ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 63 Nr kol. 735

Jerzy KLAMKA

Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH TYPU 2-D

Streszczenie. W artykule podano definicje następujących rodzajów sterowalności układów dynamicznych typu 2-D: lokalnej sterowalności, modalnej sterowalności oraz sterowalności pary macierzy wielomianowych. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające różnych rodzajów sterowalności oraz rozpatrzono związki pomiędzy nimi. Ponadto wykazano, że sterowalność modalna jest powszechną własnością układu dynamicznego typu 2-D. Przedstawiono również przykłady ilustrujące teorię.

1. WPROWADZENIE

W ciągu ostatnich kilku lat w literaturze poświęconej teorii układów dynamicznych ukazało się wiele prac dotyczących, tzw. układów dynamicznych typu 2-D. Są to ogólnie rzecz biorąc układy dyskretne o dwu zmiennych niezależnych, czyli układy, które są określone w dyskretnych punktach płaszczyzny.

W niniejszym artykule zostaną rozpatrzone jedynie zagadnienia sterowalności układów dynamicznych typu 2-D, a w szczególności zagadnienia lokalnej, globalnej i modalnej sterowalności. Artykuł stanowi przegląd dotychczasowych rezultatów z tej dziedziny, które zostały zamieszczone w pracach [1-13]. Wszystkie twierdzenia podane są bez dowodów a jedynie z odpowiednimi odnośnikami do literatury.

Rozwój teorii układów dynamicznych typu 2-D wiąże się ściśle z coraz szerszym ich zastosowaniem w praktyce, a w szczególności przy projektowaniu filtrów dwuwymiarowych [9], [13]. Inne przykłady zastosowań teorii układów dynamicznych typu 2-D podane są w pracach [11] oraz [12], gdzie przedstawione również metody ich projektowania i konstrukcji.

Ogólnie, w podejściu do układów dynamicznych typu 2-D można wyróżnić dwa zasadnicze kierunki: pierwszy oparty na rachunku macierzowym [11] [12] [13] oraz drugi polegający na wykorzystaniu metod algebraicznych, a w szczególności teorii wielomianów wielu zmiennych [1-10]. W niniejszym artykule reprezentowane są obydwa te kierunki, z podkreśleniem związków między nimi.

2. OPIS MATEMATYCZNY UKŁADU DYNAMICZNEGO

W literaturze poświęconej układom dynamicznym typu 2-D spotyka się wiele różnych opisów matematycznych tych układów [3], [4], [6], [7], [10][11] [12], [13]. Najogólniejszym z nich jest opis zamieszczony w pracach [12] oraz [13], będący jednocześnie punktem wyjścia do dalszych rozważań zawartych w niniejszym opracowaniu.

Liniowy, stacjonarny układ dynamiczny typu 2-D opisany jest następującymi równaniami różnicowymi [12], [13]:

$$x(i+1,j) = A_1x(i,j) + A_2y(i,j) + B_1u(i,j) \tag{2.1}$$

$$y(i,j+1) = A_3x(i,j) + A_4y(i,j) + B_2u(i,j) \tag{2.2}$$

z warunkami brzegowymi $x(0,j) = x_j^0$, $y(i,0) = y_i^0$ oraz algebraicznym równaniem wyjścia postaci

$$v(i,j) = C_1x(i,j) + C_2y(i,j), \tag{2.3}$$

gdzie $i \in Z^+$, $j \in Z^+$, Z^+ jest zbiorem nieujemnych liczb całkowitych, $x(i,j) \in R^n$, $y(i,j) \in R^m$, $v(i,j) \in R^q$, $u(i,j) \in R^p$, natomiast macierze A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, C_1, C_2, są macierzami o odpowiednich wymiarach, a ich elementy są liczbami rzeczywistymi. Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad S(i,j) = \begin{bmatrix} x(i,j) \\ y(i,j) \end{bmatrix}$$

Wektor $x(i,j)$ nazywa się horyzontalnym wektorem stanu, natomiast wektor $y(i,j)$ nazywa się wertykalnym wektorem stanu [8], [12]. Ogólna definicja stanu układu dynamicznego typu 2-D jest bardziej skomplikowana i będzie omawiana w dalszej części artykułu.

W celu określenia macierzy tranzycji $A^{i,j}$ oraz wyznaczenia odpowiedzi układu $v(i,j)$ na ciąg sterowań $u(i,j)$, $i \in Z^+$, $j \in Z^+$, wprowadza się następujące definicje.

<u>Definicja 2.1</u>. Dla par liczb całkowitych (i,j) oraz (h,k), $i,j,h,k \in Z$, wprowadza się częściowy porządek określony następująco

$(h,k) \leq (i,j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h \leq i$ oraz $k \leq j$,
$(h,k) = (i,j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h = i$ oraz $k = j$,
$(h,k) < (i,j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(h,k) \leq (i,j)$ oraz $(h,k) \neq (i,j)$.

Definicja 2.2. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ macierz tranzycji $A^{i,j}$ jest zdefiniowana w sposób następujący [13]: $A^{i,j} = A^{1,0}A^{i-1,j} + A^{0,1}A^{i,j-1}$ dla $(i,j) > (0,0)$ $A^{0,0} = I = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, I_n, I_m macierze jednostkowe o wymiarach odpowiednio $(n \times n)$ oraz $(m \times m)$.

$$A^{-i,j} = A^{i,-j} \quad \text{dla} \quad j \geqslant 1, \quad i \geqslant 1.$$

Z definicji 2.2 wynikają podstawowe własności macierzy tranzycji $A^{i,j}$, a mianowicie [13]:

1) $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = A^{1,0} + A^{0,1}$

2) $A^{i,0} = A^{1,0}A^{i-1,0} + A^{0,1}A^{i,-1} = A^{1,0}A^{i-1,0}$

3) $A^{i,0} = (A^{1,0})^i$ oraz $A^{0,j} = (A^{0,1})^j$

4) $I^{1,0} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $I^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$

5) $I^{1,0}A = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{1,0}$

Zatem $I^{1,0}A = I^{1,0}A^{1,0} = A^{1,0}$. Podobnie $I^{0,1}A = I^{0,1}A^{0,1} = A^{0,1}$.

6) $I^{0,1}A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Zatem $I^{0,1}A^{1,0} = 0$. Podobnie $I^{1,0}A^{0,1} = 0$.

Podobnie określa się następujące potęgi:

$$B^{i,0} = \begin{bmatrix} B_1^i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i \in Z^+, \quad B^{0,j} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^j \end{bmatrix}, \quad j \in Z^+$$

Za pomocą macierzy tranzycji $A^{i,j}$, wyjście układu dynamicznego $v(i,j)$ wyraża się następującą zależnością

$$v(i,j) = C\,s(i,j) = \begin{bmatrix} C_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i,j) \\ y(i,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 \end{bmatrix} \left(\sum_{k=0}^{k=j} A^{i,j-k} \begin{bmatrix} x(0,k) \\ 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=0}^{h=i} A^{i-h,j} \begin{bmatrix} 0 \\ y(h,0) \end{bmatrix} + \sum_{(0,0)\leqslant(h,k)<(i,j)} (A^{i-h-1,j-k} B^{1,0} + A^{i-h,j-k-1} B^{0,1}) u(j,k) \right) \tag{2.4}$$

W przypadku układów dynamicznych typu 1-D, tzn. zwykłych układów dyskretnych znanych szeroko w literaturze, powyższe wzory i zależności są oczywiście również prawdziwe przy podstawieniu $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 0$. Są one zatem rozszerzeniem na przypadek układów dynamicznych typu 2-D, znanych relacji dotyczących układów dynamicznych typu 1-D.

Nieco inny, mniej ogólny, model matematyczny układów dynamicznych typu 2-D rozpatrywany jest w pracy [9], gdzie odpowiednio równania mają następującą postać:

$$y(i+1,j+1) + A_0 y(i,j) + A_1 y(i,j+1) + A_2 y(i+1,j) + B_1 u(i,j) \tag{2.5}$$

$$v(i,j) = C_z y(i,j) \tag{2.6}$$

$i \in Z^+$, $j \in Z^+$, $y(i,j) \in R^n$, $u(i,j) \in R^p$, $v(i,j) \in R^q$, A_0, A_1, A_2, B_1, C_2 są macierzami o odpowiednich wymiarach i elementach będących liczbami rzeczywistymi. Ponieważ $y(i+1,j+1)$ zależy od $y(i,j)$, więc równanie różnicowe (2.5) jest równaniem drugiego rzędu i da się przez podstawienie [9]:

$$x(i,j) = y(i,j+1) - A_2 y(i,j) \tag{2.7}$$

sprowadzić do układu równań różnicowych pierwszego rzędu postaci

$$x(i+1,j) = A_1 x(i,j) + (A_0 + A_1 A_2) y(i,j) + B_1 u(i,j) \tag{2.7a}$$

$$y(i,j+1) = x(i,j) + A_2 y(i,j) \tag{2.8}$$

Zatem w tym szczególnym przypadku macierze A, B, C mają postać następującą [9]:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_0 + A_1 A_2 \\ I_n & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

W celu określenia macierzy transmitancji operatorowych dla układu dynamicznego typu 2-D definiuje się dwuwymiarową transformację Z, zwaną także 2-D-Z transformacją [9],[12]. Transformacja typu 2-D-Z dla ciągu $x(i,j)$, $i \in Z^+$, $j \in Z^+$ jest zdefiniowana w sposób następujący [9], [12]:

$$Z\left\{x(i,j)\right\} = X(z,w) = \sum_{(0,0)\leq(i,j)} x(i,j)z^{-i}w^{-j} \tag{2.10}$$

Zatem

$$Z\left\{x(i+1,j)\right\} = \sum_{(0,0)\leq(i,j)} x(i+1,j)z^{-i}w^{-j} = z(X(z,w) - X_0^v(w)), \tag{2.11}$$

gdzie:

$$X_0^v(w) = \sum_{j=0}^{j=\infty} x(0,j)w^{-j} \tag{2.12}$$

Podobnie

$$Z\left\{x(i,j+1)\right\} = \sum_{(0,0)\leq(i,j} x(i,j+1)z^{-i}w^{-j} = w(X(z,w) - X_0^h(z)), \tag{2.13}$$

gdzie:

$$X_0^h(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} x(i,o)z^{-i} \tag{2.14}$$

Zdefiniowana powyżej 2-D-Z transformacja jest uogólnieniem na przypadek dwóch zmiennych niezależnych, znanej w literaturze zwykłej Z transformacji.

Dokonując obustronnej 2-D-Z transformacji równań (2.1), (2.2), (2.3) oraz wykorzystując wprowadzone wcześniej oznaczenia, uzyskuje się następujące zależności

$$\left(\begin{bmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & wI_m \end{bmatrix} - A\right)S(z,w) = B\,U(z,w) + \begin{bmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & wI_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^v(w) \\ Y_0^h(z) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$Y(z,w) = C\,S(z,w) \tag{2.16}$$

Zakładając zerowe warunki brzegowe $x(0,j) = 0$, dla $j \in Z^+$, oraz $y(i,0)=0$ dla $i \in Z^+$, (zatem $X_0^v(w) = 0$ oraz $Y_0^h(z) = 0$) oraz dokonując odpowiednich przekształceń równań (2.15) i (2.16), otrzymuje się macierz transmitancji dla układów dynamicznych typu 2-D w postaci

$$K(z,w) = C\left[\begin{bmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & wI_m \end{bmatrix} - A\right]^{-1} B \tag{2.17}$$

Elementami macierzy transmitancji $K(z,w)$ są funkcje wymierne $k_{rs}(z,w) = \frac{b_{rs}(z,w)}{a_{rs}(z,w)}$ $r = 1,2,\ldots,q$, $s = 1,2,\ldots,p$, dwu zmiennych zespolonych z oraz w. Wielomiany $b_{rs}(z,w)$ oraz $a_{rs}(z,w)$ są oczywiście wielomianami zmiennych zespolonych z oraz w.

Wprowadza się następujące oznaczenia:

$R[w]$ zbiór wielomianów zmiennej w o współczynnikach rzeczywistych.

$R[z,w]$ zbiór wielomianów zmiennych z oraz w o współczynnikach rzeczywistych.

$R(w)$ zbiór funkcji wymiernych zmiennej w.

$R(w)[z]$ zbiór wielomianów zmiennej z o współczynnikach ze zbioru $R(w)$.

$R^{q\times p}(w)$ zbiór $q \times p$ wymiarowych macierzy o elementach ze zbioru $R(w)$.

$R^{q\times p}(w)[z]$ zbiór $q \times p$ wymiarowych macierzy o elementach ze zbioru $R(w)[z]$.

Stosując przekształcenia podane w pracach [2] oraz [12], można doprowadzić macierz transmitancji $K(z,w)$ do następującej postaci

$$K(z,w) = C(w)(zI_n - A(w))^{-1}B(w) + D(w), \tag{2.18}$$

gdzie:

$$A(w) = A_1 + A_2(wI_m - A_4)^{-1}A_3$$

$$B(w) = B_1 + A_2(wI_m - A_4)^{-1}B_2$$

$$C(w) = C_1 + C_2(wI_m - A_4)^{-1}B_3$$

$$D(w) = C_2(wI_m - A_4)^{-1}B_2$$

Łatwo można zauważyć, że wszystkie powyższe macierze są macierzami transmitancji pewnych układów dynamicznych typu 1-D. Ponadto $A(w) \in R^{n\times n}(w)$, $B(w) \in R^{n\times p}(w)$, $C(w) \in R^{q\times n}(w)$, $D(w) \in R^{q\times m}(w)$.

3. STEROWALNOŚĆ LOKALNA I GLOBALNA

W teorii układów dynamicznych typu 2-D rozróżnia się dwa zasadnicze rodzaje stanów układu: stan lokalny w punkcie (i,j), $S(i,j) = \begin{bmatrix} x(i,j) \\ y(i,j) \end{bmatrix} \in R^{n+m}$

oraz stan globalny w punkcie (i,j), $S_{i,j}) = \left\{\left\{x(i,k),\ y(h,j)\right\},\ j \leq k,\ i \leq h\right\}$
Układy dynamiczne typu 2-D są układami nieskończenie-wymiarowymi, gdyż stan globalny $S_{i,j}$ jest elementem przestrzeni nieskończenie-wymiarowej, złożonej z nieskończonego ciągu par, z których każda składa się z wektora $x(i,k) \in R^n$ oraz wektora $y(h,j) \in R^m$.

W związku z powyższym definiuje się dwa rodzaje sterowalności, a mianowicie: sterowalność lokalną oraz sterowalność globalną [12], [13].

Definicja 3.1. Układ dynamiczny typu 2-D nazywa się lokalnie sterowalnym, jeżeli dla zerowych warunków początkowych $S_{0,0} = \left\{\left\{x(0,k),\ y(h,0)\right\},\ 0 \leq k,\ 0 \leq h\right\} = \left\{0,0\right\}$ i dowolnego wektora $s \in R^{n+m}$ istnieją liczby naturalne N, M oraz sekwencja sterowań $u(i,j)$, $(0,0) \leq (i,j) < (N,M)$, takie, że $S(N,M) = s$.

W oparciu o definicję 3.1 określa się warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności układów dynamicznych typu 2-D, w podobny sposób jak to ma miejsce w przypadku zwykłych układów dynamicznych dyskretnych zwanych układami typu 1-D.

Twierdzenie 3.1 [13]. Układ dynamiczny typu 2-D jest lokalnie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy tzw. macierz lokalnej sterowalności $Q_{n,m}$ dana następującą relacją

$$Q_{n,m} = \left[M(1,0)M(0,1)\ \ldots\ M(i,j)\ \ldots\ M(n,m)\right], \tag{3.1}$$

gdzie:

$$M(i,j) = A^{i-1,j}\,B^{1,0} + A^{i,j-1}\,B^{0,1} \qquad (0,0) < (i,j) \leq (n,m) \tag{3.2}$$

posiada pełny rząd, czyli

$$\text{rząd } Q_{n,m} = n + m. \tag{3.3}$$

Dowód: Uwzględniając zerowe warunki brzegowe zależności stanu chwilowego $S(i,j)$ od ciągu sterowań $u(h,k)$, $(0,0) \leq (h,k) < (i,j)$ ma na podstawie wzoru (2.4) postać

$$S(i,j) = \sum_{(0,0) \leq (h,k) < (i,j)} \left(A^{i-h-1,j-k}\,B^{1,0} + A^{i-h,j-k-1}\,B^{0,1}\right)u(h,k) =$$

$$= \sum_{(0,0) \leq (h,k) < (i,j)} M(i-h,j-k)\,u(h,k), \tag{3.4}$$

gdzie $M(r,t) = A^{r-1,t}\,B^{1,0} + A^{r,t-1}\,B^{0,1}$, dla $r \in Z^+$, $t \in Z^+$ (3.5)

Zależność (3.4) można przedstawić w nieco innej, bardziej zwartej postaci, a mianowicie

$$S(i,j) = Q_{i,j}\, U_{i,j}, \tag{3.6}$$

gdzie:

$$Q_{i,j} = \left[M(1,0)\ M(0,1)\ M(2,0)\ M(1,1)\ M(0,2)\ \dots\ M(i,j)\right], \tag{3.7}$$

$$U^T_{i,j} = \left[u^T(i-1,j), u^T(i,j-1), u^T(i-2,j), u^T(i-1,j-1), u^T(i,j-2) \dots u^T(0,0)\right] \tag{3.8}$$

T - oznacza znak transpozycji.

Zatem dowolny stan chwilowy $S(i,j)$ jest osiągalny za pomocą odpowiednio dobranej sekwencji sterowań $u(h,k)$, $(0,0) \leqslant (h,k) < (i,j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(n+m) \times ((i+1)(j+1) - 1)p$ wymiarowa macierz $Q_{i,j}$ posiada rząd równy $n + m$. Ponieważ na podstawie uogólnionego dwuwymiarowego twierdzenia Cayleya-Hamiltona [13]

$$\text{rząd } Q_{i,j} = \text{rząd } Q_{n,m} \quad \text{dla} \quad (n,m) \leqslant (i,j), \tag{3.9}$$

więc układ dynamiczny typu 2-D jest lokalnie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } Q_{n,m} = n + m \tag{3.10}$$

$(n+m) \times ((n+1)(m+1) - 1)p$ wymiarowa macierz $Q_{n,m}$ nosi nazwę macierzy lokalnej sterowalności dla układu dynamicznego typu 2-D.

Rozpatrując oddzielnie składową $x(i,j)$ wektora $S(i,j)$ w sposób bezpośredni dochodzi się do pojęcia tzw. lokalnej horyzontalnej sterowalności. Podobnie rozpatrując oddzielnie składową $y(i,j)$ wektora $S(i,j)$ otrzymuje się definicję tzw. lokalnej wertykalnej sterowalności [8], [12].

<u>Definicja 3.2</u> [12]. Układ dynamiczny typu 2-D nazywa się lokalnie horyzontalnie sterowalny (lokalnie wertykalnie sterowalny), jeżeli dla zerowych warunków początkowych $S_{0,0} = \{0,0\}$ i dowolnego wektora $x \in R^n$ (dowolnego wektora $y \in R^m$), istnieją liczby naturalne N i M oraz sekwencja sterowań $u(i,j)$, $(0,0) \leqslant (i,j) < (N,M)$, takie, że $x(N,M) = x(y(N,M) = y)$.

Z twierdzenia 3.1 wynika bezpośrednio następujący warunek konieczny i wystarczający lokalnej horyzontalnej (wertykalnej) sterowalności układu dynamicznego typu 2-D.

<u>Twierdzenie 3.2</u> [12]. Układ dynamiczny typu 2-D jest lokalnie horyzontalnie (wertykalnie) sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } Q^h_{n,m} = n \ (\text{rząd } Q^v_{n,m} = m), \tag{3.11}$$

gdzie $Q^h_{n,m}$ jest $n \times((n+1)(m+1)-1)p$ wymiarową macierzą lokalnej horyzontalnej sterowalności.
$Q^v_{n,m}$ jest $m \times((n+1)(m+1)-1)p$ wymiarową macierzą lokalnej wertykalnej sterowalności.
Macierze $Q^h_{n,m}$ oraz $Q^v_{n,m}$ są podmacierzami macierzy $Q_{n,m}$, a mianowicie:

$$Q_{n,m} = \begin{bmatrix} Q^h_{n,m} \\ \hline Q^v_{n,m} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Wniosek 3.1. Lokalna sterowalność układu dynamicznego typu 2-D implikuje jego horyzontalną oraz wertykalną lokalną sterowalność.

Dowód. Wniosek 3.1 wynika bezpośrednio z faktu, że zależność rząd $Q_{n,m} = n+m$ implikuje następujące równości: rząd $Q^h_{n,m} = n$ oraz $Q^v_{n,m} = m$.

Implikacja odwrotna do tej jaką reprezentuje wniosek 3.1 nie jest prawdziwa, gdyż układ dynamiczny typu 2-D może być lokalnie horyzontalnie i wertykalnie sterowalny, nie będąc jednocześnie lokalnie sterowalny. Jest to konsekwencją faktu, że rząd $Q_{n,m} \leq$ rząd $Q^h_{n,m}$ + rząd $Q^v_{n,m}$.

Oprócz pojęcia lokalnej sterowalności, dla układów dynamicznych typu 2-D definiuje się również tzw. globalną sterowalność [12]. W tym celu określa się operator sterowalności G w sposób następujący:

$$G : U \ni u \to S_{0,0} = \left\{ \left\{ x(0,j),\ y(i,0) \right\},\ i \in Z^+,\ j \in Z^+ \right\} \in \mathcal{X} \tag{3.13}$$

$$U = \left\{ u(h,k),\ (h,k) < (0,j),\ \text{lub}\ (h,k) < (i,0),\ i \in Z^+,\ j \in Z^+ \right\} \in \mathcal{U}$$

$$x(0,j) = I^{1,0} \sum_{(h,k)<(0,j)} M(-h,j-k)u(h,k) \tag{3.14}$$

$$y(i,0) = I^{0,1} \sum_{(h,k)<(i,0)} M(i-h,-k)u(h,k) \tag{3.15}$$

U - przestrzeń sterowań.

Definicja 3.3 [12]. Układ dynamiczny typu 2-D nazywa się globalnie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy operator sterowalności G jest operatorem surjektywnym, (jego przeciwdziedzina jest całą przestrzenią stanów globalnych $\mathcal{X}$).

Sformułowanie sensownych kryteriów badania globalnej sterowalności jest zagadnieniem bardzo skomplikowanym i dotychczas brak jest w literaturze traktującej o układach dynamicznych typu 2-D odnośnych rezultatów. Ponad-

to pojęcie globalnej sterowalności posiada małe znaczenie praktyczne, gdyż wymaga znajomości nieskończonej liczby wektorów sterowań oraz wyznaczenia nieskończonej liczby wektorów stanów lokalnych. Sterowalność globalna implikuje oczywiście sterowalność lokalną układu dynamicznego typu 2-D.

Podane w tym punkcie definicje i kryteria badania różnych rodzajów sterowalności związane są ściśle z różnicowymi równaniami stanu układu, natomiast abstrahują one od własności i struktury transmitancji macierzowej [1], [7], [8], [9].

Przykład 3.1. Niech będzie dany układ dynamiczny typu 2-D o następujących macierzach:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

Zatem $n = 1$ oraz $m = 2$. Na mocy zależności (3.2) uzyskuje się następujące równości

$$M(1,0) = A^{0,0}B^{1,0} + A^{1,-1}B^{0,1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(0,1) = A^{-1,1}B^{1,0} + A^{0,0}B^{0,1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(1,1) = A^{0,1}B^{1,0} + A^{1,0}B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M(0,2) = A^{-1,2}B^{1,0} + A^{0,1}B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(1,2) = A^{0,2}B^{1,0} + A^{1,1}B^{0,1} = A^{0,1}A^{0,1}B^{1,0} + (A^{1,0}A^{0,1} + A^{0,1}A^{1,0})B^{0,1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd na podstawie zależności (3.1) macierz lokalnej sterowalności $Q_{1,2}$ ma postać

$$Q_{1,2} = \left[M(1,0) \,\vdots\, M(0,1) \,\vdots\, M(1,1) \,\vdots\, M(0,2) \,\vdots\, M(1,2)\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zatem rząd $Q_{1,2} = 3 = n + m$, czyli rozpatrywany układ dynamiczny typu 2-D jest lokalnie sterowalny, a co za tym idzie również lokalnie horyzontalnie i wertykalnie sterowalny. Powyższy przykład jest ilustracją twierdzenia 3.1 oraz wniosku 3.1.

Przykład 3.2. Niech będzie dany układ dynamiczny typu 2-D o następujących macierzach

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

Zatem $n = 1$ oraz $m = 2$. Na mocy zależności (3.2), w analogiczny sposób jak w przykładzie 3.1, uzyskuje się następujące zależności określające $M(i,j)$, $(0,0) < (i,j) \leq (1,2)$.

$$M(1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M(0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad M(0,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad M(1,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Stąd na podstawie zależności (3.1) macierz lokalnej sterowalności $Q_{1,2}$ ma postać:

$$Q_{1,2} = \left[M(1,0) \vdots M(0,1) \vdots M(1,1) \vdots M(0,2) \vdots M(1,2)\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Zatem rząd $Q_{1,2} = 2 < n + m = 3$, czyli na podstawie twierdzenia 3.1 rozpatrywany układ dynamiczny typu 2-D nie jest lokalnie sterowalny.

Sytuacja ulega zmianie, gdy rozpatruje się lokalną horyzontalną (wertykalną) sterowalność powyższego układu. Wówczas odpowiednie macierze horyzontalnej (wertykalnej) lokalnej sterowalności $Q^h_{n,m}$ ($Q^v_{n,m}$) mają następującą postać (patrz 3.12).

$$Q^h_{1,2} = \left[1 \vdots 1 \vdots 1 \vdots 2 \vdots 1\right]$$

$$Q^v_{1,2} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Zatem rząd $Q^h_{1,2} = 1 = n$ oraz rząd $Q^v_{1,2} = 2 = m$. Stąd na podstawie twierdzenia 3.2 rozpatrywany układ dynamiczny typu 2-D jest lokalnie horyzontalnie sterowalny oraz lokalnie wertykalnie sterowalny, mimo, że nie jest lokalnie sterowalny.

Powyższy przykład ilustruje fakt, że wniosek odwrotny do wniosku 3.1 nie jest prawdziwy, tzn., że lokalna horyzontalna sterowalność oraz lokalna wertykalna sterowalność nie zawsze implikują lokalną sterowalność układu dynamicznego typu 2-D. Jest to bezpośrednią konsekwencją następującej nierówności, dotyczącej rzędów macierzy

$$\text{rząd } Q_{n,m} = \text{rząd} \left[\begin{array}{c} Q^h_{n,m} \\ \hline Q^v_{n,m} \end{array}\right] \leqslant \text{rząd } Q^h_{n,m} + \text{rząd } Q^v_{n,m}$$

Ponieważ rozpatrywany układ nie jest lokalnie sterowalny, więc nie jest on również globalnie sterowalny.

4. MODALNA STEROWALNOŚĆ

Pojęcie modalnej sterowalności znane w teorii sterowalności układów dynamicznych typu 1-D może być również rozszerzone na przypadek układów dynamicznych typu 2-D. Podstawowe znaczenie przy badaniu modalnej sterowalności układów dynamicznych typu 2-D odgrywają pewne pojęcia z dziedziny algebry, które dla wygody czytelnika zostaną przytoczone poniżej.

Definicja 4.1 [11]. Dwie macierze $P(z,w)$ oraz $Q(z,w)$ nad pierścieniem $R[z,w]$, o tej samej liczbie wierszy, nazywa się lewostronnie względnie pierwszymi w stosunku do pierścienia $C[z,w]$, jeżeli dla każdego lewostronnego wspólnego czynnika $D(z,w)$, takiego, że $P(z,w) = D(z,w)\tilde{P}(z,w)$ oraz $Q(z,w) = D(z,w)\tilde{Q}(z,w)$, gdzie $D(z,w)$, $\tilde{P}(z,w)$ oraz $\tilde{Q}(z,w)$ są macierzami nad pierścieniem $C[z,w]$ oraz $D(z,w)$ jest macierzą kwadratową, zachodzi: $\det D(z,w) = d \neq 0$, $d \in C$.

Definicja 4.1 [11]. Dwie macierze $P(w)$ oraz $Q(w)$ nad pierścieniem $K[w]$ (K jest dowolnym polem) o tej samej liczbie wierszy, nazywa się lewostronnie względnie pierwszymi w stosunku do pierścienia $K[w]$, jeżeli dla każdego lewostronnego wspólnego dzielnika $D(w)$, takiego, że $P(w) = D(w)\tilde{P}(w)$ oraz $Q(w) = D(w)\tilde{Q}(w)$, gdzie $D(w)$, $\tilde{P}(w)$ oraz $\tilde{Q}(w)$ są macierzami nad pierścieniem $K[w]$ oraz $D(w)$ jest macierzą kwadratową, której wyznacznik $\det D(w)$ jest równy jedności w pierścieniu $K[w]$.

W oparciu o definicje 4.1 oraz 4.2 określa się modalną sterowalność układów dynamicznych typu 2-D oraz formułuje warunki jej badania.

Definicja 4.2 [2] [12]. Układ dynamiczny typu 2-D nazywa się modalnie sterowalny, jeżeli

$$\begin{bmatrix} zI_n - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & wI_n - A_4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

są macierzami lewostronnie względnie pierwszymi w stosunku do pierścienia $C[z,w]$.

Twierdzenie 4.1 [2], [12]. Macierze

$$\begin{bmatrix} zI_n - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & wI_n - A_4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

są lewostronnie względnie pierwszymi w stosunku do pierścienia $C[z,w]$ wtedy i tylko wtedy, gdy są one lewostronnie względnie pierwszymi w stosunku do pierścienia $C(w)[z]$ oraz w stosunku do pierścienia $C(z)[w]$.

W przypadku gdy macierze A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, są macierzami o elementach będących liczbami rzeczywistymi, w twierdzeniu 4.1 można zastąpić pierścienie $C(w)[z]$ oraz $C(z)[w]$ odpowiednio pierścieniami $R(w)[z]$ oraz $R(z)[w]$.

Twierdzenie 4.1 jest oczywiście warunkiem koniecznym i wystarczającym modalnej sterowalności układu dynamicznego typu 2-D. Wynika to bezpośrednio z definicji 4.3.

Modalna sterowalność układu dynamicznego typu 2-D jest ściśle związana z pojęciem sterowalności pary macierzy $(A(w), B(w))$, gdzie $A(w) \in R^{n\times n}(w)$, $B(w) \in R^{n\times p}(w)$.

Definicja 4.4 [2] [10]. Para macierzy $(A(w), B(w))$ nazywa się parą sterowalną względem $R(w)$, jeżeli

$$\text{rząd}\left[B(w) \,\vdots\, A(w)B(w) \,\vdots\, A^2(w)B(w) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A^{n-1}(w)B(w)\right] = n, \tag{4.1}$$

gdzie pojęcie rzędu macierzy jest rozpatrywane nad polem $R(w)$.

Twierdzenie 4.2 [2] [10]. Para macierzy $(A(w), B(w))$ jest sterowalna względem $R(w)$, jeżeli para macierzy $(A(w_0), B(w_0))$ jest sterowalna dla pewnej liczby zespolonej w_0.

Bezpośredni związek pomiędzy modalną sterowalnością układu dynamicznego typu 2-D, a sterowalnością pary macierzy $(A(w), B(w))$ podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3 [2]. Następujące trzy warunki są sobie równoważne:

1) para macierzy $(A(w), B(w))$ jest sterowalna względem $R(w)$.

2) $(zI_n - A(w))$ oraz $B(w)$ są macierzami lewostronnie względnie pierwszymi w stosunku do pierścienia $R(w)[z]$.

3) istnieją macierze $X(w,z) \in R^{n\times n}(w)[z]$ oraz $Y(w,z) \in R^{p\times n}(w)[z]$ takie, że

$$(zI_n - A(w))X(w,z) + B(w)Y(w,z) = I_n. \tag{4.2}$$

Twierdzenie 4.4 [2]. Układ dynamiczny typu 2-D jest modalnie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie następujące dwa warunki:

1) para macierzy $(A_1 + A_2(wI_m - A_4)^{-1}A_3,\ B_1 + A_2(wI_m - A_4)^{-1}B_2)$ jest sterowalna względem $R(w)$.

2) para macierzy $(A_4 + A_3(zI_n - A_1)^{-1}A_2,\ B_2 + A_3(zI_n - A_1)^{-1}B_1)$ jest sterowalna względem $R(z)$.

W dowodzie twierdzenia 4.4 wykorzystuje się w istotny sposób szczególną postać macierzy transmitancji operatorowych $K(z,w)$, określoną zależnością (2.18).

Przykład 4.1. Niech będzie dany układ dynamiczny typu 2-D o następujących macierzach

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

Zatem $n = 1$ oraz $m = 2$. Do badania modalnej sterowalności układu zostanie wykorzystane twierdzenie 4.4, będące warunkiem koniecznym i wystarczającym modalnej sterowalności. W tym celu zostaną najpierw wyznaczone odpowiednie macierze

$$A_1 + A_2(wI_2 - A_4)^{-1}A_3 = [0\ 1]\left(\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w} \end{bmatrix}$$

$$B_1 + A_2(wI_2 - A_4)^{-1}B_2 = [1] + [0\ 1]\left(\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$$

$$A_4 + A_3(zI_1 - A_1)^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z - 0)^{-1}[0\ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

$$B_2 + A_3(zI_1 - A_1)^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z - 0)^{-1}[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

Warunek 1) twierdzenia 4.4 jest spełniony, gdyż $\text{rząd}\left[\frac{1}{w} \,\vdots\, 1\right] = 1 = n$, natomiast warunek 2) twierdzenia 4.4 nie jest spełniony, gdyż $\text{rząd}\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \end{array}\right] = 1 < 2 = m$. Zatem rozpatrywany układ dynamiczny typu 2-D nie jest modalnie sterowalny, mimo że na podstawie przykładu 3.1 jest on lokalnie sterowalny. Tak więc lokalna sterowalność nie jest warunkiem wystarczającym modalnej sterowalności układu dynamicznego typu 2-D. W przypadku układów dynamicznych typu 1-D lokalna sterowalność, globalna sterowalność oraz modalna sterowalność są sobie równoważne, natomiast dla układów dynamicznych typu 2-D wszystkie te pojęcia są istotnie różne [10], [11], [12].

Równanie charakterystyczne rozpatrywanego układu ma postać następującą

$$\det\left(\begin{bmatrix} zI_1 & 0 \\ 0 & wI_2 \end{bmatrix} - A\right) = \det\begin{bmatrix} z & 0 & -1 \\ 0 & w & -1 \\ -1 & 0 & w \end{bmatrix} = zw^2 - w = w(zw - 1).$$

Zatem krzywe wartości własnych [10] są następujące: $V_1(z,w) = (z,0)$ oraz $V_2(z,w) = (z, \frac{1}{z})$. W celu sprawdzenia, która z nich nie jest modalnie sterowalna, wystarczy określić rzędy odpowiednich macierzy $\left[V_1 I_{n+m} - A \,\vdots\, B\right]$ oraz $\left[V_2 I_{n+m} - A \,\vdots\, B\right]$.

$$\text{rząd}\left[V_1 I_{n+m} - A \,\vdots\, B\right] = \text{rząd}\left[\begin{array}{ccc|c} z & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 2,$$

$$\text{rząd}\left[V_2 I_{n+m} - A \mid B\right] = \text{rząd}\left[\begin{array}{ccc|c} z & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{z} & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \end{array}\right] = 3$$

Zatem krzywa wartości własnych V_1 nie jest modalnie sterowalne.

5. WŁASNOŚĆ POWSZECHNOŚCI MODALNEJ STEROWALNOŚCI

W praktyce inżynierskiej interesującym zagadnieniem jest zachowanie się danej własności układu dynamicznego przy niewielkich zmianach jego parametrów. W przypadku gdy niewielkie zmiany parametrów układu dynamicznego nie wpływają na daną własność, wówczas własność ta posiada cechę powszechności. Bardziej precyzyjne określenie powszechności danej własności zawarte jest w poniższej definicji.

Definicja 5.1 [2]. Własność E układu dynamicznego o N parametrach nazywa się powszechna, jeżeli zbiór punktów przestrzeni R^N, w których ona nie zachodzi, jest podzbiorem miejsc zerowych pewnego wielomianu N zmiennych o współczynnikach rzeczywistych.

Innymi słowy powszechność danej własności układu dynamicznego oznacza, że zachodzi ona w zbiorze gęstym i otwartym w przestrzeni parametrów R^N. Zatem intuicyjnie rzecz biorąc zachodzi ona prawie wszędzie w przestrzeni R^N. Stąd prawdopodobieństwo trafienia na układ dynamiczny, w którym dana własność posiadająca cechę powszechności nie zachodzi, jest przy odpowiednio zdefiniowanej mierze prawdopodobieństwa równe zeru.

Twierdzenie 5.1 [2]. Globalna sterowalność, lokalna sterowalność, modalna sterowalność oraz sterowalność pary macierzy (A(w), B(w)) są powszechnymi własnościami układu dynamicznego typu 2-D.

Lokalna horyzontalna sterowalność oraz lokalna wertykalna sterowalność również są powszechnymi własnościami układu dynamicznego typu 2-D.

W związku z powszechnością różnych rodzajów sterowalności, można dla każdej z nich zdefiniować odpowiedni zapas sterowalności, rozumiany jako odległość euklidesowa w przestrzeni R^N danego układu dynamicznego typu 2-D od najbliższego niesterowalnego układu. Innymi słowy zapas sterowalności określa maksymalne dopuszczalne zmiany parametrów układu, nie powodujące utraty własności sterowalności. Podanie konkretnych wzorów na obliczanie zapasów sterowalności w ogólnym przypadku jest praktycznie niemożliwe. Wynika to z faktu, że relacje pomiędzy parametrami układu charakteryzujące niesterowalność układu mają bardzo skomplikowaną postać.

LITERATURA

[1] Eising R.: Realization and stabilization of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no. 5, s. 793-799, 1978.

[2] Eising R.: Controllability and observability of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, no. 1, s. 132 - 133, 1979.

[3] Eising R.: Separability of 2-D transfer matrices. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, no. 3, s. 508-510, 1979.

[4] Eising R.: Low order realization for 2-D transfer functions, Proceedings of the IEEE, vol. 67, no. 5, s. 866-868, 1979.

[5] Eising R : State space realization and inversion of 2-D systems. Memorandum COSOR 78-18, Eindhoven University of Technology, 1978.

[6] Eising R.: Internally stable realization of 2-D transfer matrices. Signal Processing, Theories and Applications, s. 393-396, 1980.

[7] Eising R., Emre E.: Exact model matching of 2-D systems. Memorandum COSOR 78-15, Einhoven University of Technology, 1978.

[8] Eising R., Hautus M.L.J.: Realization algorithms for systems over a principal ideal domain. Memorandum COSOR 78-25, Eindhoven University of Technology, 1978.

[9] Fornasini E., Marchesini G.: State space realization theory of two-dimensional filters, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no. 4, s. 484-492, 1976.

[10] Kamen E.W.: On an algebraic theory of systems defined by convolution operators. Mathematical Systems Theory, vol. 9, no. 1, s. 57-74, 1975.

[11] Kung S.Y., Levy B.C., Morf M.: New results in 2-D systems theory, part I: 2-D polynomial matrices, factorization and coprimeness. Proceedings of the IEEE, vol. 65, no. 4, s. 861-872, 1977.

[12] Kung S.Y., Levy B.C., Morf M., Kailath T.: New results in 2-D systems theory, part II: 2-D state-space models - realization and the notions of controllability, observability and minimality. Proceedings of the IEEE, vol. 65, no. 4, s. 945-960, 1977.

[13] Roesser R.P.: A discrete state space model for linear image processing. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, no. 1, s. 1-10, 1975.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan WĘGLARZ

Wpłynęło do Redakcji 15.05.1982 r.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА 2-Д

Р е з ю м е

В статье представлено разные определения управляемости динамическтх систем типа 2-Д: локальной управляемости, глобальной управляемости, модальной управляемости и управляемости пары полиномиальных матриц. Сформулировано необходимые и достаточные условия разных типов управляемости и проанализировано соотношения между ними. Доказано, что модальная управляемость это типичное свойство динамическоя системы типа 2-Д. Даны также примеры иллюстрирующие теорию.

CONTROLLABILITY OF 2-D DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

Following various notions of controllability for 2-D dynamical systems are defined: local controllability, global controllability, modal controllability and the controllability of the pair of polynomial matrices. Necessary and sufficient conditions for these types of controllability are formulated and the conections between them are considered. Furthermore, it is shown that the modal controllability is a generic property of the 2-D dynamical systems. The illustrative examples are also given.