ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 63 Nr kol. 735

Wojciech SIBILSKI

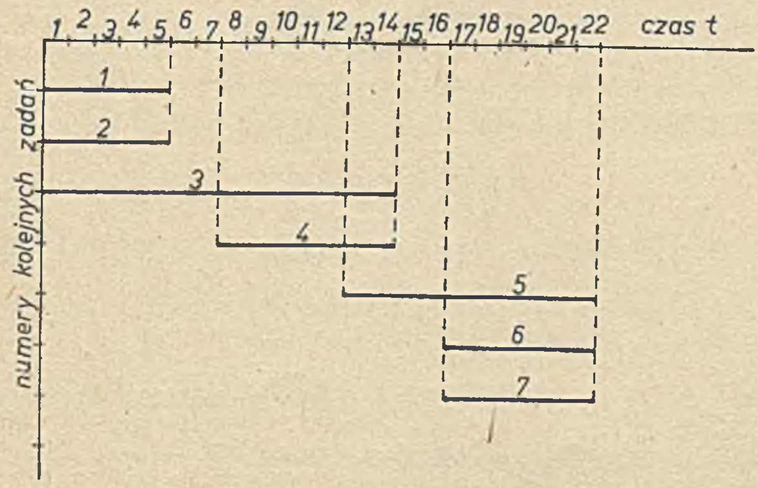
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej

ZAGADNIENIE OPTYMALNEGO PRZYDZIAŁU REALIZATORÓW W PEWNEGO TYPU KOMPLEKSIE ZADAŃ ZALEŻNYCH

Streszczenie. W pracy jest rozważany pewien specyficzny typ kompleksu zadań zależnych oraz związany z nim problem minimalno-kosztowego przydziału zadań do realizatorów. Problem ten został sformułowany w postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego. W pracy wykazano pewne własności takiego sformułowania problemu, co umożliwiło udowodnienie, dla ograniczeń równościowych, twierdzenia o całkowitoliczbowości rozwiązania optymalnego tego problemu.

1. WSTĘP

W pracy jest rozważany pewien szczególny typ kompleksu zadań zależnych. Poszczególne zadania wchodzące w skład kompleksu mają określone względne chwile ich rozpoczęcia i zakończenia. Stąd też możliwe jest zbudowanie a priori diagramu czasowego opisującego harmonogram realizacji poszczególnych zadań kompleksu. Przykładowy taki diagram został przedstawiony na rys. 1. Opisuje on żądane chwile rozpoczęcia i zakończenia każdego



Rys. 1. Przykładowy diagram

zadania, ze względu na stan zaawansowania pozostałych zadań kompleksu. Przykładowo (patrz rys. 1) zadanie 4 powinno być rozpoczęte w chwili, w której zadanie 3 znajdzie się w ściśle określonej fazie realizacji. Sytuacja taka występuje wówczas, gdy mamy do czynienia z procesem przemysłowym którego reżim technologiczny wymusza rozpoczynanie i kończenie każdego zadania w ściśle określonych chwilach czasu, zależnych od stanu zaawansowania zadań rozpoczętych wcześniej i uniemożliwia przerywanie realizacji zadań.

Dla zadanej liczby uniwersalnych realizatorów powstaje wówczas, przy określonych dodatkowo kosztach realizacji każdego zadania na każdym realizatorze, problem takiego przydziału realizatorów do zadań kompleksu, aby sumaryczne koszty realizacji kompleksu zadań były minimalne. Problem powyższy można sformułować również w zagadnieniach zarządzania złożonymi przedsięwzięciami typu badawczego, czy też projektowego.

2. DEFINICJE I OZNACZENIA

W celu ścisłego sformułowania problemu zostaną wprowadzone następujące definicje i oznaczenia.

Niech:

- T oznacza zbiór dyskretnych chwil czasu, należących do przedziału czasu $\langle 0,T \rangle$:

$$\mathbf{T} \stackrel{df}{=} \{1,2,\dots,T\}.$$

- M oznacza zbiór zadań, które należy zrealizować w przedziale czasu $\langle 0,T \rangle$

$$M \stackrel{df}{=} \{1,2,\dots,m\}.$$

- N oznacza zbiór uniwersalnych realizatorów (każde zadanie ze zbioru M może być wykonane przez dowolny z realizatorów ze zbioru N):

$$N \stackrel{df}{=} \{1,2,\dots,n\},$$

- T_j oznacza zbiór chwil, w przeciągu których należy wykonać zadanie $j \in M$

$$T_j \stackrel{df}{=} \{t \in \mathbf{T} \mid \text{zadanie } j \text{ jest realizowane, zgodnie z zadanym diagramem czasowym opisującym kompleks zadań, w chwili } t\},$$

(zakłada się, że każdy zbiór $T_j \subseteq \mathbf{T}$ zawiera <u>kolejne</u> liczby naturalne, tzn. że $\sim(\exists t \in \mathbf{T})$, że $\min T_j < t < \max T_j$ i zadanie j nie jest, zgodnie z zadanym diagramem, realizowane w chwili t),

- M_t oznacza zbiór zadań realizowanych w chwili $t \in \mathbf{T}$:

$$M_t \overset{df}{=} \left\{ j \in M \mid \text{zadanie } j \text{ jest realizowane w chwili } t \right\},$$

- $\tau \overset{df}{=} \left\{ t \in \mathbf{T} \,\middle|\, \forall (t_1, t_2 \in \tau): M_{t_1} \neq M_{t_2} \text{ i } \sim (M_{t_1} \subset M_{t_2}) \right\}.$

Będzie użyteczne ponadto, w trakcie dowodzenia całkowitoliczbowości rozwiązań bazowych problemu, wprowadzenie pewnych zasad numeracji zadań $j \in M$. Niech mianowicie zadania te będą ponumerowane w taki sposób, aby spełnione były następujące warunki:

a) jeśli $\min T_j < \min T_k$, to $j < k$,
b) jeśli $\min T_j = \min T_k$ i $\max T_j < \max T_k$, to $j < k$,

gdzie j, k - numery zadań.

W celu zilustrowania wprowadzonych definicji rozważmy przykładowy diagram przedstawiony na rys. 1. Zachodzi dla niego:

$\mathbf{T} = \{1,2,\dots,22\}$, $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $T_1 = T_2 = \{1,2,3,4,5\}$,
$T_3 = \{1,2,\dots,14\}$, $T_4 = \{8,9,\dots,14\}$, $T_5 = \{13,14,\dots,22\}$,
$T_6 = T_7 = \{17,18,\dots,22\}$, $M_1 = M_2 = \dots = M_5 = \{1,2,3\}$,
$M_6 = M_7 = \{3\}$, $M_8 = M_9 = \dots = M_{12} = \{3,4\}$ itd.

Definicja zbioru τ nie jest jednoznaczna - np. następujące zbiory chwil: $\{1,3,17\}$, $\{1,13,18\}, \dots$, $\{1,13,22\}$, $\{1,14,17\}$, $\{1,14,18\}, \dots$, $\{1,14,22\}$, $\{2,13,17\}$, $\{2,13,18\}$ itd., spełniają warunki tej definicji. Nie prowadzi to jednak, jak się okaże, do niejednoznaczności w sformułowaniu problemu.

Można zauważyć, że nie jest konieczne określanie jednocześnie zbiorów T_j oraz M_t, gdyż jedne z nich można wyznaczyć na podstawie znajomości drugich. Znając zbiory T_j można określić zbiory M_t i odwrotnie - na podstawie znajomości zbiorów M_t można określić zbiory T_j. Mianowicie:

- jeśli dane są zbiory $T_1, T_2, \dots, T_m$, to dla każdego $t \in \mathbf{T}$ jest

$$M_t = \left\{ j \in M \,\middle|\, t \in T_j \right\}.$$

- jeśli dane są zbiory $M_1, M_2, \dots, M_T$, to dla każdego $j \in M$ jest

$$T_j = \left\{ t \in \mathbf{T} \,\middle|\, j \in M_t \right\}.$$

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważany problem można sformułować w postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego w sposób następujący. Dla zadanego diagramu czasowego opisującego pewien kompleks zadań rozważanego typu, a więc dla określonych zbiorów $\mathbf{T}$, M, T_j, $j \in M$ (lub M_t, $t \in \mathbf{T}$) oraz zbioru uniwersalnych realizatorów N i zadanych kosztów realizacji (kosztów przydziału) a_{ij} zadania j przez realizator i, dla $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$, należy znaleźć minimum funkcji celu

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}, \qquad (1)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \text{dla } j = 1,2,\ldots,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in M_t} x_{ij} \leqslant 1, \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,n,\ t \in \mathcal{T}, \qquad (3)$$

$$x_{ij} = 1 \text{ lub } 0, \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,m, \qquad (4)$$

gdzie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli zadanie } j \text{ ma zostać wykonane przez realizator } i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sformułowanym zadaniu chodzi o minimalizację sumarycznych kosztów realizacji zadań kompleksu. Ograniczenie (2) gwarantuje, że każde zadanie zostanie wykonane przez dokładnie jeden realizator, natomiast ograniczenie (3) zapewnia, że w każdej chwili czasu każdy realizator będzie wykonywał co najwyżej jedno zadanie.

Sformułowany problem jest nowy, w stosunku do znanych w literaturze. Różni się on w sposób istotny, ze względu na postać ograniczeń (3), od klasycznego zadania przydziału [1], [5]. Pokazany na rys. 1 przykładowy diagram sugeruje pewne podobieństwo problemu do zagadnień planowania sieciowego [3], czy też do zagadnień sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji [7]. W zagadnieniach planowania sieciowego, dla danego grafu opisującego kolejnościowe związki logiczne między poszczególnymi czynnościami, należy określić takie terminy rozpoczęcia i zakończenia każdej czynności, aby czas wykonania całego przedsięwzięcia był minimalny. Gdy problem polega na minimalizacji kosztów przedsięwzięcia, to również należy określić terminy rozpoczęcia i zakończenia każdej operacji - takie, aby czas realizacji kompleksu nie przekroczył zadanej liczby. Natomiast w rozważanym w pracy problemie terminy rozpoczęcia i zakończenia każdego zadania (czynności) są z góry określone, należy natomiast znaleźć taki przydział zadań do realizatorów, aby zminimalizować sumaryczny koszt wykonania wszystkich zadań. Sformułowany problem różni się również, z tych samych powodów co wyżej wymienione, od problemów optymalizacji kolejności operacji w dyskretnych systemach produkcyjnych przedstawionych w [2]. Ponadto, opisanego przez dany diagram kompleksu zadań nie można w ogólnym przypadku przedstawić w postaci grafu w konwencji "operacja na łuku", a z reguły tak przedstawiane są czynności w problematyce planowania sieciowego. Możliwe jest natomiast zobrazowanie zależności pomiędzy zadaniami opisanymi przez diagram typu przedstawionego na rys. 1, w postaci grafu w konwencji "operacja na wierzchołku". Istnieją diagramy, dla których otrzymany w tej konwencji graf okazuje się być grafem nieodwracalnym [6]. Próbując natomiast umiejscowić rozważany problem w kontekście zagadnień sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji należy wspomnieć o dotyczącej tych zagadnień umowie terminologicznej zaproponowanej w [7]: "Będziemy mówili o sterowaniu rozdziałem zadań, jeżeli każda operacja żąda w każdej chwili czasu jednej jednostki zasobu tylko jednego rodzaju. W pozostałych przypadkach powiemy o sterowaniu rozdziałem zasobów". W świetle powyższej umowy rozważany problem należałoby zakwalifikować do problematyki sterowania rozdziałem zadań. Jednakże w problematyce tej, omówionej w [7], występują jedynie zadania minimalno-czasowe.

4. WŁASNOŚCI PROBLEMU I TWIERDZENIE O CAŁKOWITOLICZBOWOŚCI ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO

Własność 1 (istnienie rozwiązania problemu)

Rozwiązanie problemu nie istnieje, jeśli

$$(\exists t \in \mathcal{T}): \text{card } M_t > n.$$

Inaczej - rozwiązanie problemu istnieje, jeśli

$$(\forall t \in \mathcal{T}): \text{card } M_t \leq n.$$

Z powyższego wynika, że minimalna liczba realizatorów, dla której istnieje rozwiązanie problemu n_{min}, jest określona następująco:

$$n_{min} = \max_{t \in \mathcal{T}} (\text{card } M_t).$$

Własność 2 (charakteryzacja problemu z ograniczeniami równościowymi)

Sformułowany w p. 3 problem jest, w ogólnym przypadku, problemem z ograniczeniami nierównościowymi, lecz w sytuacji gdy

$$(\forall t \in \mathcal{T}): \text{card } M_t = n,$$

to ograniczenia (3) stają się ograniczeniami równościowymi

$$\sum_{j \in M_t} x_{ij} = 1, \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,n, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{3'}$$

a problem staje się problemem z ograniczeniami równościowymi. Oczywiste jest, że jeśli rozważamy problem z ograniczeniami równościowymi, to n jest równe n_{min}.

Dla przykładowego diagramu przedstawionego na rys. 1, przyjęcie liczby realizatorów $n=3$ prowadzi do problemu z ograniczeniami równościowymi. Dla tego diagramu oraz danej macierzy kosztów realizacji zadań $\left[a_{ij}\right]_{3\times7}$ można przykładowe zadanie sformułować następująco: należy znaleźć minimum funkcji celu

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{7} a_{ij}x_{ij}, \tag{5}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\dots,7, \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1 \\ x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} = 1 \\ x_{i5} + x_{i6} + x_{i7} = 1 \end{array}\right\}, \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,3, \tag{7}$$

$$x_{ij} = 1 \text{ lub } 0, \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,\dots,7. \tag{8}$$

Zostanie pokazane, że dla ograniczeń równościowych wszystkie rozwiązania bazowe sformułowanego w p. 3 problemu są całkowitoliczbowe. Będzie to uprawniać do odrzucenia ograniczenia całkowitoliczbowego (4) na zmienne x_{ij} oraz, po wprowadzeniu ograniczeń na nieujemność tych zmiennych, do stosowania do rozwiązywania takich problemów znanych metod rozwiązywania ciągłych zadań programowania liniowego. Otrzymane rozwiązanie będzie zero-jedynkowe, gdyż prawa strona ograniczeń (2), (3') składa się wyłącznie z jedynek. Powyższe zostało sformułowane w postaci twierdzenia.

Twierdzenie

Sformułowany w p. 3 problem jest, dla ograniczeń równościowych, tzn. ograniczeń (2), (3') oraz przy dodatkowym ograniczeniu

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,n, \quad j = 1,2,\dots,m,$$

problemem programowania liniowego o wszystkich rozwiązaniach bazowych całkowitych.

Dowód

Rozważmy ograniczenia (2), (3') problemu. Dla rozpatrywanego przykładowego zadania są to ograniczenia (6), (7), a macierz ich współczynników przedstawiono na rys. 2. W ogólnym przypadku problemu z ograniczeniami równościowymi macierz ich współczynników będzie miała postać pokazaną na rys. 3. Przyjęto zasadę wypisywania ograniczeń (3') w kolejności zgodnej z kolejnością realizacji zadań w czasie. Przyjęcie takiej umowy ułatwi dostrzeżenie i wykorzystanie pewnych własności macierzy współczynników ograniczeń. Na rys. 3 oznaczono

$$k \overset{df}{=} \operatorname{card} \mathcal{T}.$$

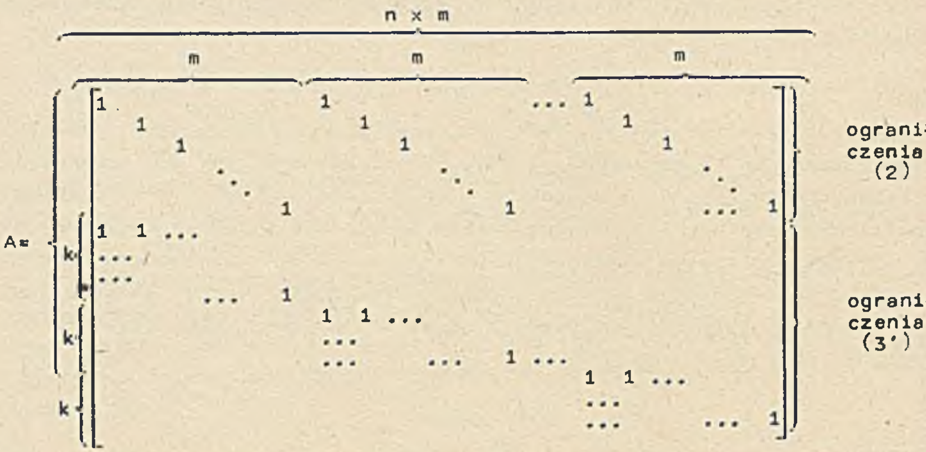
Zachodzi

$$k < m, \tag{9}$$

gdyż dla dwóch zadań możliwe jest tylko jedno rozważane ograniczenie, a każde kolejne zadanie (trzecie, czwarte itd.) wprowadza co najwyżej jedno dodatkowe ograniczenie, a zatem liczba ograniczeń k jest dla każdego realizatora, mniejsza od liczby zadań m. Łatwo można zauważyć, że wiersze macierzy współczynników ograniczeń (2), (3') są zależne. Usuwając grupę ostatnich k wierszy, posiadających jedynki w kolumnach związanych z ostatnim realizatorem (dla zadania przykładowego są to ostatnie 3 wiersze macierzy współczynników ograniczeń z rys. 2), otrzymamy macierz o niezależnych wierszach.

$$
\begin{array}{r|ccccccc|ccccccc|ccccccc|l}
 & \multicolumn{7}{c|}{\text{1 realizator}} & \multicolumn{7}{c|}{\text{2 realizator}} & \multicolumn{7}{c|}{\text{3 realizator}} & \\
 & 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21 & \text{numery kolumn} \\
 & x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}&x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}&x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37} & \text{zmienne problemu} \\
\hline
 & 1&&&&&&&1&&&&&&&1&&&&&& & \\
 & &1&&&&&&&1&&&&&&&1&&&&& & \\
 & &&1&&&&&&&1&&&&&&&1&&&& & \text{ograniczenia} \\
 & &&&1&&&&&&&1&&&&&&&1&&& & \text{(6)} \\
 & &&&&1&&&&&&&1&&&&&&&1&& & \\
 & &&&&&1&&&&&&&1&&&&&&&1& & \\
A= & &&&&&&1&&&&&&&1&&&&&&&1 & \\
 & 1&1&1&&&&&&&&&&&&&&&&&& & \\
 & &&1&1&1&&&&&&&&&&&&&&&& & \\
 & &&&&1&1&1&&&&&&&&&&&&&& & \\
 & &&&&&&&1&1&1&&&&&&&&&&& & \text{ograniczenia} \\
 & &&&&&&&&&1&1&1&&&&&&&&& & \text{(7)} \\
 & &&&&&&&&&&&1&1&1&&&&&&& & \\
 & &&&&&&&&&&&&&&1&1&1&&&& & \\
 & &&&&&&&&&&&&&&&&1&1&1&& & \\
 & &&&&&&&&&&&&&&&&&&1&1&1 & \\
\hline
\end{array}
$$

Rys. 2. Macierz współczynników ograniczeń dla przykładowego zadania



Rys. 3. Ogólna postać macierzy współczynników ograniczeń dla problemu z ograniczeniami równościowymi

Tę ostatnią oznaczmy przez A (rys. 3), a liczbę jej wierszy o kolumn odpowiednio przez p i r. Zachodzi:

$$p = m + (n - 1)k,$$

$$r = n\,m.$$

z (9) mamy

$$m = k + d,$$

gdzie $d > 0$, a więc:

$$p = n\,k + d$$
$$r = n\,k + n\,d,$$

z czego wynika, że

$$p < r.$$

W niniejszym dowodzie będzie wykorzystane, udowodnione w [4] oraz przedstawione w [5], następujące twierdzenie dotyczące macierzy $A = [a_{ij}]$, $i = 1,2,\dots,v$, $j = 1,2,\dots,w$, rzędu v, której wszystkie elementy są liczbami całkowitymi. Otóż twierdzenie to orzeka, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wielościan:

$$\sum_{j=1}^{w} a_{ij}x_j = b_i, \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,v,$$

$$x_j \geq 0, \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\dots,w$$

był całkowitoliczbowy (tzn. wszystkie jego wierzchołki - rozwiązania bazowe były całkowitoliczbowe) jest, aby dowolny minor stopnia v dla macierzy A był równy 0 lub ± 1. Dowód zostanie przeprowadzony oddzielnie dla dwóch następujących przypadków:

a) gdy minor stopnia p macierzy A nie zawiera żadnej kolumny związanej z ostatnim realizatorem, tzn. żadnej spośród kolumn $(n-1)m+1$, $(n-1)m+2,\dots,n\,m$ (odpowiednio - żadnej spośród ostatnich 7 kolumn macierzy współczynników ograniczeń zadania przykładowego),

b) gdy minor stopnia p macierzy A zawiera co najmniej jedną kolumnę związaną z ostatnim realizatorem, tzn. co najmniej jedną spośród kolumn $(n-1)m+1$, $(n-1)m+2,\dots,n\,m$ (odpowiednio - co najmniej jedną spośród ostatnich 7 kolumn macierzy współczynników ograniczeń zadania przykładowego).

Przypadek a)

Usuwając z macierzy A wszystkie kolumny związane z ostatnim realizatorem, otrzymamy macierz o wymiarach $p \times (r-m)$, o zależnych wierszach (takiego typu jak wyjściowa macierz, z której otrzymano macierz A). Wybierając z niej dowolne p kolumn otrzymamy macierz kwadratową $(p \times p)$ również o wierszach zależnych. Wyznacznik takiej macierzy jest oczywiście równy 0.

Przypadek b)

W przypadku tym będziemy wykorzystywać do obliczania wyznaczników dobrze znaną w algebrze numerycznej metodę, polegającą na redukcji wyznacznika stopnia s do wyznacznika stopnia $(s-1)$, zgodnie z równaniem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2s} \\ a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{s2} & a'_{s3} & \dots & a'_{ss} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}a_{1k}}{a_{11}}, \quad \text{dla} \quad i,k = 2,3,\dots,s$$

(zakładamy, że $a_{11} \neq 0$).

Również w tym przypadku jest możliwe, że pewne minory stopnia p będą równe zero. Na przykład będzie tak, gdy wybierzemy następujące kolumny macierzy współczynników ograniczeń zadania przykładowego: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17. Otrzymany minor przedstawiono na rys. 4. Z podanego przykładu wynika zatem, że warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym) niezerowości rozważanych minorów jest taki wybór kolumn z macierzy A, aby w każdym wierszu współczynników ograniczeń (2), wystąpiła co najmniej jedna jedynka (wiersz 6 oraz 7 minora z rys. 4 nie spełniają tego warunku). Inaczej mówiąc, każdy minor stopnia p powinien zawiewybrane kolumny macierzy z rys. 2

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 16 & 17
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & 1 & & & & & 1 & \\
 & & 1 & & & & & 1 & & & & & 1 \\
 & & & 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & &
\end{vmatrix}
$$

Rys. 4. Wybrany minor stopnia $p=13$ dla macierzy A z rys. 2

rać co najmniej jedną z kolumn: $1, m+1, 2m+1, \ldots, (n-1)m+1$, co najmniej jedną z kolumn: $2, m+2, 2m+2, \ldots, (n-1)m+2, \ldots$, oraz co najmniej jedną z kolumn: $m, 2m, 3m, \ldots, n\,m$ (patrz rys. 3). Wtedy możliwe jest uporządkowanie wybranych kolumn w taki sposób, poczynając od lewej strony, że w i-tej kolumnie (dla $i = 1,2,\ldots,m$) będzie występować jedynka w i-tym wierszu. Takie uporządkowanie pierwszych m kolumn ułatwia obliczenie wyznacznika wybranej podmacierzy $(p \times p)$.

Stosując opisaną wcześniej metodę obliczania wyznaczników, otrzymamy z minora stopnia p minor stopnia $(p-m)$, składający się z zer, jedynek oraz "-" jedynek. Przekształcając go otrzymamy równy mu z dokładnością do znaku, minor stopnia $(p-m)$, składający się wyłącznie z $(p-m)$ kolumn współczynników ograniczeń (3'). Powyższe przekształcenia zostały przykładowo zilustrowane na rys. 5. Otrzymany minor stopnia $(p-m)$ składa się wyłącznie z zer i jedynek, tak więc obliczając jego wartość (stosując opisaną metodę, można jedynie odjąć 0 lub 1 od 0 lub 1. We wszystkich tych przy-

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 17 & 21
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 14 & 10 & 11 & 12 & 15 & 17 & 21
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
 & & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
1 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & 1 \\
1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & & &
\end{vmatrix}
= \pm
\begin{vmatrix}
1 & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & 1 \\
 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & &
\end{vmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
-1 & & & & -1 & \\
-1 & -1 & -1 & & -1 & \\
 & & -1 & & & \\
1 & & & -1 & & \\
1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & -1
\end{vmatrix}
= \pm
\begin{vmatrix}
1 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & 1
\end{vmatrix}
$$

Rys. 5. Etapy obliczania wybranego minora stopnia p macierzy A z rys. 2

padkach otrzyma się również 0 lub 1, z wyjątkiem przypadku odjęcia 1 od 0, gdzie otrzymano by (-1). Istnieje więc możliwość otrzymania minora o elementach będących zerami, jedynkami i "-" jedynkami. Postępując dalej w ten sam sposób można, obliczając wyznacznik kolejnego, niższego stopnia, odjąć 0, 1 lub (-1) od 0, 1 lub (-1). We wszystkich tych przypadkach otrzyma się znowu 0, 1 lub (-1), z wyjątkiem sytuacji, w której odejmować się będzie 1 od (-1), albo (-1) od 1, kiedy otrzyma się odpowiednio (-2) albo 2. Wszystkie sytuacje, w których te dwa ostatnie przypadki mogą wystąpić można sprowadzić do przedstawionej na rys. 6. Ale z poniższej własności macierzy współczynników ograniczeń (3') wynika, że powyższa sytuacja nie może wystąpić.

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Rys. 6. Postać hipotetycznego wyznacznika

Własność 3

Jeśli w jakiejkolwiek kolumnie macierzy współczynników ograniczeń (3') wystąpi jedynka, a po niej (tzn. w następnym wierszu tej kolumny) 0, to wszystkie kolejne elementy tej kolumny (tzn. występujące w następnych wierszach) są również równe 0.

Własność powyższa jest konsekwencją wprowadzonych zasad numeracji zadań $j \in M$, umowy dotyczącej wypisywania ograniczeń (3') w kolejności zgodnej z kolejnością realizowania zadań w czasie oraz wynika z założenia, że każdy zbiór $T_j \subseteq T$ zawiera kolejne liczby naturalne. Tak więc w przypadku b) każdy minor stopnia p macierzy A (p x r) jest równy 0, 1 lub (-1).

Rozważane twierdzenie zostało więc udowodnione.

LITERATURA

[1] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, Warszawa 1978.

[2] Grabowski J.: Uogólnione zagadnienia optymalizacji kolejności operacji w dyskretnych systemach produkcyjnych. Pr. Nauk. Inst. Cyber.Tech. P. Wr., nr 50, Seria: Monografie nr 9, Wyd. Pol. Wrocł., Wrocław 1979.

[3] Grudzewski W., Szamkołowicz L.: Zastosowania teorii grafów i metod sieciowych w planowaniu przedsięwzięć organizacyjno-technicznych. Skrypt Pol. Wrocł., Wrocław 1974.

[4] Hoffman A.J., Kruskal J.B.: Integral boundary points of convex polyhedra. Linear inequalities and related systems, New Jersey 1956.

[5] Korbut A.A., Finkelsztejn J.J.: Programowanie dyskretne. PWN, Warszawa 1974.

[6] Szamkołowicz L.: O podstawach teorii planowania sieciowego I. Prace Naukowe Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej Politechniki Wrocławskiej, Wyd. Polit. Wrocł., Wrocław 1971.

[7] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Algorytmy sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji. Wydawnictwo Pol. Poznańskiej, Poznań 1978.

Recenzent: dr inż. Franciszek Marecki

Wpłynęło do Redakcji 15.05.82 r.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ В НЕКОТОРОМ КОМПЛЕКСЕ ЗАВИСИМЫХ ОПЕРАЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассуждается некоторый специфический тип комплекса зависимых операций и связанная с ним проблема такого назначения операций к исполнителям, которое имеет минимальную стоимость. Эта проблема была сформулирована в виде задачи линейного целочисленного программирования. В работе были показаны некоторые свойства такой формулировки проблемы,что сделало возможным, для равенственных ограничений, доказательство теоремы о целочисленности оптимального решения этой проблемы.

THE PROBLEM OF THE OPTIMAL ASSIGNMENT OF REALIZERS AT THE COMPLEX OF DEPENDENT TASKS OF THE SPECIAL TYPE

S u m m a r y

In the paper some specific type of the complex of dependent tasks and the problem of cost-minimal assignment of tasks to realizers are discused. The problem is formulated in terms of integer linear programming. It is possible, for the equality constraints,to prove that the optimal solution of the problem is integer-valued.