

Marek KIMMEL

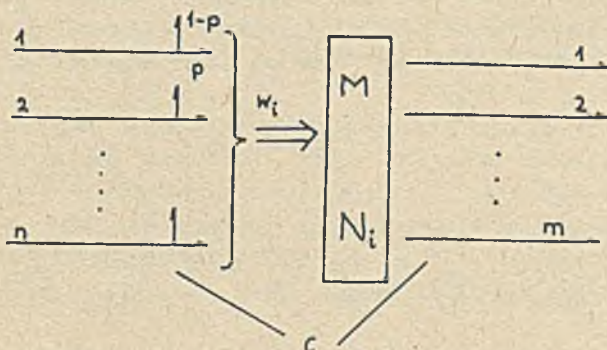
Instytut Automatyki Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE TEORII PROCESÓW MARKOWA  
DO BADANIA GRANICZNYCH PROCESÓW DISKRETNÝCH

**Streszczenie.** Zbadano własności pewnej klasy procesów dyskretnych, opierając się na modelu w postaci łańcucha Markowa z przeliczalną przestrzenią stanu. Udowodniono twierdzenie graniczne dla pewnych wariantów procesu.

## 1. WPROWADZENIE

W wielu procesach przemysłowych o charakterze dyskretnym występuje system linii montażowych przedstawiony schematycznie na rysunku 1, zwany węzłem montażu [2]. W systemie tym  $n$  linii montażowych (identycznych) dostarcza synchronicznie półprodukty, w odstępach czasu równych  $c$  (tzw. cykl linii). Półprodukty te są kontrolowane (przyjęto, że czas kontroli jest zaniedbywalny), a następnie egzemplarze bez usterek kierowane są do magazynu  $M$ , skąd odbierane są przez  $m$  ( $m < n$ ) linii montażowych, poruszających się z cyklem równym również  $c$ .



Rys. 1. System linii montażowych

Zakłada się, że każdy z półproduktów dostarczonych przez jedną z linii "wejściowych" ma usterkę z prawdopodobieństwem  $a = 1-p$  oraz, że mechanizm powstawania usterek jest czysto losowy. Wystąpienie usterki w danym

egzemplarzu na danej linii jest niezależne od faktu wystąpienia usterki w pozostałych egzemplarzach półproduktu na dowolnej linii. Oznaczmy przez  $N_1$  liczbę egzemplarzy półproduktu znajdujących się w magazynie w chwili  $t$ . Jeżeli pominiemy koszty transportu wewnątrz magazynu (lub, co na jedno wychodzi, założymy, że są stałe), wówczas łatwo sprawdzić, że obowiązuje zależność rekurencyjna:

$$N_{1+1} = \max\{N_1 + w_{1+1} - m; 0\}, \quad 1 = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

gdzie  $w_1$  jest zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego o parametrach  $(n, p)$ . Rozkłady zmiennych losowych  $N_1$  mają znaczenie przy projektowaniu węzła; rzutują one w oczywisty sposób na projektowaną wielkość magazynu.

Jest również widoczne, że opisany system jest czasowo-dyskretnym układem obsługi masowej z  $m$  kanałami obsługi, strumieniem wejściowym z możliwością zgłoszeń wielokrotnych i deterministycznym czasem obsługi równym  $c$  [4]. W związku z tym można by zastosować do analizy systemu ogólną teorię systemów obsługi masowej.

Ogólne metody teorii kolejek i tam [6] pozwalają jednak zwykle na znalezienie rozkładów granicznych w formie niejawnej (np. uwikłanych w równaniu funkcjonalnym). Otrzymanie ich w postaci jawnej jest zwykle trudne (por. uwagi na ten temat w [6]). Dlatego w pracy niniejszej użyto metody bezpośredniej, bazując na spostrzeżeniu, że ciąg  $\{N_t\}$  jest łańcuchem Markowa o przeliczalnej przestrzeni stanów. Wypisanie jawnej postaci macierzy prawdopodobieństw przejścia tego łańcucha pozwala również łatwo modelować zjawiska przejściowe w systemie (1).

W punkcie 2 pracy przedstawiono opis dynamiki procesu w postaci wzoru rekurencyjnego dla funkcji tworzącej prawdopodobieństwa. W punkcie 3 rozważa się rozkłady graniczne  $N_1$  w szczególnym przypadku  $m = 1$ ; w punkcie 4 - dla  $m = 2$ ,  $n = 3$ . Punkt 6 zawiera uwagi dotyczące przypadku ogólnego.

Przytoczymy jeszcze parę definicji, twierdzenie dotyczące łańcuchów Markowa i twierdzenie dotyczące funkcji tworzących. Rozpatrzmy jednorodny łańcuch Markowa z dyskretnym czasem i ze zbiorem stanów  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Niech  $\pi_{ij}^t$  będzie prawdopodobieństwem przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w czasie  $t \in T$ , gdzie  $T = \{1, 2, \dots\}$ . Rozkład prawdopodobieństwa  $\rho_1 = (\rho^0, \rho^1, \dots)$  na  $I$  nazywa się stacjonarnym, jeśli  $\rho^j = \sum_{i \geq 0} \rho^i \pi_{ij}^t$  dla wszystkich  $j \geq 0$ ,  $t \in T$ .

Definicja 1 [4, s. 72]. łańcuch Markowa nazywa się kontrakcją, jeśli dla dowolnej pary stanów  $i_1$  oraz  $i_2$  istnieje stan  $j$  oraz chwila  $t \in T$  taka, że

$$\pi_{i_1 j}^t > 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_{i_2 j}^t > 0. \quad (2)$$

Definicja 2 [4, s. 73]. Łańcuch Markowa nazywa się nierzywiedlny, jeśli dla dowolnej pary stanów  $i, j$  istnieje  $t \in T$  takie, że  $\mathcal{P}_{ij}^t > 0$

Twierdzenie 1 [4, s. 73]. Załóżmy, że istnieje rozkład stacjonarny  $\rho = (\rho^0, \rho^1, \dots)$ . Wtedy następujące zdanie są równoważne:

a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{ij}^t = \rho^j > 0$  dla dowolnych  $i, j$ .

b) łańcuch jest kontrakcją i jest nierzywiedlny.

Definicja 3 [1]. Funkcja tworząca prawdopodobieństwa (FTP) rozkładu  $\rho = (\rho^0, \rho^1, \dots)$  jest to funkcja analityczna  $G(s)$  zmiennej rzeczywistej  $s \in [0, 1]$ , określona wzorem:

$$G(s) = \sum_{i \geq 0} \rho^i s^i. \quad (3)$$

Twierdzenie 2 [1]. Funkcja analityczna  $G(s)$  zmiennej  $s \in [0, 1]$  jest FTP pewnego rozkładu  $\rho = (\rho^0, \rho^1, \dots)$  wtedy i tylko wtedy, jeżeli:

a)  $G(1) = 1$ ,

b) współczynniki rozwinięcia  $G(s)$  w szereg Taylora wokół  $s = 0$  są nieujemne.

Zachodzi również:

$$\rho^1 = \frac{d^1 G(0)}{ds^1}. \quad (4)$$

$$E[N(N-1)\dots(N-i+1)] = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{d^i G(s)}{ds^i}. \quad (5)$$

gdzie zmienna losowa  $N$  ma rozkład  $\rho$ . Ciąg rozkładów  $\{\rho_i\}$  dąży do rozkładu  $\rho$  (przy  $i \rightarrow \infty$ ) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ciąg FTP  $\{G_i(s)\}$  rozkładów  $\rho_i$  dąży do FTP  $G(s)$ ;  $G(s)$  jest FTP rozkładu  $\rho$ .

## 2. DYNAMIKA PROCESU $\{N_i\}$

Elementarne rozważania związane ze wzorem (1) i z rozkładem Bernoulliego wskazują, że nieskończona macierz  $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_{rs}^1] = [\mathcal{P}_{rs}]$  prawdopodobieństw przejścia łańcucha  $\{N_i\}$  ma elementy dane wzorami:

$$\mathcal{P}_{rs} = \begin{cases} p^{s+r+m} q^{n-s+r-m} \binom{n}{s-r+m}; & r-m \leq s \leq r-m+n, \\ 0 & ; \text{ dla pozostałych } s, \end{cases} \quad (6)$$

dla  $r \geq m$ ; oraz:

$$\mathcal{H}_{rs} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{m-r} p^l q^{n-l} \binom{n}{l}; & s = 0, \\ p^{s-r+m} q^{n-s+r-m} \binom{n}{s-r+m}; & 1 \leq s \leq r-m+n, \\ \text{dla pozostałych } s. \end{cases} \quad (7)$$

dla  $0 \leq r \leq m-1$ . Jest to macierz pasmowa o szerokości pasma równej  $n+1$ .

Oznaczmy rozkład zmiennej losowej  $N_1$  przez  $\varphi_1 = (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \dots)$ , a FTP rozkładu  $\varphi_1$  - przez  $G_1(s)$ . Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Przy wymienionych wyżej założeniach zachodzi:

$$G_{1+1}(s) = \frac{(sp+q)^n}{s^m} G_1(s) + \sum_{r=0}^{m-1} \varphi_1^r \left[ \sum_{u=0}^{m-r} p^u q^{n-u} \binom{n}{u} \left(1 - \frac{s+u+r}{s}\right) \right]. \quad (8)$$

Dowód. Zastosowanie definicji FTP  $G_{1+1}(s)$ , wzoru:

$$\varphi_{1+1}^t = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_1^r \mathcal{H}_{rt}$$

oraz zmiana kolejności sumowania w sumach dwukrotnych dowodzą, że:

$$G_{1+1}(s) = A + B,$$

gdzie

$$A = \sum_{r=m}^{\infty} \varphi_1^r \left[ \sum_{t=r-m}^{r+m+n} p^{t-r+m} q^{n-t+r-m} \binom{n}{t-r+m} s^t \right],$$

$$B = \sum_{r=0}^{m-1} \varphi_1^r \left[ \sum_{l=0}^{m-r} p^l q^{n-l} \binom{n}{l} + \sum_{t=1}^{r-m+n} p^{t-r+m} q^{n-t+r-m} \binom{n}{t-r+m} s^t \right].$$

Zamiana wskaźnika sumacyjnego  $t$  w sumach wewnętrznych według wzoru  $u = t - r + m$  dowodzi słuszności wzoru (8).  $\square$

Rekurencyjna zależność (8) pozwala modelować ewolucję rozkładów  $\varphi_1$ , przy zadanym rozkładzie początkowym  $\varphi_0$ . Jest to jednak niewygodne i dosyć trudne do zaprogramowania na komputerze. W praktyce wygodniej jest stosować bezpośrednio równania (6), (7).

Właściwym zastosowaniem wzoru (8) jest wykorzystanie go do znalezienia postaci FTP  $G(s)$  rozkładu granicznego, do którego dążą rozkłady  $\rho_1$  przy  $i \rightarrow \infty$ . Istotnie, jeżeli taki rozkład istnieje, wówczas (na mocy tw. 2)  $G_1(s) \rightarrow G(s)$ . Przechodząc do granicy w (8) i dokonując odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$G(s) = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} \rho^r \left[ \sum_{u=0}^{m-r} p^u q^{n-u} \binom{n}{u} (s^m - s^{r+u}) \right]}{s^m - (ps+q)^n} \quad (9)$$

jeżeli rozkład graniczny  $\rho = (\rho^0, \rho^1, \dots)$  istnieje.

Uwaga. Łańcuch  $\{N_1\}$  jest nieprzywydlny i jest kontrakcją; łatwo tego dowiedzieć, korzystając ze wzoru (1). Tak więc, na mocy twierdzenia 1, wystarczy wykazać, że istnieje rozkład stacjonarny z FTP daną wzorem (9). Rozkład ten istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy funkcja  $G(s)$  określona wzorem (9) jest rzeczywiście FTP pewnego rozkładu.

Rozważmy dwa przypadki, w których można to wykazać.

### 3. PRZYPADEK $m = 1$

Wzór (9) przybiera obecnie postać:

$$G(s) = \frac{\rho^0 q^n (s-1)}{s - (ps+q)^n}. \quad (10)$$

Wyłączenie czynnika  $(s-1)$  z mianownika funkcji (por. [3], gdzie ten sam problem wynikł z nieco innego modelu) i zastosowanie wzoru na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego pozwala wykazać, że zachodzi warunek (b) twierdzenia 2, o ile tylko  $p < 1/n$ . Stosując regułę de l'Hospitala przy przejściu granicznym  $s \rightarrow 1^-$ , można się przekonać, że  $G(1) = 1$  dla:

$$\rho^0 = \frac{1 - np}{q^n}. \quad (11)$$

o ile tylko  $p < 1/n$ . Uwzględniając uwagę z punktu 2 i warunek (a) twierdzenia 2, otrzymujemy kolejny rezultat.

Twierdzenie 4. Jeżeli  $m = 1$ ,  $p < 1/n$ , wówczas istnieje rozkład graniczny  $\rho$  łańcucha  $\{N_1\}$ , przy czym FTP  $G(s)$  rozkładu  $\rho$  dana jest wzorami (10) i (11).

Wniosek 1. Zastosowanie wzoru (5) pozwala stwierdzić, że

$$E(N_{\infty}) = \sum_{i \geq 0} i \rho^i = \frac{n(n-1)\rho^2}{2(1-n\rho)} \quad (12)$$

Wartość oczekiwana "w stanie ustalonym", liczby półproduktów w magazynie dąży więc do nieskończoności przy  $\rho \rightarrow 1/n$ . Jest to zgodne z intuicją. System obsługi "zatyka" się, jeżeli intensywność strumienia zgłoszeń  $\frac{\rho n}{c}$  zrównuje się z prędkością obsługi  $\frac{1}{c}$ . Podobne wzory obowiązują dla wyższych momentów. Wyniki badań symulacyjnych, ilustrujących przebiegi przejściowe (przed ustaleniem się rozkładu granicznego) zamieszczono w pracach [2, 3].

#### 4. PRZYPADEK $m = 3, n = 3$

Podamy obecnie sposób rozumowania, który przy odpowiednio większych komplikacjach zapisu może posłużyć do rozwiązania zadania w przypadku ogólnym. Zauważmy na wstępie, że  $G(s)$  (wzór (9)) przybiera obecnie postać:

$$G(s) = \frac{(s-1) [s(3\rho^0 p q^2 + \rho^1 q^3) + (s+1)\rho^0 q^3]}{s^2 - (\rho s + q)^3} \quad (13)$$

W przeciwieństwie do wzoru (19), trudno jest obecnie sprawdzić warunek (b) twierdzenia 2. Warunek (a) prowadzi natomiast do zależności:

$$\rho^0(2q^3 + 3\rho q^2) + \rho^1 q^3 = 2 - 3\rho. \quad (14)$$

która ma sens probabilistyczny o ile tylko  $\rho < \frac{2}{3}$ . Sprawdzenie istnienia rozkładu stacjonarnego wymaga sięgnięcia do równań (6), (7). Wynika z nich, że rozkład stacjonarny musi spełniać nieskończony układ równań:

$$\rho^0 = (q^3 + 3\rho q^2 + 3\rho^2 q)\rho^0 + (q^3 + 3\rho q^2)\rho^1 + q^3 \rho^2, \quad (15)$$

$$\rho^{r+1} = \rho^3 \rho^r + 3\rho^2 q \rho^{r+1} + 3\rho q^2 \rho^{r+2} + q^3 \rho^{r+3}, \quad r = 0, 1, \dots$$

lub równoważny:

$$\rho^2 = \frac{1}{q} (1 - q^3 - 3\rho q^2) \rho^0 - \frac{1}{q} (q^3 + 3\rho q^2) \rho^1, \quad (16)$$

$$\rho^{r+3} = -\frac{3\rho}{q} \rho^{r+2} + \frac{1 - 3\rho^2 q}{q} \rho^{r+1} - \left(\frac{\rho}{q}\right)^3 \rho^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Zdefiniujemy wektor kolumnowy  $\phi^r = (\rho^{r+2}, \rho^{r+1}, \rho^r)^T$  oraz macierz kwadratową:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -3\left(\frac{p}{q}\right) & \frac{1-3p^2q}{q^3} & -\left(\frac{p}{q}\right)^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Oczywiście:

$$\phi^{r+1} = \mathcal{A} \phi^r \quad r = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$\phi^r = \mathcal{A}^r \phi^0.$$

Macierz  $\mathcal{A}$  ma następujące wartości własne:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \left[ (3p^2q + q^3 - 1) \mp \sqrt{(1 - 3p^2q - p^3)^2 + 4p^3q^3} \right] / 2q^3.$$

Jak wiadomo [5. s. 58] zachodzi:

$$\mathcal{A}^r = X H^r X^{-1}, \quad (19)$$

gdzie  $X$  jest macierzą utworzoną z wektorów własnych macierzy  $\mathcal{A}$ , natomiast  $H$  jest macierzą diagonalną:  $H = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Zastosowanie wzorów (18), (19) i wykonanie żmudnych, chociaż elementarnych przekształceń pozwala stwierdzić, po odstawieniu  $\rho^2$  ze wzoru (16), że:

$$\rho^{2+r} = A + B\lambda_2^{r+2} + C\lambda_3^{r+2}, \quad (20)$$

gdzie:

$$A = \frac{1}{D} \left\{ \left[ (\lambda_2 - \lambda_3) \left(\frac{p}{q}\right)^3 + \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) \right] \rho^0 + \left[ \lambda_3^2 - \lambda_2^2 - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{q^3} (q^3 + 3pq^2) \right] \rho^1 \right\},$$

$$B = \frac{1}{D} \left\{ \left[ (\lambda_3 - 1) \left(\frac{p}{q}\right)^3 + (\lambda_3^2 - \lambda_3) \right] \rho^0 + \left[ (1 - \lambda_3^2) - \frac{\lambda_3 - 1}{q^3} (q^3 + 3pq^2) \right] \rho^1 \right\},$$

$$C = \frac{1}{D} \left\{ \left[ (1 - \lambda_2) \left(\frac{p}{q}\right)^3 + (\lambda_2 - \lambda_2^2) \right] \rho^0 + \left[ (\lambda_2^2 - 1) - \frac{1 - \lambda_2}{q^3} (q^3 + 3pq^2) \right] \rho^1 \right\},$$

$$D = (\lambda_2 - \lambda_3)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3).$$

łatwo sprawdzić, że  $A \equiv 0$  dla dowolnych  $\rho^0, \rho^1$ . Ze wzoru na wartości własne wynika, że:

$$\lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad |\lambda_2| > |\lambda_3|. \quad (21)$$

W takim razie, jeżeli  $\rho$  ma być rozkładem prawdopodobieństwa (tzn.  $\rho^i \geq 0$ ), musi zachodzić:

$$\lambda_3 < 1, \quad (22)$$

$$B = 0, \quad (23)$$

$$C/D > 0, \quad (24)$$

Elementarne rozważania dowodzą, że warunek (22), jest równoważny warunkowi:  $p < 2/3$ . Warunek (24) jest równoważny warunkowi:

$$\rho^1 = \rho^0 \frac{2p^3 - 3pq^2 - q^3 + \sqrt{(3pq^2 + q^3)^2 + 4p^3q^3}}{3q^3 + 3pq^2 + \sqrt{(3pq^2 + q^3)^2 + 4p^3q^3}}. \quad (25)$$

Wiedząc, że  $D < 0$ , otrzymujemy po wstawieniu (25) do wzoru na  $C$ :

$$(\alpha + \sqrt{\gamma})(\beta - \sqrt{\gamma}) - (\beta + \sqrt{\gamma})(\alpha - \sqrt{\gamma}) < 0,$$

gdzie:

$$\alpha = 3q^3 + 3pq^2, \quad \beta = 2p^3 - 3pq^2 - q^3, \quad \gamma = (3pq^2 + q^3)^2 + 4p^3q^3.$$

Ale lewa strona tej nierówności wynosi  $2(\beta - \alpha)\sqrt{\gamma}$ , skąd niemal natychmiast otrzymujemy, że warunek (24) jest równoważny warunkowi:  $p < 2/3$ . Ostatecznie więc widzimy, że warunki:  $p < 2/3$  oraz (25) zapewniają nieujemność rozwiązań  $\rho^i, i \geq 0$ , układu równań (15), podczas gdy warunek (14) zapewnia, że  $\sum_{i \geq 0} \rho^i = 1$ . Istnieje więc rozkład stacjonarny. Dowiedliśmy następującego wyniku.

**Twierdzenie 5.** Jeżeli  $p < 2/3$ , wówczas istnieje rozkład graniczny dla  $n = 3, m = 2$ . Jego FTP  $G(s)$ , jest określona wzorami: (13) oraz (14), (25).

**Wniosek 2.** Łatwe obliczenia oparte na różniczkowaniu  $G(s)$  dowodzą, że graniczna wartość oczekiwana  $\lim_{i \rightarrow \infty} E(N_i)$  jest dowolnie duża dla  $p \rightarrow 2/3$  (por. wniosek 1).



## 5. UWAGI O PRZYPADKU OGÓLNYM I ZASTOSOWANIACH

Metoda użyta w punkcie 4 do wykazania istnienia rozkładu granicznego, może być z powodzeniem zastosowana dla dowolnych  $m$  i  $n$ . Jest ona bowiem zależna tylko od pasmowej struktury macierzy prawdopodobieństw przejścia. Ogólniejsze wyniki są w przygotowaniu.

Jak już wspomniano na wstępie, podstawowym zastosowaniem wyników pracy jest oszacowanie wielkości magazynów przy projektowaniu systemu linii montażowych. Inne metody procesów Markowa (por. [5]) pozwalają ocenić, jak często zaprojektowana skończona objętość okaże się niewystarczająca.

Najistotniejsze postulaty dla zastosowań "projektowych" przedstawiono w pracy [2].

Praca niniejsza jest jedną z serii prac autora, poświęconych dynamice losowych procesów dyskretnych. W pracy [3, część I] zdefiniowano szeroką klasę procesów, zachodzących w węzle montażu (rozumianym ogólniej niż w prezentowanej pracy). Praca [3, część II] poświęcona jest przypadkowi jednej linii wejściowej i jednej linii wyjściowej, których cykle mają się do siebie jak liczby całkowite. W pracy [3, część III] rozważano między innymi przypadek linii produkcyjnych obiekty komplementarne (otrzymano tam rezultaty negatywne, świadczące o braku rozkładów granicznych). Podobnej tematyce poświęcona jest także nieopublikowana praca dyplomowa, znajdująca się w dyspozycji autora.

## LITERATURA

- [1] Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań. T.I. PWN, Warszawa 1966.
- [2] Kimmel M.: Zastosowanie teorii procesów punktowych do projektowania węzła montażu. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 54, Gliwice 1980.
- [3] Kimmel M.: Nietypowe zadania teorii kolejek, związane z dyskretnymi procesami przemysłowymi. Części: I, II, III. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 61 (w druku).
- [4] Klimow G.P.: Teoria obsługi masowej. WNT, Warszawa 1979.
- [5] Langrock P., Jahn W.: Einführung in die Theorie der Markovschen Ketten und Ihre Anwendungen. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979.
- [6] Pakes A.G.: Discrete Dams with Markovian Inputs. Stochastic Processes and Their Applications. 11, 1981, 57-78.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan WĘGLARZ

Wpłynęło do Redakcji 15.05.1982 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ГРАНИЧНЫХ  
СВОЙСТВ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

Разработана модель одного класса дискретных процессов в виде цепи Маркова. Приведены теоремы о граничных свойствах системы и аналогии с теорией массового обслуживания.

APPLICATION OF MARKOV PROCESSES TO INVESTIGATION  
OF LIMIT PROPERTIES OF CERTAIN DISCRETE PROCESSES

S u m m a r y

A study of the properties of some class of discrete processes is performed. The process is modelled by a Markov chain with denumerable state space. Limit theorem is proved for a special case of the process.