ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 63 Nr kol. 735

Eugeniusz NOWICKI, Stanisław ZIMOŁKA

Politechnika Wrocławska

Zespół Systemów Sterowania

ZAGADNIENIE OPTYMALNEGO ROZDZIAŁU ZASOBÓW WIELU RODZAJÓW PODWÓJNIE OGRANICZONYCH W SIECI OPERACJI

Streszczenie. Zagadnienie optymalnego (czas, koszt) rozdziału zasobów wielu rodzajów podwójnie ograniczonych w sieci operacji sformułowano w oparciu o opis operacji przedstawiający prędkość chwilową wykonywania operacji w funkcji natężenia dopływu zasobów. Przedstawiono ogólną metodę rozwiązania, bazującą na wyprowadzonych w pracy własnościach problemu. Pewną klasę zadań sprowadzono do zagadnienia liniowego, dla którego istnieje algorytm bardziej efektywny od metody simpleks.

1. WSTĘP

W pracy rozpatruje się problem optymalnego (ze względu na czas, koszt) rozdziału zasobów wielu rodzajów podwójnie ograniczonych w sieci operacji. Zakłada się, że operacje (tj. czynności, elementy procesu produkcyjnego) dają się opisać za pomocą funkcji ujmującej zależność prędkości realizacji operacji od natężenia dopływu zasobów. Modele tego typu stanowią, dla zasobów podzielnych w sposób ciągły, naturalne uogólnienie tradycyjnych opisów operacji (np. [2, 4]). Występują one w niektórych procesach technologicznych a ponadto, można je wykorzystać do aproksymacyjnego opisu operacji o charakterze dyskretnym. Zagadnienie rozdziału zasobów z operacjami opisanymi za pomocą tego typu modeli rozpatrywane były w [1, 3, 5, 6]. W pracy konstruuje się model matematyczny dla znacznie szerszej klasy zadań niż te, które były rozwiązywane do tej pory, co rozszerza obszar możliwych zastosowań. Ponadto, w oparciu o pojęcie zbioru uśrednionych stanów osiągalnych operacji, wprowadzone w [5], wykazuje się pewne specyficzne własności problemu, które ułatwiają konstrukcję algorytmów poszukiwania optymalnych rozdziałów oraz pozwalają sformułować proste (obliczeniowo) warunki istnienia rozwiązań optymalnych.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech $\{A_{ij}: i = 1,\dots,r_j;\ j = 1,\dots,p\}$ będzie zbiorem operacji pewnego procesu produkcyjnego a $\{Z_1,\dots,Z_p\}$ zbiorem zasobów. Operacje A_{ij}, $i = 1,\dots,r_j$ wykorzystują zasób j-tego rodzaju, $j = 1,\dots,p$.

Operacja A_{ij} opisana jest równaniem

$$x_{ij}(t) = f_{ij}(u_i^j(t)), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

gdzie warunki brzegowe są następujące: $x_{ij}(t) = 0$, $t \leq t_{ijo}$ oraz $x_{ij}(t) = s_{ij} > 0$, $t_{ijf} \leq t$. W równaniu tym $x_{ij}(t)$ jest stanem operacji A_{ij} w chwili t, $u_i^j(t)$ ilością zasobu Z_j, biorącego udział w realizacji tej operacji w chwili t (natężeniem dopływu zasobu). Operację A_{ij} uważamy za zrealizowaną, jeżeli jej stan osiągnął dla pewnego czasu t_{ijf} zadany stan końcowy s_{ij}. Stan końcowy operacji A_{ij} interpretujemy jako rozmiar zadania realizowanego w ramach tej operacji. Proces produkcyjny uważamy za skończony, gdy wszystkie jego operacje zostały zrealizowane. Przez T będziemy oznaczać czas zakończenia procesu produkcyjnego.

Zakłada się, że $f_{ij}: R_+ \to R_+$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą oraz $f_{ij}(0) = 0$.

Kolejność realizacji poszczególnych operacji jest określona przez skierowany, spójny i acykliczny graf z jednym początkowym i jednym końcowym wierzchołkiem, w którym łuki odpowiadają operacjom a wierzchołki zdarzeniom czasowym.

Na zasoby mogą być nakładane różnego rodzaju ograniczenia. Wyróżniamy dwa podstawowe typy ograniczeń: ograniczenia chwilowe, które będziemy interpretować jako ograniczenia nałożone na natężenie dopływu zasobu do operacji oraz ograniczenia całkowe, tj. ograniczenia nałożone na zużycie zasobów podczas realizacji operacji.

<u>Ograniczenia chwilowe</u> na zasoby mają postać:

$$(u^1(t),\dots,u^p(t)) \in \bigtimes_{j=1}^{p} U_j, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

gdzie $u^j(t) = (u_1^j(t),\dots,u_{r_j}^j(t))$, $t \in [0, T]$, $j = 1,\dots,p$.

Zakładamy, że zbiory $U_j \subset R_+^{r_j}$, $j = 1,\dots,p$ spełniają warunki

(i) U_j jest zbiorem zwartym i wypukłym, $j = 1,\dots,p$

(ii) jeżeli $u^j \in U_j$ oraz $0 \leq \bar{u}_i^j \leq u_i^j$, $i = 1,\dots,r_j$ to $\bar{u}^j \in U_j$, $j = 1,\dots,p$. (3)

Zbiór U_j ma zazwyczaj postać:

$$U_j = \left\{ u \in R^{r_j} : \sum_{i=1}^{r_j} u_i \leq N_j, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,r_j \right\}, \tag{4}$$

gdzie N_j jest ilością zasobu j-tego rodzaju dostępną w każdej chwili (maksymalne natężenie dopływu j-tego rodzaju zasobu do operacji).

W sytuacji, kiedy występuje z_j zasobów j-tego rodzaju i każdy z tych zasobów bierze udział w realizacji operacji A_{ij}, $i = 1,\dots,r_j$, w ustalonej proporcji wówczas U_j ma postać

$$U_j = \left\{ u \in R^{r_j} : \sum_{i=1}^{r_j} \alpha_{ik} u_i \leq N_{jk}, \quad k = 1,\dots,z_j; \quad u_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,r_j \right\}, \tag{5}$$

gdzie $\alpha_{ik} u_i^j$ jest ilością k-tego zasobu j-tego rodzaju dla A_{ij}, zaś N_{jk} oznacza maksymalne natężenie dopływu tego zasobu.

W zagadnieniach, w których istotną rolę odgrywają ograniczenia nałożone na zużycie zasobów poszczególnych rodzajów, w praktyce występuje zawsze ograniczenie natężenia dopływu zasobów do poszczególnych operacji. W takich sytuacjach

$$U_j = \left\{ u \in R^{r_j} : 0 \leq u_i \leq a_i, \quad i = 1,\dots,r_j \right\}. \tag{6}$$

<u>Ograniczenia całkowe</u> są następujące:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{r_j} u_i^j(t)\, dt \leq K_j, \quad j = 1,\dots,p, \tag{7}$$

gdzie K_j jest maksymalnym zużyciem zasobu j-tego rodzaju w czasie wykonywania operacji A_{ij}, $i = 1,\dots,r_j$.

Zagadnienia optymalnego przydziału zasobów do operacji, jakie można rozpatrywać w oparciu o przedstawiony wyżej model matematyczny sprowadzamy do dwóch ogólnych zadań.

<u>Zadanie czasowo-optymalne</u>

Należy znaleźć $(u^1(t),\dots,u^p(t))$, $t \in [0, T]$, które spełnia ograniczenia (2), (7) i zapewnia wykonanie wszystkich operacji w minimalnym czasie T.

W zależności od postaci zbiorów U_j oraz tego, czy ograniczenie (7) występuje, czy też go brak, sformułowane zadanie może mieć wiele inter-

pretacji. Jeżeli występują tylko ograniczenia typu (4) lub (5), wówczas mamy do czynienia z problemem rozdziału zasobów, w którym maksymalne natężenia dopływu zasobów poszczególnych rodzajów są ograniczone. Dołączając ograniczenie (7), otrzymujemy problem rozdziału zasobów wielu rodzajów podwójnie ograniczonych - ograniczone są natężenia dopływu oraz zużycia zasobów poszczególnych rodzajów. W przypadku ograniczeń [illegible] (7) otrzymujemy problem, w którym pośrednio rozdziela się pomiędzy operacje zużycie zasobów poszczególnych rodzajów.

Zadanie kosztowo-minimalne

Znaleźć $(u^1(t),\dots,u^p(t))$, $t \in [0, T]$, gdzie T jest dane, które spełnia ograniczenie (2), zapewnia wykonanie wszystkich operacji w czasie T oraz minimalizuje koszt wykonania wszystkich operacji

$$Q(u^1(\cdot),\dots,u^p(\cdot)) = \sum_{j=1}^{p} c_j \sum_{i=1}^{r_j} \int_0^T u_i^j(t)dt, \tag{8}$$

gdzie c_j oznacza cenę jednostkową j-tego rodzaju zasobu.

3. REPREZENTACJE ZADAŃ ROZDZIAŁU ZASOBÓW W SKOŃCZENIE WYMIAROWEJ PRZESTRZENI LICZB RZECZYWISTYCH

Niech wierzchołki grafu reprezentującego ograniczenia kolejnościowe będą uporządkowane według zasady: jeżeli wierzchołek k poprzedza wierzchołek p, to $k < p$. Przez 0 oznaczamy wierzchołek początkowy a przez m wierzchołek końcowy. Uporządkowanie takie istnieje zawsze, a ponadto jest ono jednoznaczne, jeżeli graf jest silnie spójny. W przypadku grafu, nie spełniającego tego warunku, wybieramy jeden z możliwych wariantów takiego uporządkowania.

Na zbiorze wierzchołków $\{0,1,\dots,m\}$ określamy funkcję przyporządkowującą każdemu wierzchołkowi k liczbę $t_k \in [0, T]$, $t_k = \varphi(k)$, według zasady: $t_0 = 0$, $t_m = T$, $t_k \geqslant t_{k-1}$ dla $k = 1,\dots,m$. Liczby t_k będziemy interpretować jako czasy, w których zachodzą zdarzenia odpowiadające wierzchołkom grafu. Zbiór wszystkich funkcji φ dla ustalonego T oznaczamy przez Φ_T.

Dalsze rozważania prowadzimy w oparciu o następujące pojęcia:

$R_k = \{(i,j)$: operacja A_{ij} może być wykonywana pomiędzy $k-1$ a k-tym zdarzeniem$\}$, $k = 1,\dots,m$;

$U_j^k = \{u^j = (u_1^j,\dots,u_{r_j}^j) \in U_j:\ u_i^j = 0$ dla $(i,j) \notin R_k\}$,

$j = 1,\dots,p$; $k = 1,\dots,m$;

$$U_T = \Big\{ u(\cdot) = (u^1(\cdot),\dots,u^p(\cdot)) : u^j(\cdot) : [0,T] \to R^{r_j} \text{ jest przedziałami ciągła,}$$
$$\forall t \in (\varphi(k-1), \varphi(k)],\ u^j(t) \in U_j^k,\ k = 1,\dots,m,$$
$$u^j(0) \in U_j^1,\ j = 1,\dots,p,\ \varphi \in \Phi_T \Big\};$$

Elementem zbioru U_T jest rozdział zasobów określony dla przedziału czasowego $[0,T]$, spełniający ograniczenia chwilowe, dla którego ponadto określone są liczby t_k (spełniające warunki: $t_0 = 0$, $t_m = T$, $t_k \geq t_{k-1}$, $k = 1,\dots,m$) takie, że jeżeli operacja A_{ij} nie może być wykonywana pomiędzy zdarzeniami $k-1$ i k, to $u_i^j(t) = 0$ dla $t \in (t_{k-1}, t_k]$.

$$P_T = \Big\{ v = (v^1,\dots,v^p) : v^j = (v_1^j,\dots,v_{r_j}^j, v_{r_j+1}^j) \Big\},$$

$$v_i^j = \frac{1}{T}\int_0^T f_{ij}(u_i^j(t))dt,\quad i = 1,\dots,r_j,$$

$$v_{r_j+1}^j = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{r_j} u_i^j(t)dt,\quad j = 1,\dots,p,\ \Big\{ u(\cdot) \in U_T \Big\},\quad T > 0;$$

$$v_j^k = \Big\{ v^j = (v_1^j,\dots,v_{r_j}^j, v_{r_j+1}^j) : v_i^j = f_{ij}(u_i^j),$$

$$i = 1,\dots,r_j,\ v_{r_j+1}^j = \sum_{i=1}^{r_j} u_i^j,\ \Big\{ u^j \in U_j^k \Big\},$$

$$j = 1,\dots,p;\quad k = 1,\dots,m;$$

$$v^k = \mathop{\times}_{j=1}^{p} v_j^k,\quad k = 1,\dots,m;$$

$$V = \Big\{ v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v^k : \lambda \in S^m,\quad v^k \in \mathrm{cov}^k,\quad k = 1,\dots,m \Big\},$$

gdzie

$$S^m = \Big\{ \lambda \in R^m : \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,\ \lambda_k \geq 0,\quad k = 1,\dots,m \Big\}.$$

Lemat 1

Dla każdego $T > 0$ zachodzi

$$P_T = V$$

Dowód wynika z Lematu 1 w [5].
Niech F_T będzie funkcjonałem odwzorowującym zbiór U_T na $P_T \subset R^{n+p}$, $n = \sum_{j=1}^{p} r_j$, zgodnie z definicją zbioru P_T. Na podstawie Lematu 1 mamy, że $F_T(U_T) = V$.
W oparciu o tożsamość zbiorów P_T i V występującą dla każdego $T > 0$ udowodnić można następujące twierdzenia i własności.

Twierdzenie 1

W zadaniu czasowo-optymalnym $u^*(\cdot) \in U_{T^*}$ jest optymalnym rozdziałem zasobów wtedy i tylko wtedy, gdy $v^* = F_{T^*}(u(\cdot))$ oraz T^* są rozwiązaniem zadania:

$$\min_{v,T} T \tag{9}$$

przy ograniczeniach

(i) $v \in V$;

(ii) $Tv_i^j = s_{ij}$, $i = 1,\dots,r_j$, $j = 1,\dots,p$;

(iii) $Tv_{r_j+1}^j \leq K_j$, $j = 1,\dots,p$.

Własność 1

Rozwiązanie zadania czasowo-optymalnego istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie zadania (9).

Twierdzenie 2

W zadaniu kosztowo-optymalnym $u^*(\cdot) \in U_T$ jest optymalnym rozdziałem zasobów wtedy i tylko wtedy, gdy $v^* = F_T(u^*(\cdot))$ jest rozwiązaniem zadania

$$\min_{v} \sum_{j=1}^{p} c_j v_{r_j+1}^j \tag{10}$$

przy ograniczeniach

(i) $v \in V$;

(ii) $Tv_i^j = s_{ij}$, $i = 1,\dots,r_j$, $j = 1,\dots,p$.

Własność 2

Rozwiązanie zadania kosztowo-optymalnego istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie zadania (10).

W dalszym ciągu zajmiemy się tylko zadaniem czasowo-optymalnym rozdziału wielu rodzajów zasobów oraz jego odpowiednikiem w skończenie wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, zadaniem (9).

Niech V będzie zbiorem skonstruowanym w ten sam sposób jak zbiór V, ale dla przypadku braku ograniczeń kolejnościowych (przyjmujemy wtedy, że $m = 1$ a zbiór R_1 jest równy zbiorowi wszystkich operacji). Prawdziwy jest wtedy następujący Lemat.

Lemat 2

$$V \subset V' \subset \sum_{k=1}^{m} \mathrm{co}V^k.$$

W oparciu o Lemat 2 można wykazać prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3

Zadanie (9) posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające mu zadanie z wstawionym w miejsce V zbiorem V' posiada rozwiązanie.

Na podstawie Twierdzenia 1 i 3 możemy stwierdzić, że istnienie rozwiązania zadania czasowo-optymalnego rozdziału wielu rodzajów zasobów jest cechą niezmienniczą względem ograniczeń kolejnościowych. Własność ta w znakomity sposób ułatwia konstruowanie obliczeniowych warunków istnienia rozwiązania. Na przykład, dla zbiorów U_j o postaci (4) można wykazać, przyjmując szeregową kolejność wykonywania operacji, prawdziwość następującego warunku.

Własność 3

Niech funkcje f_{ij} będą rosnące, zbiory U_j mają postać (4) oraz

$$A_j = \sum_{i=1}^{r_j} \inf_{\frac{s_{ij}}{f_{ij}(N_j)} \leq \tau} \tau f_{ij}^{-1}\left(\frac{s_{ij}}{\tau}\right)$$

Wtedy istnienie rozwiązania zadania czasowo-optymalnego jest równoważne warunkowi:

$A_j \leq K_j$, jeżeli we wszystkich r_j zadaniach optymalizacji występujących w definicji A_j istnieją skończone rozwiązania,

lub

$A_j < K_j$, w przeciwnym przypadku,

dla $j = 1,\ldots,p$.

Sprawdzanie warunku podanego w powyższej własności jest proste, w przypadku gdy f_{ij} są wklęsłe lub wypukłe. Zachodzi bowiem:

$$\inf_{\frac{s_{ij}}{f_{ij}(N_j)} \leq \tau} \tau f_{ij}^{-1}\left(\frac{s_{ij}}{\tau}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{\tau \to \infty} \tau f_{ij}^{-1}\left(\frac{s_{ij}}{\tau}\right), & \text{jeżeli } f_{ij} \text{ jest wklęsła,} \\ N_j \frac{s_{ij}}{f_{ij}(N_j)}, & \text{jeżeli } f_{ij} \text{ jest wypukła.} \end{cases}$$

4. WŁASNOŚCI ORAZ KONSTRUKCJA OPTYMALNYCH ROZDZIAŁÓW ZASOBÓW W ZAGADNIENIU CZASOWO-OPTYMALNYM

Niech v^* oraz T^* będą rozwiązaniem zadania (9). Z Twierdzenia 1 wynika, że każde $u^*(\cdot) \in \left\{u(\cdot) \in U_{T^*}: F_{T^*}(u(\cdot)) = v^*\right\} \triangleq F_{T^*}^{-1}(v^*)$ jest rozdziałem optymalnym. Pokażemy teraz prostą konstrukcję elementu zbioru $F_{T^*}^{-1}(v^*)$. W tym celu, wykorzystując definicję zbioru V oraz fakt, że

$$\mathrm{co} \sum_{j=1}^{p} V_j^k = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{co}\, V_j^k,$$

przyporządkujemy zadanie (9) do następującej równoważnej postaci

$$\min_{\left\{\tau_k,\, v^{jk}\right\}} \sum_{k=1}^{m} \tau_k, \tag{12}$$

przy ograniczeniach

(i) $v^{jk} \in \mathrm{co}\, V_j^k$, $k = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,p$;

(ii) $\sum_{k=1}^{m} \tau_k v_i^{jk} = s_{ij}$, $i = 1,\ldots,r_j$; $j = 1,\ldots,p$;

(iii) $\sum_{k=1}^{m} \tau_k v^{jk}_{r_j+1} \leq K_j, \quad j = 1,\dots,p;$

(iv) $\tau_k \geq 0, \quad k = 1,\dots,m.$

Niech

$$I_{jk} = \left\{ i \in \{1,\dots,r_j\} : (i,j) \in R_k \right\}, \quad j = 1,\dots,p; \quad k = 1,\dots,m,$$

$$Q_{ij} = \left\{ k \in \{1,\dots,m\} : (i,j) \in R_k \right\}, \quad i = 1,\dots,r_j; \quad j = 1,\dots,p.$$

Niech τ^*_k, v^{*jk}, $k = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,p$, stanowią rozwiązanie zadania (12).
Skoro $v^{*jk} \in \mathrm{co}\, V^k_j$, stąd na mocy Twierdzenia Carathédory'ego istnieją $\alpha^{jk} \in S^{d_{jk}+2}$, gdzie $d_{jk} = \mathrm{card}\, I_{jk}$ oraz

$u^{jkl} = (u^{jkl}_1,\dots,u^{jkl}_{r_j}) \in U^k_j, \quad l = 1,\dots,d_{kj}+2; \quad k = 1,\dots,m; \; j = 1,\dots$

takie, że

$$v^{*jk} = \sum_{l=1}^{d_{jk}+2} \alpha^{jk}_l \left(f_{1j}(u^{jkl}_1),\dots,f_{r_j j}(u^{jkl}_{r_j}), \sum_{i=1}^{r_j} u^{jkl}_i \right)$$

dla $k = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,p$. Niech $t_k = \sum_{q=0}^{k} \tau^*_q$, $k = 0,\dots,m$ gdzie $\tau^*_0 = 0$.
Zdefiniujmy funkcję $\bar{u}(t) = (\bar{u}^1(t),\dots,\bar{u}^p(t))$, $t \in \left[0, T^* = \sum_{k=1}^{m} \tau^*_k\right]$ w następujący sposób:

$$\bar{u}^j(t) = u^{jkl} \text{ dla } \left[t_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) \sum_{q=0}^{l-1} \alpha^{jk}_q\right] < t \leq \left[t_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) \sum_{q=0}^{l} \alpha^{jk}_q\right],$$

$$l = 1,\dots,d_{jk}+2; \tag{13}$$

$$k = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,p,$$

$$u^j(0) = u^{j11}, \quad j = 1,\dots,p.$$

gdzie $\alpha_0^{jk} \triangleq 0$. Oczywiste jest, że $v^* \triangleq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* (v^{*1k}, \ldots, v^{*pk})$, gdzie $\lambda_k^* \triangleq$ $= \tau_k / \sum_{q=1}^{m} \tau_q^*$, jest rozwiązaniem zadania (9). Zatem, funkcja $\bar{u}(\cdot)$ zdefiniowana w (13) jest elementem zbioru $F_T^{-1}(v^*)$, czyli optymalnym rozdziałem zasobów. Należy tu zauważyć, że wielkości wykorzystane w definicji funkcji $\bar{u}(\cdot)$ można otrzymać wprost, rozwięzując zadanie (12) przepisane do postaci wykorzystującej zmienne τ_k, α_l^{jk}, u_i^{jkl}.

Należy zauważyć, że funkcja $\bar{u}_i^j(\cdot)$ jest odcinkami stała o liczba przedziałów, w których jej wartość jest większa od zera, jest co najwyżej równa $\sum_{k \in Q_{ij}} (d_{jk}+2)$.

W przypadku gdy wszystkie funkcje f_{ij}, są wklęsłe lub wypukłe, zadanie (12) oraz konstrukcja optymalnego rozdziału znacznie upraszcza się. Jeżeli f_{ij} są wklęsłe, można wykazać (w oparciu o rezultaty pracy [5]), że w zadaniu (12) zbiory cov_j^k można zastąpić przez V_j^k, konsekwencją czego jest to, że liczba przedziałów, w których wartość funkcji $u_i^j(\cdot)$ jest większa od zera, co najwyżej równa card Q_{ij}. Przypadek, kiedy f_{ij} są wypukłe rozpatrzony zostanie poniżej.

5. CZASOWO-OPTYMALNY ROZDZIAŁ ZASOBÓW DLA WYPUKŁYCH MODELI OPERACJI

Zakładamy teraz, że wszystkie f_{ij} są wypukłe i rosnące a zbiory U_j mają postać (4). Oznaczmy przez W_{jk} zbiór punktów ekstremalnych zbioru U_j^k, $j = 1,\ldots,p$; $k = 1,\ldots,m$. Zachodzi

$$\bigcup_{k=1}^{n} W_{jk} = \left\{ \bar{u}^{j1}, \ldots, \bar{u}^{jr_j+1} \right\} = \left\{ N_j, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, N_j), \right.$$

$$\left. (0, 0, \ldots, 0) \right\}, \quad j = 1, \ldots, p$$

oraz

$$J_{jk} \triangleq \left\{ i \in \left\{ 1, \ldots, r_j+1 \right\} : \bar{u}^{ji} \in W_{jk} \right\} = I_{jk} \cup \left\{ r_j+1 \right\},$$

$$j = 1, \ldots, p; \quad k = 1, \ldots, m.$$

W pracy [5] wykazano, że dla każdego $v^{jk} \in \mathrm{cov}^{jk}$ istnieje zestaw $\alpha_s^{jk} \geq 0$, $s \in J_{jk}$ taki, że $\sum_{s \in J_{jk}} \alpha_s^{jk} = 1$ oraz

$$v_i^{jk} = \sum_{s\in J_{jk}} \alpha_s^{jk} \bar{v}_i^{js}, \quad i = 1,\dots,r_j; \quad v_{r_j+1}^{jk} \geqslant \sum_{s\in J_{jk}} \alpha_s^{jk} \bar{v}_{r_j+1}^{js},$$

gdzie $\bar{v}^{js}$ odpowiada $\bar{u}^{js}$, $s = 1,\dots,r_j+1$ (definicja zbioru V_j^k).

W oparciu o tę własność zadanie (12) sprowadza się do zadania

$$\min_{\{\tau_k,\ \alpha_i^{jk}\}} \sum_{k=1}^{m} \tau_k$$

przy ograniczeniach:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k\in Q_{ij}} \tau_k \alpha_i^{jk} f_{ij}(N_j) = e_{ij}, \quad i = 1,\dots,r_j; \quad j = 1,\dots,p;$$

$$\text{(ii)} \quad N_j \sum_{k\in Q_j} \tau_k \sum_{s\in I_{jk}} \alpha_s^{jk} \leqslant K_j, \quad j = 1,\dots,p;$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{s\in I_{jk}} \alpha_s^{jk} \leqslant 1, \quad k \in Q_j, \quad j = 1,\dots,p; \qquad (14)$$

$$\text{(iv)} \quad \tau_k \geqslant 0, \quad \alpha_s^{jk} \geqslant 0, \quad s \in I_{jk}, \quad k \in Q_j, \quad j = 1,\dots,p$$

gdzie

$$Q_j \triangleq \bigcup_{i=1}^{r_j} Q_{ij}, \quad j = 1,\dots,p.$$

Łatwo pokazać, że zadanie (14) posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$N_j \sum_{i=1}^{r_j} \frac{e_{ij}}{f_{ij}(N_j)} \leqslant K_j, \quad j = 1,\dots,p \qquad (15)$$

Spełnienie tego warunku jest zatem równoważne istnieniu czasowo-optymalnego rozdziału zasobów w rozważanym przypadku. Należy tu dodać, że warunek ten wynika również z własności 3.

Jeżeli zachodzi (15) to τ_k, α_i^{jk} spełniające (i), (iii), (iv) spełniają (ii). A zatem ograniczenie (ii) w zadaniu (14) można pominąć. Wprowadzając zmienne $y_{ijk} = \tau_k \cdot \alpha_i^{jk}$, $k \in Q_{ij}$, $i = 1,\dots,r_j$, $i=1,\dots,p$ sprowadzamy zadanie (14) do zadania programowania liniowego:

$$\min_{\{\tau_k,\ y_{ijk}\}} \sum_{k=1}^{m} \tau_k$$

przy ograniczeniach

$$\text{(i)} \sum_{k \in Q_{ij}} y_{ijk} = T_{ij} \triangleq \frac{s_{ij}}{f_{ij}(N_j)} \qquad i = 1,\dots,r_j; \quad j = 1,\dots,p;$$

$$\text{(ii)} \sum_{i \in I_{jk}} y_{ijk} \leq \tau_k, \quad k \in Q_j; \quad j = 1,\dots,p; \tag{16}$$

$$\text{(iii)} \ \tau_k \geqslant 0, \quad y_{ijk} \geqslant 0, \quad k \in Q_{ij}; \quad i = 1,\dots,r_j.$$

Zadanie to ma następującą równoważną postać:

$$\left\{\min_{y_{ijk}}\right\} \sum_{k=1}^{m} \max_{j:k \in Q_j} \left\{\sum_{i \in I_{jk}} y_{ijk}\right\}$$

przy ograniczeniach

$$\text{(i)} \sum_{k \in Q_{ij}} y_{ijk} = T_{ij}, \quad i = 1,\dots,r_j, \quad j = 1,\dots,p \tag{17}$$

$$\text{(ii)} \ y_{ijk} \geqslant 0, \quad k \in Q_{ij}; \quad i = 1,\dots,r_j; \quad j = 1,\dots,p.$$

Do zadania tego typu sprowadzono w pracy [3] problem czasowo-optymalnego rozdziału zasobów wielu rodzajów bez ograniczeń całkowych dla liniowych funkcji f_{ij} i zaproponowano dla jego rozwiązania algorytm znacznie prostszy niż standardowe algorytmy programowania liniowego. Algorytm ten bez modyfikacji można zastosować do rozwiązania zadania (17) a jego podstawową zaletą jest to, że uzyskuje rozwiązanie w m krokach.

Niech y^*_{ijk}, $k \in Q_{ij}$; $i = 1,\dots,r_j$; $j = 1,\dots,p$ będą rozwiązaniami zadania (17).

Wtedy

$$\tau^*_k = \max_{j:k \in Q_j} \left\{\sum_{i \in I_{jk}} y^*_{ijk}\right\}, \quad k = 1,\dots,m$$

$$\sigma^*_{ijk} = \begin{cases} \dfrac{y^*_{ijk}}{\tau^*_k} & \tau^*_k \neq 0 \\ 0 & \tau^*_k = 0 \end{cases} \quad k \in Q_{ij}, \quad i = 1,\dots,r_j, \quad j = 1,\dots,p$$

są rozwiązaniami zadania (14).

Niech

$$I_{jk} = \left\{ l_1, \ldots, l_{d_{jk}} \right\}^{x)}$$

oraz

$$t^*_k = \sum_{s=1}^{k} \tau^*_s,$$

$$k = 1, \ldots, m; \quad t^*_0 = 0.$$

Zdefiniujmy funkcję $\bar{u}(t) = (\bar{u}^1(t) \ldots \bar{u}^p(t))$, $t \in \left[0, t^*_m\right]$ w następujący sposób

$$\bar{u}^j_{l_q}(t) = N_j \quad t^*_{k-1} + \tau^*_k \sum_{s=0}^{q-1} \alpha^{*jk}_{l_s} < t \leq t^*_{k-1} + \tau^*_k \sum_{s=0}^{q} \alpha^{jk}_{l_s}$$

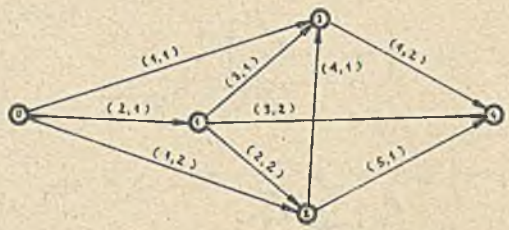
$$q = 1, \ldots, d_{jk}; \quad k \in Q_j, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{18}$$

Dla $t \in \left[0, t^*_m\right]$, dla których $\bar{u}^j_i(t)$ nie zostało określone w (18) przyjmujemy, że jest równe zero.
Funkcja $\bar{u}(\cdot)$ określa czasowo-optymalny rozdział zasobów w rozważanym przypadku.

6. PRZYKŁAD

Niech $p = 2$, $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ a zbiory U_1, U_2 mają postać (4) i $N_1 = 2$, $N_2 = 4$. Funkcje $f_{i1}(u^1_i) = (u^1_i)^2$, $i = 1, \ldots, 5$; $f_{i2}(u^2_i) = u^2_i$, $i = 1, \ldots, 4$; a $s_{11} = 8$, $s_{21} = 4$, $s_{31} = 16$, $s_{41} = 20$, $s_{51} = 16$, $s_{12} = 12$, $s_{22} = 8$, $s_{32} = 16$, $s_{42} = 20$, $K_1 = 18$, $K_2 = 14$.
Ograniczenia kolejnościowe określone są za pomocą grafu przedstawionego na rys. 1.
$R_1 = \left\{(1,1), (1,2), (2,1)\right\}$, $R_2 = \left\{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (2,2)\right\}$,
$R_3 = \left\{(1,1), (3,1), (3,2), (4,1), (5,1)\right\}$, $R_4 = \left\{(3,2), (5,2), (4,2)\right\}$.

x) W celu uproszczenia notacji opuszczamy indeks jk przy l.

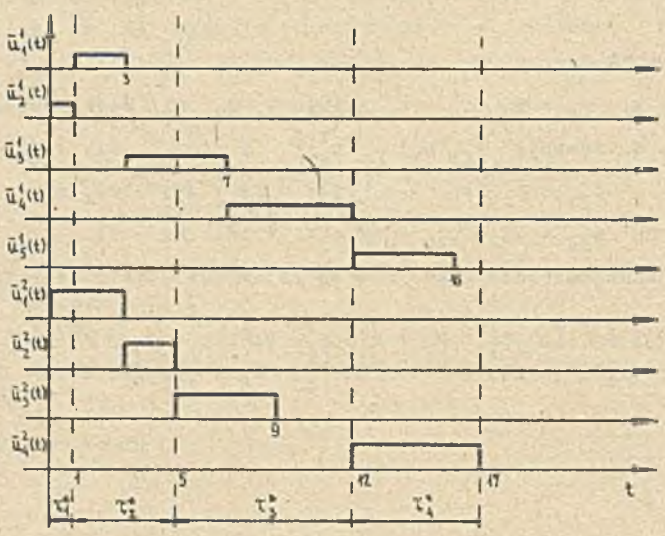


Rys. 1. Graf określający kolejność wykonywania operacji

Czasowo-optymalny rozdział zasobów istnieje, ponieważ

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{s_{i1}}{4} = 16 \leq 18, \quad \sum_{i=1}^{4} \frac{s_{i2}}{4} = 14 \leq 14.$$

Po rozwiązaniu zadania (17) otrzymujemy $y^*_{112} = 2$, $y^*_{211} = 1$, $y^*_{312} = 2$, $y^*_{313} = 2$, $y^*_{413} = 5$, $y^*_{514} = 1$, $y^*_{121} = 1$, $y^*_{122} = 2$, $y^*_{222} = 2$, $y^*_{323} = 4$, $y^*_{424} = 5$, a pozostałe y^*_{ijk} są równe zero, natomiast $\tau^*_1 = 1$, $\tau^*_2 = 4$, $\tau^*_3 = 7$, $\tau^*_4 = 5$. Stąd $t^*_1 = 1$, $t^*_2 = 5$, $t^*_3 = 12$, $t^*_4 = 17$.



Rys. 2. Czasowo-optymalny rozdział zasobów $\bar{u}(\cdot)$

Rozdział czasowo-optymalny (18) ma następującą postać:

$\bar{u}_1^1(t) = 2, \quad t \in (1,3]; \quad \bar{u}_2^1(t) = 2, \quad t \in (0,1]; \quad \bar{u}_3^1(t) = 2, \quad t \in (3,7];$

$\bar{u}_4^1(t) = 2, \quad t \in (7,12]; \quad \bar{u}_5^1(t) = 2, \quad t \in (12,16]; \quad \bar{u}_1^2(t) = 4, \quad t \in (0,3];$

$\bar{u}_2^2(t) = 4, \quad t \in (3,5]; \quad \bar{u}_3^2(t) = 4, \quad t \in (5,9]; \quad \bar{u}_4^2(t) = 4, \quad t \in (12,17]$

a poza tymi przedziałami $\bar{u}_i^j(t)$ jest równe 0. Minimalna wartość kryterium $T^* = t_4^* = 17$.

LITERATURA

[1] Бурков В.Н.: Оптимальное управление комплексами операций. Материалы Конгреса ИФАК, Варшава, 1969, тетрадь 35, стр. 46-57.

[2] Davis E.W.: Project Scheduling under Resource Constraints: Historical Review and Categorization of Procedures, AIIE Trans., vol. 5 (1973), s. 297-313.

[3] Деменчук В.: Потоковая интерпретация и алгоритм решения задачи оптимального по времени распределения ограниченных ресурсов. Автоматика, Телемеханика, 10 1969 , стр. 168-173.

[4] Elmaghraby S.E.: Activity Networks Project Planning and Control by Network Models, Wiley, New York, 1977.

[5] Nowicki E., Zdrzałka S.: Optimal control of a complex of independent operations, Inf. J. Systems Sci., 12 (1981), No. 1, s. 77-93.

[6] Węglarz J.: Project Scheduling with Continuously - Divisible, Doubly Constrained Resources, Managament Science 27 (1981), No. 9, s. 1040-1053.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Konrad WALA

Wpłynęło do Redakcji 10.05.1982 r.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВОЙСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ НЕСКОЛЬКИХ ВИДОВ В СЕТЯХ ОПЕРАЦИЙ

Р е з ю м е

Рассматривается задача оптимального по быстродействию и стоимости распределения двойственно-ограниченных ресурсов нескольких видов в сетях операций. Показывается, что задача сформулированная в функциональном пространстве эквивалентна некоторой задаче оптимизации в конечномерном вещественном пространстве. Получены необходимые и достаточные условия существования оптимального решения и показаны методы нахождения оптимальных решений, для которых мощности ресурсов являются кусочно-постоянными функциями времени.

OPTIMAL ALLOCATION OF DOUBLY CONSTRAINED MULTIRESOURCES IN AN ACTIVITY NETWORK

S u m m a r y

The paper deals with a project scheduling problem concerning the optimal (time, cost) allocation of doubly constrained resources of many types in an activity network where the performance speed of an activity at any moment of time is a function of resource amount. It is shown that the problem stated in a function space is equivalent to a problem in a finite-dimensional space. Necessary and sufficient conditions for existence of optimal solution are derived and a method for seeking piecewise-constant optimal schedules is proposed.