ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 63 Nr kol. 735

Andrzej ŚWIERNIAK

Instytut Automatyki Politechniki Śląskiej

STOCHASTYCZNIE OPTYMALNE STEROWANIE ROZDZIAŁEM ZASOBÓW W ZDECENTRALIZOWANYM SYSTEMIE DYNAMICZNYM

Streszczenie. Przedstawiono statystycznie optymalną strategię rozdziału zasobów w systemie złożonym ze statycznych podsystemów. Podsystemy powiązane są przez wspólne zasoby, których ilość zmienia się w czasie jako funkcja przeszłych decyzji. Dynamika systemu wynika z pojemności magazynu gromadzącego zasoby. Lokalni decydenci posiadają informacje dotyczące swoich podsystemów oraz przekazywane przez centralnego koordynatora, który posiada jedynie informację o ilości zasobów w systemie. Zakłada się, że istnieje wspólne kryterium optymalizacyjne i minimalizowana jest jego wartość oczekiwana.

1. WSTĘP

W pracy [1] przedstawiono oryginalną metodę dekompozycji i koordynacji statystycznie optymalnego statycznego rozdziału zasobów. W niniejszej pracy wykorzystano otrzymane tam wyniki do określenia algorytmów dla punktów decyzyjnych niższego poziomu w zdecentralizowanym systemie dla konkretnej postaci wskaźnika jakości i ograniczeń. Z drugiej strony założono, że centralny punkt decyzyjny określa ograniczenie przydziału zasobów dla całego systemu, przy czym równanie dynamiki systemu charakteryzuje zmienność zasobów w czasie. Realizacja wyznaczonego sterowania musi być dokonana na drodze numerycznej.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU PIERWOTNEGO A DOSTĘPNA INFORMACJA W SYSTEMIE

Rozważany będzie duży system złożony z M podsystemów, z których każdy sterowany jest przez pojedynczy punkt decyzyjny dysponujący zmienną decyzyjną $u_i(n)$ w n-tej chwili $(n = 0,1,\ldots,N-1)$. N jest znane. Zapotrzebowanie i-tego systemu na zasoby wynosi w chwili n-tej $z_i(n)$. Podsystemy powiązane są ze sobą przez ograniczenia w przydziale zasobów, o postaci:

$$\sum_{i=1}^{M} u_i(n) = q(n) \tag{1}$$

W przeciwieństwie do [2] o wielkości $q(n)$ decyduje centralny koordynator, biorąc pod uwagę dostępną informację o ogólnej wielkości zasobów $x(n)$ oraz posiadaną ocenę zapotrzebowań podsystemów $z_i(n)$. Zakładać będziemy, że straty w systemie zależą od niezaspokojonych potrzeb, przy czym podsystemy kooperują ze sobą tak, że minimalizowany wskaźnik pierwotny dla całego systemu może być przedstawiony w postaci:

$$I = \sum_{i=1}^{M} \sum_{n=0}^{N-1} L_i(u_i(n)\ z_i(n)\ n) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \sum_{i=1}^{M} (u_i(n) - z_i(n))^2 \tag{2}$$

Kwadratowa postać wskaźnika jakości może być traktowane jako aproksymacja drugiego rzędu rzeczywistej funkcji strat, natomiast $s_i(n)$ określa wagi strat w przyszłości. Można np. przyjąć:

$$s(n) = s^{-n}; \quad s \geqslant 1 \tag{3}$$

Dynamikę zmian ilości zasobów przedstawia równanie:

$$x(n+1) = ax(n) - bq(n) + d(n); \quad n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{3a}$$

$$x(0) > 0 \text{ - dane},$$

gdzie stałe $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 < b \leqslant 1$ określają stopień deprecjacji oraz nieodtwarzalność zasobów przydzielonych, natomiast $d(n)$ jest losowym dopływem zasobów. Dla uproszczenia zakładać będziemy, że $d(n)$ jest białym szumem o rozkładzie ograniczonym i wartości oczekiwanej $d(n)$.

Podobnie zakładamy, że $z_i(n)$ są białymi szumami o wartościach oczekiwanych $z_i(n)$. Zakłada się ponadto, że ilość zasobów w systemie w danej chwili jako również sumaryczny przydział zasobów są ograniczone - co zostanie dalej dokładniej określone. Z uwagi na niepełną informację rozwiązanie problemu pierwotnego, polegającego na minimalizacji wskaźnika (2), jest niemożliwe i należy sformułować problem wtórny, wynikający zarówno od dostępnej informacji jak i struktury decyzyjnej systemu.

3. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE PROBLEMU WTÓRNEGO

Lokalny punkt decyzyjny posiada informację o własnych zapotrzebowaniach oraz otrzymuje z centrum dyspozycyjnego informację koordynującą o wartości $q(n)$ oraz o systemie. Dopuszczalne algorytmy i-tego lokalnego punktu decyzyjnego mają zatem postać:

$$u_i(n) = A_i(z_i(n),\ q(n)); \quad n = 0,1,\ldots,N-1. \tag{4}$$

Natomiast dopuszczalne algorytmy centralnego koordynatora przyjmują postać

$$q(n) = B_n(x(n)). \tag{5}$$

Wtórny problem polega na wyborze spośród algorytmów dopuszczalnych takich, które minimalizują wtórny wskaźnik jakości o postaci:

$$I(A,B) = E\sum_{n=0}^{N-1} s(n) \sum_{i=1}^{M} (A_i(z_i(n), B_n(x(n)) - z_i(n))^2 \tag{6}$$

oraz ograniczeniu:

$$E|_{x(n)} \sum_{i=1}^{M} (A_i(z_i(n), B_n(x(n))) = B_n(x(n)), \tag{7}$$

gdzie $E|_{x(n)}$ oznacza operację warunkowego uśredniania przy zadanym $x(n)$. Ponadto obowiązuje równanie ewolucji zasobów (3) i ograniczenia na zmienną decyzyjną

$$Q_{min} \leq q(n) \leq Q_{max}. \tag{8}$$

Natomiast ograniczenie na ilość zasobów w systemie przyjęta zostanie podobnie jak (7) w postaci warunkowej wartości oczekiwanej jako jednokrokowej ich oceny przez centralnego koordynatora:

$$X_{min} \leq E|_{x(n)}, \; x(n+1) \leq X_{max}, \; n = 0,1,\ldots,N-1,$$

czyli

$$X_{min} \leq ax(n) - bq(n) + d(n) \leq X_{max}, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{9}$$

Ograniczenie (7) w problemie wtórnym powoduje, że dla pewnych realizacji może zachodzić $\sum_{i=1}^{M} u_i > Q$, a tylko $E|_{x(n)} \sum_{i=1}^{M} u_i = Q$, podsystem musi zatem posiadać własny magazyn buforowy, umożliwiający pokrycie ewentualnie zwiększonej aktualnie potrzeby na zasoby.

Rozwiązanie problemu dolnego poziomu, tzn. wyznaczenia lokalnych algorytmów decyzyjnych jest problemem statycznym [1]. Zastosowanie uzyskanych tam rezultatów wykorzystujących metodę mnożników Lagrange'a oraz zasadę min - E [3] daje algorytm optymalny o postaci:

$$u_i(n) = \frac{1}{M}\left\{q(n) - \sum_{j=1}^{M} \hat{z}_j(n)\right\} + z_i(n) \tag{10}$$

Podstawienie (10) do wtórnego wskaźnika jakości daje problem optymalizacyjny o postaci:

$$\underset{B}{\mathrm{Min}}\, E \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \sum_{i=1}^{M} - \frac{1}{M}\left\{B_n(x(n)) - \sum_{j=1}^{M} \hat{z}_j(n)\right\}^2 . \tag{11}$$

Zastosowanie zasady min - E umożliwia wyznaczenie decyzji optymalnych z równania funkcyjnego:

$$V_n(x(n)) = \underset{q(n)}{\mathrm{Min}}\, E_{|x(n)} \left\{ s(n)(q(n) - \sum_{j=1}^{M} \hat{z}_j(n))^2 + \right.$$

$$\left. + V_{n+1}(ax(n) - bq(n) + d(n))\right\}, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{12}$$

z warunkiem końcowym $V_N(x(N)) = 0$, przy czym $q(n)$ należy do zbioru sterowań dopuszczalnych $Q(x(n))$ określonego przez ograniczenia (8) i (9).

Ponieważ zbiór $Q(x)$ jest wypukły i zwarty, a minimalizowany wskaźnik jest ściśle wypukły, więc istnieje jednoznaczne rozwiązanie $q_n = B_n(x(n))$ dla wszystkich $x(n)$, dla których zbiór $Q(x(n))$ jest niepusty [4].

Warunkiem wystarczającym, aby $Q(x)$ był niepusty jest spełnione we wszystkich krokach sterowania relacji:

$$bq_{min} + X_{min} \leq ax(n) + \hat{d}(n) \leq bq_{mx} + X_{mx} \tag{13}$$

Wystarczy zatem, aby:

$$X_{min} \leq x(0) \leq X_{mx}$$

$$\underset{n}{\mathrm{Max}}\left\{\hat{d}(n) + a(d(n-1)_{mx} - \hat{d}(n-1))\right\} \leq bQ_{mx} + X_{mx}$$

$$\underset{n}{\mathrm{Min}}\left\{\hat{d}(n) + a(d(n-1)_{min} - \hat{d}(n-1))\right\} \geq bQ_{min} + X_{min}.$$

Łatwo wykazać indukcyjnie, że rozwiązanie równania (12) ma postać:

$$V_n(x(n)) + P_n x^2(n) + 2R_n x(n) + F_n \tag{14}$$

Optymalne prawo sterowania jest bowiem afiniczne względem $x(n)$, przyjmując jedną z możliwych form:

$$q(n) = \begin{cases} Q_{min} & \\ \frac{1}{b}\left(ax(n) + \hat{d}(n) - X_{mx}\right) & q^o(n) \notin Q(x_n) \\ q^o(n) = C_n x(n) + D_n & q^o(n) \in Q(x_n) \\ \frac{1}{b}\left(ax(n) + \hat{d}(n) - X_{min}\right) & q^o(n) \notin Q(x_n) \\ Q_{mx} & \end{cases} \tag{15}$$

gdzie:

$$C_n = (s(n) + b^2 P_{n+1})^{-1}\, b\, P_{n+1} a$$

$$D_n = (s(n) + b^2 P_{n+1})^{-1} \left(R_{n+1} b + \sum_{j=1}^{M} z_j(n)\right)$$

a w ostatnim kroku

$$P_N = R_N = F_N = 0.$$

Wartości P_n, R_n, F_n są różne we wszystkich pięciu przypadkach, ale można podać rekurencyjne wzory dla ich wyznaczania.

Dla określenia odpowiedniej decyzji konieczne jest wykonanie siatki dla zmiennych $x(n)$. Proces obliczeniowy jest jednak prostszy niż w przypadku stosowania siatek dla $x(n)$ i $q(n)$. Stosowanie siatek jest szczególnie adekwatne, gdy zasoby mają charakter dyskretny, nie trzeba bowiem dokonywać dyskretyzacji $x(n)$, zaś przy określaniu właściwych $q(n)$ należy skorzystać z ciągłości optymalnych funkcji $B_n(x(n))$.

4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona w pracy metoda rozdziału zasobów, oparta o koncepcje zawarte w pracach Gessinga (m.in. [1]), umożliwia określenia optymalnych strategii rozdziału zasobów w zdecentralizowanym systemie, przy niewielkiej ilości informacji przetwarzanej przez punkt decyzyjny wyższego poziomu. Otrzymane rezultaty można bez trudu rozszerzyć na przypadek markowskich modeli procesu $d(n)$ lub niedokładnej informacji o ilości zasobów $x(n)$, jak to uczyniono w przypadku rozdziału zasobów wodnych w pra-

cach [5] i [6]. Można również rozwiązać w podobny sposób zagadnienie rozdziału zasobów w przypadku braku magazynów buforowych w podsystemach. Zagadnienie minimalizacji strat może być zastąpione zagadnieniem maksymalizacji zysku, przy czym może być uwzględniony udział zysku w posiadanych przez system zasobach.

LITERATURA

[1] Gessing R.: Metoda dekompozycji i koordynacji statycznie optymalnego, statycznego rozdziału zasobów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 54, Gliwice 1980.

[2] Aoki M., Toda M.: Parametr adaptive resource allocation problem for decentralized system. IEEE Trans on AC, AC-20 1975, No 2.

[3] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XXI, z. 4, 1976.

[4] Kleindorfer P., Glover K.: Linear convex stochastic optimal control with application in production planning. IEEE _Trans. on AC-18, 1973, No 1.

[5] Świerniak A.: Rozdział zasobów wodnych w przypadku dopływów modelowych procesami Markowa I rzędu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 59, 1981.

[6] Świerniak A.: Stochastic optimization strategy for the water resources allocation, Materiały Konferencji: Grundlagen der Modellierung und Simulationstechnik, Rostock, 1981.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan WĘGLARZ

Wpłynęło do Redakcji 15.05.1982 r.

СТОХАСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Р е з ю м е

Рассматривается стохастически оптимальную стратегию в задаче распределения ресурсов в большой системе. Статические подсистемы связаны совместными ресурсами, которые изменяются во времени. Критерий качества принят в виде среднего значения потерь целой системы.

STOCHASTIC OPTIMAL ALGORITHM OF RESOURCE
ALLOCATION FOR A DECENTRALIZED DYNAMIC SYSTEM

S u m m a r y

A dynamic resource allocation problem under uncertainty is considered. A large system composed of static subsystems each of which is controlled by a single decision maker is coordinated by one coordinator being in charge of allocating the available resource, the amount of which evolves with time. The decision makers have the information about their subsystems and exchange the messages with the coordinator. It is assumed that the decision makers cooperate with each other. Expected total losses are minimized.