego punktu widzenia.

8. LITERATURA

[1] Balas E.: Machine sequencing problem via disjunctive graphs an emplicit enumeration algorithm. Opns. Res. Vo 17, 1969.

[2] Ball M., Magazine M.: The design and analysis of heuristics Clasification of heuristic approach. Networks. Vo. 11, No 2, 1981.

[3] Biondi E., Palermo P.C.: A heuristic approach to combinatorial optimization problems. 5-th Conference on Optimization Techniques. Springer Verlag 1973.

[4] Charlton J.M., Death C.C.: A generalized machine scheduling algorithm. Operational Res. Quqarterly. Vo. 21, No. 1, 1970.

[5] Cieśliński J., Gościński A.: Zastosowanie przybliżonego planowania kalendarzowego do szeregowania operacji na odcinku stalownia-walcownia. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, z. 3, 1977.

[6] Dannenbring D.G.: Anevaluation of flow-shop sequencing heuristics. Management Science. Vo. 23, No. 11, 1977.

[7] Deo N.: Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce. PWN, Warszawa 1980.

[8] Edmonds J.: Matroids and the greedy algorithm. Mathematical programming. Vo 1, 1971.

[9] Fisher M.L.: Worst-case analysis of heuristic algorithms. Management Scienc. Vo 26, No. 1, 1980.

[10] Garey M.R., Johnson D.S., Sehti R.: The complexity of flowshop and job shop scheduling. Matematics of operation research. Vo. 1, No. 2, 1976.

[11] Glazebrook K.D., Gittins J.C.: On single-machine scheduling with precedence relations and linear or discounted costs. Opns. Res. Vo. 29, No. 1, 1981.

[12] Grabowski J.: Uogólnione zagadnienia optymalizacji kolejności operacji w dyskretnych systemach produkcyjnych. Prace Naukowe ICT Politechniki Wrocławskiej 50(9), 1979.

[13] Hammer P.L. (ed.): Discrete optimization. Annals of discrete mathematics. Vo. 4, 5, 1979.

[14] Held M., Wolfe P., Crowder H.: Validation of subgradient optimization. Mathematical programming. Vo. 6, 1974.

[15] Ibaraki T.: Theoretical comparision of search strategies in branch--and-branch algorithms. Intern. Journal of Comp. and Information Science. Vo. 5, No. 4, 1976.

[16] Jankowska-Zorychta Z.: Modele sekwencyjne i ich zastosowania w planowaniu optymalnej organizacji w dyskretnych procesach produkcyjnych. Prace OO PAN, PWN, Warszawa 1973.

[17] Korbut A.A., Finkelsztejn J.J.: Programowanie dyskretne. PWN, Warszawa 1974.

[18] Krone M.J., Steiglitz K.: Heuristic-programming solution of a flowshop scheduling problem. 5-th Conference on Optimization Techniques. Springer Verlag, 1975.

[19] Lageweg B.J., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.: Job-shop scheduling by implicit enumeration. Management Science. Vo. 24, No. 4, 1977.

[20] Lin S.: Heuristic Programming as an aid to Network design. Networks. Vo. 5, 1975.

[21] Maffioli F.: The complexity of combinatorial optimization algorithms and the challenge of heuristics. in Christofides N(ed.) Combinatorial Optimization. John Wiley 1979.

[22] McMahon G., Florian M.: On scheduling with ready times and due dates to minimize maximum lateness. Oper. Res. Vo. 23, No. 3, 1975.

[23] Reddi S.S., Ramamoorthy C.V.: Ascheduling problem. Operational Research Quarterly. Vo. 24, No. 3, 1973.

[24] Sahni S.: General techniques for combinatorial approximation. Oper. Res. Vo. 25, No. 6, 1977.

[25] Sprawozdania z prac Instytutu Obróbki Skrawaniem, Materiały 1.03.3.1/ 0.5 1.4-7, Kraków 1979.

[26] Uskup E., Smith S.B.: A branch-and-bound algorithm for two-stage production-sequencing problems. Operations Research. Vo. 23, No. 1, 1975.

[27] Wala K.: Symulacyjna metody optymalizacji dyskretnych procesów produkcyjnych. ZN AGH, s. Automatyka z. 21, 1979.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni NIEDERLIŃSKI

Wpłynęło do Redakcji 15.05.1982 r.

О НЕКОТОРОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДАЧ

Р е з ю м е

В работе представлено математическую модель общего дискретного производственного процесса а также алгоритмически-евристический метод, базирующий на идеи методов ветвей и границ. Рассматриваемая проблема является одной из типичных комбинаторных проблем. Для её решения предложено правило ветвей и границ, для множества допустимых решений на основе параметра. Правило ветвей и границ ограничено к множеству от порядка которых зависит стоимость функции цели. Представлено также часто встречаемые в литературе методы решения этих проблем.

ONE APPLICATION OF THE BRANCH-AND-BOUND METHOD TO THE JOB-SHOP PROCESSES

S u m m a r y

This paper concerns the formal description of general discrete processes of the job-shop type and scheduling methods based on the concept of branch-and-bound method. The problem of minimizing the maximum job complete time is NP-complete. For computational effectivness the branch-and-bound rules defined within the set of feasible solutions are described. These rules are restricted to the set of operations whose schedules influence the objective function. Additionaly the paper outlines some other approaches to this problem.