ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 64 Nr kol. 736

Czesław SMUTNICKI

Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej

PROBLEM SZEREGOWANIA ZADAŃ Z MINIMAKSOWĄ FUNKCJĄ CELU

Streszczenie. W pracy rozważany jest problem kolejnościowy gniazdowy z maszynami równoległymi i ogólną minimaksową funkcją celu. Przedstawiono pewne własności problemu oraz algorytmu rozwiązania. Sformułowany algorytm pozwala automatyzować podejmowanie decyzji związanych z harmonogramowaniem zadań w dyskretnych procesach produkcyjnych.

1. WPROWADZENIE

Współczesne procesy produkcyjne charakteryzują się coraz większym stopniem automatyzacji w zakresie optymalnego sterowania procesem i optymalnego podejmowania decyzji. W przypadku harmonogramowania zadań w dyskretnych procesach produkcyjnych problem automatyzacji staje się szczególnie trudny ze względu m.in. na brak efektywnych algorytmów optymalizacyjnych rozwiązujących odpowiednie problemy dyskretne. Występujące zwykle w praktyce problemy, nawet w najprostszych, deterministycznych przypadkach, są NP-zupełne. Fakt ten w istotny sposób ogranicza możliwości zastosowania znanych metod optymalizacyjnych. Użycie metod dokładnych (PD,B-and-B,PCL) nie daje pełnej gwarancji wyznaczenia rozwiązania optymalnego w zadanym z góry (rozsądnym) czasie. Zwykle przeszkodą w otrzymaniu pozytywnego rezultatu jest duża wymiarowość praktycznego problemu. Z kolei użycie metod heurystycznych zapewnia szybkie uzyskanie rozwiązania lecz tylko przybliżonego, zaś algorytmy przybliżone o zagwarantowanej dokładności znane są tylko dla nielicznej klasy problemów. Z tego też względu prowadzone są stale badania poszczególnych klas problemów szeregowania, mające na celu wykorzystanie poznanych własności do poprawy istniejących lub konstrukcji nowych algorytmów rozwiązywania.

W pracy przedstawiono sformułowanie, pewne własności oraz algorytm rozwiązania zagadnienia kolejnościowego gniazdowego z równoległymi maszynami i z ogólną minimaksową funkcją celu. Zagadnienie to zawiera jako szczególne przypadki zagadnienia kolejnościowe z funkcjami celu typu C_{max}, L_{max}, T_{max}, f_{max} i inne. Dla podanego zagadnienia sformułowano algorytm rozwiązania oparty na schemacie metody podziału i ograniczeń, wykorzystujący eliminacyjne własności ciągu krytycznego [4],[5]. Skonstruowany algorytm zapewnia otrzymanie rozwiązania optymalnego oraz łączy w sobie po-

zytywne własności obliczeniowe zarówno algorytmów dokładnych, jak i przybliżonych.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Zagadnienie kolejnościowe gniazdowe z równoległymi maszynami postaci $n/m/J, \mu \geq 1, m_w^k \geq 1, RT/h_{max}$ [x)] sformułowane jest następująco. Dane są:

(i) zbiór niepodzielnych operacji $N = \{1,2,\ldots,n\}$,

(ii) zbiór maszyn różnych typów $M = \{1,2,\ldots,m\}$ przeznaczonych do wykonywania tych operacji,

(iii) zbiór typów tych maszyn $T = \{1,2,\ldots,t\}$,

(iv) czasy wykonywania operacji p_{ik} $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m})$, $p_{ik} \geq 0$, p_{ik} - jest czasem wykonywania operacji i-tej na maszynie k-tej,

(v) relacja RT reprezentująca wymogi porządku technologicznego wykonywania operacji $RT \subset N \times N$ (graf relacji RT jest acykliczny); $\langle i,j \rangle \in RT$ pociąga, że operacja i-ta musi być zakończona przed rozpoczęciem operacji j-tej,

(vi) najwcześniejszy termin rozpoczęcia realizacji wszystkich operacji t_o, $t_o \geq 0$ (zwykle $t_o = 0$),

(vii) najwcześniejszy pożądany termin rozpoczęcia realizacji operacji i-tej na maszynie k-tej, $r_{ik} \geq 0$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m})$,

(viii) najpóźniejszy pożądany termin zakończenia realizacji operacji i-tej na maszynie k-tej, $d_{ik} \geq 0$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m})$.

Zakłada się, że:

(a) w zbiorze maszyn M istnieją rozłączne podzbiory maszyn jednego typu (gniazda), tzn. istnieje rozbicie zbioru M na podzbiory $M^k \subseteq M$, parami rozłączne i wyczerpujące

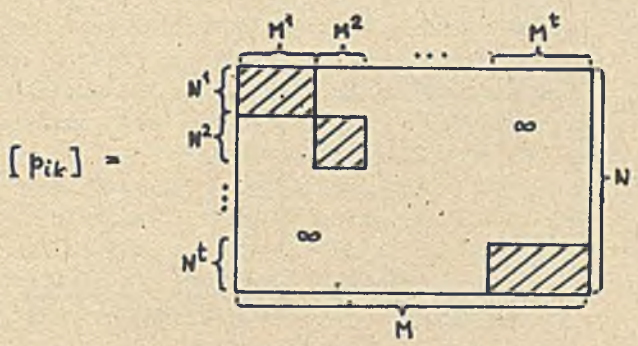
$$\bigcup_{k \in T} M^k = M,\ M^k \cap M^j = \emptyset,\ k \neq j,\ k,j \in T,$$

(b) w zbiorze operacji N istnieją rozłączne podzbiory operacji, które mogą być wykonywane przy użyciu maszyn jednego typu, tzn. istnieje rozbicie zbioru N na podzbiory $N^k \subseteq N$ parami rozłączne i wyczerpujące

$$\bigcup_{k \in T} N^k = N,\ N^k \cap N^j = \emptyset,\ k \neq j,\ k,j \in T,$$

x) Symbol klasyfikacyjny przyjęto zgodnie z [2].

(c) każda operacja ze zbioru N^j może być wykonywana tylko przy użyciu dokładnie jednej maszyny ze zbioru M^j, $j \in T$, co pociąga za sobą, że wielkości p_{ik}, r_{ik}, d_{ik} są określone tylko dla par wskaźników i,k takich, że $i \in N^j$, $k \in M^j$, $j \in T$ (rys. 1),



Rys. 1. Blokowa postać macierzy $[p_{ik}]_{i=1,n,k=1,m}$

(d) wykonywanie operacji nie może być przerywane,

(e) każda maszyna $k \in M$ może wykonywać co najwyżej jedną operację w dowolnej chwili czasowej.

Wprowadzono następujące oznaczenia zmiennych:

S_i - termin rozpoczęcia realizacji operacji i-tej, $i \in N$,

C_i - termin zakończenia realizacji operacji i-tej, $i \in N$,

$\mu(i)$ - numer maszyny, która realizuje operację i-tą (jeśli $i \in N^j$ to $\mu(i) \in M^j$, $j \in T$),

$E_{ik} = \max[0, r_{ik} - S_i]$ - przyspieszenie wykonywania operacji i-tej, przy wykonywaniu operacji na maszynie k-tej, $i \in N^j$, $k \in M^j$, $j \in T$,

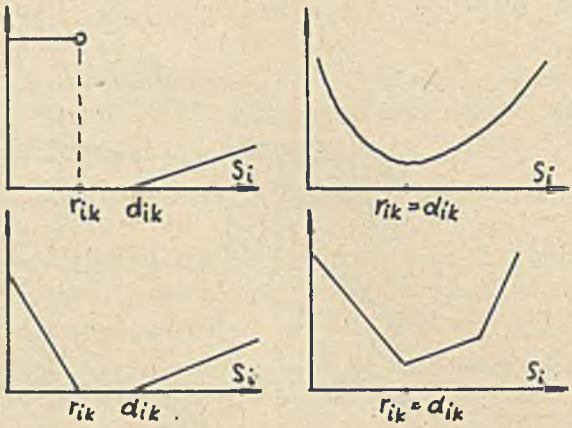
$T_{ik} = \max[0, C_i - d_{ik}]$ - spóźnienie wykonywania operacji i-tej, przy wykonywaniu operacji na maszynie k-tej, $i \in N^j$, $k \in M^j$, $j \in T$.

Dodatkowo dane są:

(ix) funkcje $h_{ik}(S_i)$ określające koszt związany z rozpoczęciem realizacji operacji i-tej na maszynie k-tej w terminie S_i ($i \in N^j$, $k \in M^j$, $j \in T$); zakłada się, że funkcje $h_{ik}(S_i)$ dają się przedstawić w formie:

$$h_{ik}(S_i) = g_{ik}(E_{ik}) + f_{ik}(T_{ik}) \tag{2.1}$$

gdzie: $g_{ik}(E_{ik})$ - niemalejąca funkcja argumentu E_{ik} oraz $f_{ik}(T_{ik})$ - niemalejąca funkcja argumentu T_{ik}, $i \in N^J$, $k \in M^j$, $j \in T$ (rys. 2).



Rys. 2. Różne postacie funkcji $h_{ik}(S_i)$

Problem szeregowania postaci $n/m/J, \tau \geq 1, m_w^k \geq 1, RT/h_{max}$ polega na wyznaczeniu wartości zmiennych $S_i, \mu(i)$, $i = \overline{1,n}$ minimalizujących funkcję celu w postaci:

$$h_{max} \hat{=} \max_{1 \leq i \leq n} \max\left[g_{i\mu(i)}(E_{i\mu(i)}),\ f_{i\mu(i)}(T_{i\mu(i)})\right] \tag{2.2}$$

przy ograniczeniach:

$$S_i + p_{i\mu(i)} \leq S_j \qquad \langle i,j \rangle \in RT. \tag{2.3}$$

$$t_o \leq S_i \qquad i=\overline{1,n} \tag{2.4}$$

$$(\mu(i) = \mu(j)) \Rightarrow (S_i + p_{i\mu(i)} \leq S_j) \vee (S_j + p_{i\mu(j)} \leq S_j)\ i,j \in N^k,$$

$$\mu(i), \mu(j) \in M^k,\ k \in T. \tag{2.5}$$

$$E_{ik} = \max\left[0, r_{ik} - S_i\right],\ i \in N^J,\ k \in M^J,\ j \in T \tag{2.6}$$

$$T_{ik} = \max\left[0, S_i + p_{ik} - d_{ik}\right],\ i \in N^J,\ k \in M^J,\ j \in T \tag{2.7}$$

$$\mu(i) \in M^J,\ i \in N^J,\ j \in T. \tag{2.8}$$

Funkcja celu (2.2) przedstawia sobą maksymalny koszt spośród kosztów wykonywania wszystkich operacji związanych z przyspieszeniem i spóźnieniem operacji. Ograniczenie (2.3) reprezentuje wymaganie kolejności realizacji operacji związane z istnieniem porządku technologicznego (relacja RT). Ograniczenie (2.4) wyznacza najwcześniejszy moment rozpoczęcia wszystkich operacji. Ograniczenie kolejnościowe (2.5) określa, że jeśli dwie operacje i,j są realizowane na tej samej maszynie $\mu(i) = \mu(j)$, to "realizacja operacji i-tej poprzedza realizację operacji j-tej" albo odwrotnie. Warunek (2.5) zapewnia, że operacje realizowane na tej samej maszynie muszą być uszeregowane i nie mogą być realizowane jednocześnie. Ograniczenia (2.6)-(2.7) wyrażają związek między zmiennymi S_i oraz E_{ik} i T_{ik}. Ograniczenie (2.8) wyznacza zbiór dopuszczalnych wartości dla zmiennych $\mu(i)$ oraz zapewnia, że każda operacja $i \in N^j$ jest wykonywana przy użyciu dokładnie jednej maszyny ze zbioru M^j, dla każdego $j \in T$.

W zależności od wyboru postaci funkcji $h_{ik}(S_i)$, $i \in N^j$, $k \in M^j$, $j \in T$ możemy otrzymać zbiór szczególnych problemów szeregowania z różnymi funkcjami celu. Tak więc przyjmując:

$$r_{ik} = 0 = d_{ik},\ f_{ik}(x) = x,\ i \in N^j,\ k \in M^j,\ j \in T \tag{2.9}$$

otrzymujemy problem postaci $n/m/J,\ \tau \geq 1,\ m_w^k \geq 1,\ RT/C_{max}$, tzn. zagadnienie kolejnościowe gniazdowe z równoległymi maszynami z kryterium maksymalnego czasu zakończenia wszystkich operacji. Przyjmując z kolei

$$d_{ik} = 0,\ f_{ik}(x) = x,\ g_{ik}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases},\ i \in N^j,\ k \in M^j,\ j \in T \tag{2.10}$$

otrzymujemy problem postaci $n/m/J,\ r_i \geq 0,\ \tau \geq 1,\ m_w^k \geq 1,\ RT/C_{max}$, tzn. zagadnienie kolejnościowe gniazdowe z równoległymi maszynami, z różnymi czasami dostępności operacji i z kryterium maksymalnego czasu zakończenia wszystkich operacji. Podobnie, zakładając odpowiednią postać funkcji $g_{ik}(t)$, $f_{ik}(t)$ można otrzymać zagadnienie z funkcjami celu typu L_{max}, T_{max}, f_{max} i inne.

Zagadnienia kolejnościowe tego rodzaju mogą wystąpić w procesach chemicznych lub procesach przetwórstwa spożywczego, w których surowce, półprodukty lub produkty zmieniają swoje własności w czasie trwania procesu (dojrzewają, ulegają rozkładowi, starzeją się). Mogą pojawić się również w procesach metalurgicznych związanych z nagrzewaniem i chłodzeniem elementów.

W literaturze znane są tylko nieliczne rezultaty szczególne dotyczące zagadnień tego typu. W pracy [3] Sidney przedstawił rozwiązanie szczegól-

nego przypadku problemu jednomaszynowego, przyjmując $g_{i1}(x) = g(x)$, $f_{i1} = f(x)$, $i = \overline{1,n}$ oraz $(r_i \leq r_j) \Rightarrow (d_i \leq d_j)$. Z kolei w pracy [1] przedstawiono pewne własności oraz algorytm rozwiązania problemu kolejnościowego taśmowego (flow-shop) przy założeniach $g_{i1}(x) = g(x)$, $f_{im}(x) = f(x)$, $i = \overline{1,n}$.

3. PEWNE WŁASNOŚCI PROBLEMU $n/m/J, \tau \geq 1, m_w^k \geq 1, RT/h_{max}$ ORAZ METODY ROZWIĄZYWANIA

W celu określenia pewnych własności problemu $n/m/J, \tau \geq 1, m_w^k \geq 1, RT/h_{max}$ wprowadzono następujące pojęcia i oznaczenia. Zmienną $\mu(i)$ spełniającą ograniczenie (2.8) będziemy w dalszym ciągu nazywać <u>przydziałem operacji i-tej</u>. Wektor $\bar{\mu} \triangleq [\mu(1), \mu(2), \ldots, \mu(n)]^T$ taki, że dla każdego $i \in N^J$, $\mu(i) \in M^J$, $j \in T$, będziemy nazywać <u>przydziałem operacji do maszyn</u>. Zbiór $\mathcal{M} = \left\{ \bar{\mu} \triangleq [\mu(1), \mu(2), \ldots, \mu(n)]^T \;\middle|\; i \in N^J, \mu(i) \in M^J, j \in T \right\}$ będziemy nazywać <u>zbiorem dopuszczalnych przydziałów</u>. Niech $\bar{\mu}$ będzie pewnym przydziałem. Wówczas

$$N_{k\mu} = \left\{ i \in N \;\middle|\; \mu(i) = k \right\} \tag{3.1}$$

określa zbiór operacji realizowanych na maszynie k-tej (przy przydziale μ). Kolejność realizacji operacji ze zbioru $N_{k\mu}$ może być określona permutacją operacji postaci

$$\pi_k = \langle \pi_k(1), \pi_k(2), \ldots, \pi_k(n_{k\mu}) \rangle$$

gdzie:

$$n_{k\mu} = \mathrm{card}(N_{k\mu}) \text{ oraz } \pi_k(j) \in N_{k\mu}.$$

Wektor permutacji $\bar{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m]^T$ określa kolejność realizacji operacji na każdej maszynie. Zbiór wszystkich takich wektorów permutacji (dla danego $\bar{\mu}$) oznaczmy przez Π_μ. Niech $\bar{\mu} \in \Pi$ będzie pewnym przydziałem, zaś $\pi \in \Pi_\mu$ niech będzie pewnym wektorem permutacji określającym kolejność realizacji operacji na każdej maszynie (dla tego przydziału). Wówczas zbiór postaci:

$$S_{\mu\pi} = \left\{ \bar{s} \triangleq [s_1, s_2, \ldots, s_m]^T \;\middle|\; s_i + p_{i\mu(i)} \leq s_j, \langle i,j \rangle \in RT; \right.$$

$$t_o \leqslant S_i,\ i \in N;\ S_{\pi_k(j)} + p_{\pi_k(j)\mu(\pi_k(j))} \leqslant S_{\pi_k(j+1)},$$

$$\left. j = 1,2,\ldots,n_{k\mu}-1,\ \pi_k(j) \in N_{k\mu},\ k = \overline{1,m} \right\} \tag{3.2}$$

określa dopuszczalne momenty rozpoczęcia wykonywania wszystkich operacji $i \in N$ (dla danego $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$ oraz $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$). Zauważmy, że zbiór $\mathcal{S}_{\mu\pi}$ spełnia ograniczenia (2.3)-(2.5).

Zgodnie z powyższym rozwiązaniem problemu (2.2)-(2.8) polega na wyznaczeniu wartości $\bar{\mu}^* \in \mathcal{M}$, $\bar{\pi}^* \in \Pi_{\mu^*}$, $S^* \in \mathcal{S}_{\mu^*\pi^*}$ takich, że

$$H_{max}(\bar{\mu}^*,\bar{\pi}^*,\bar{S}^*) = \min_{\bar{\mu}\in\mathcal{M}} \min_{\mu\in\Pi_\mu} \min_{\bar{S}\in\mathcal{S}_{\mu\pi}} H(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}), \tag{3.3}$$

gdzie

$$H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \max\left[g_{i\mu(i)}(E_{i\mu(i)}), f_{i\mu(i)}(T_{i\mu(i)})\right] \tag{3.4}$$

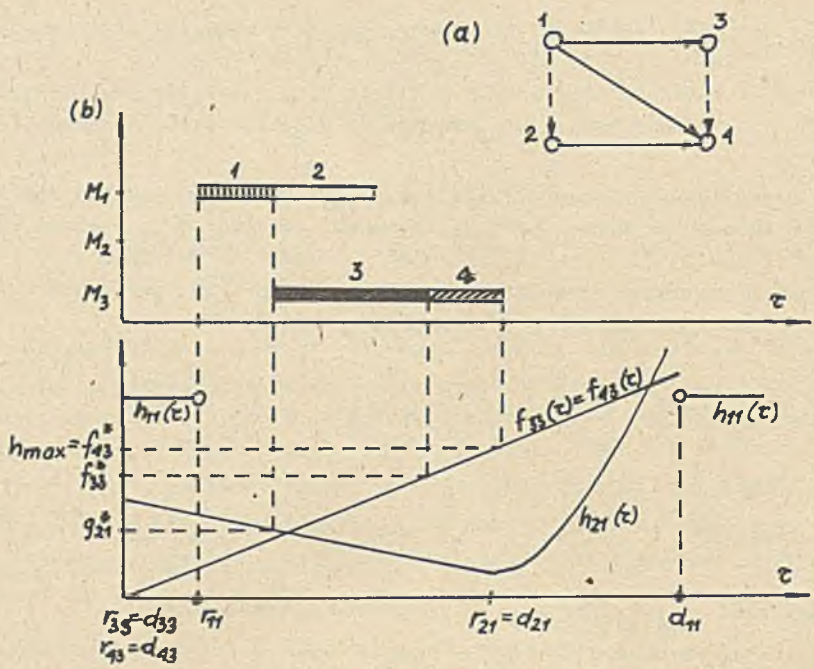
oraz wielkości $E_{i\mu(i)}$, $T_{i\mu(i)}$ są określone wzorami (2.6)-(2.7).

Korzystając ze wzorów (3.3)-(3.4) zaproponowano trójstopniową dekompozycję problemu (2.2)-(2.8). W dalszym ciągu przedstawiono rozwiązanie problemów częściowych powstałych po zdekomponowaniu (3.3).

A. Zadanie dolnego poziomu. Należy wyznaczyć

$$H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^*) = \min_{S\in S_{\mu\pi}} H(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}),\ \bar{\pi} \in \Pi_\mu,\ \bar{\mu} \in \mathcal{M}. \tag{3.5}$$

W celu rozwiązania tego problemu posłużono się modelem grafowym. Niech $\bar{\mu} \subset \mathcal{M}$ będzie pewnym przydziałem, zaś $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$ niech będzie pewnym wektorem permutacji operacji (dla danego $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$). Wówczas kolejność realizacji wszystkich operacji można przedstawić w postaci grafu skierowanego $G_{\mu\pi} = \langle V,A \rangle$, gdzie $V = \{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$ jest zbiorem wierzchołków grafu odpowiadających poszczególnym operacjom, zaś A jest zbiorem łuków grafu reprezentujących wymagania kolejności realizacji operacji. Zbiór A można przedstawić jako $A = A_o \cup \bigcup_{k=1} A_k$, gdzie $A_o = \{\langle V_i,V_j\rangle \mid \langle i,j\rangle \in RT\}$ jest zbiorem łuków stałych grafu, zaś $A_k = \{\langle V_{\pi_k(j)}, V_{\pi_k(j+1)}\rangle \mid j = 1,2,\ldots,n_{k\mu}-1,\ \pi_k(j) \in N_{k\mu}\}$ jest zbiorem łuków kolejnościowych (dysjunktywnych) związanych z k-tą maszyną (rys. 3). Dodatkowo, każdemu wierzchołkowi $V_i \in V$ grafu $G_{\mu\pi}$ przypisana została liczba równa $p_{i\mu(i)}$, będąca obciążeniem wierzchołka.



Rys. 3. Przykład problemu $n/m/J, \tau \geq 1, m_w^k \geq 1, RT/h_{max}$ ($N = \{1,2,3,4\}$, $M = \{1,2,3\}$, $T = \{1,2\}$, $M^1 = \{1,2\}$, $M^2 = \{3\}$, $N^1 = \{1,2\}$, $N^2 = \{3,4\}$)

a) graf $G_{\mu\pi}$ kolejności realizacji operacji dla $\bar{\mu} = [1,1,3,3]$ oraz $\bar{\mu} = [\pi_1,\pi_2,\pi_3]$, gdzie $\bar{\pi}_1 = \langle 1,2\rangle$, $\bar{\mu}_2 = \emptyset$, $\bar{\pi}_3 = \langle 3,4\rangle$; zaznaczono łuki ze zbioru A_o(—→) oraz łuki ze zbiorów A_k(- -→), b) diagram Gantta z rozwiązaniem zadania dolnego poziomu

Niech dalej $\bar{d} \triangleq \langle d_1,d_2,\ldots,d_s\rangle$ będzie ciągiem liczb takim, że:

(a) $d_j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $j = \overline{1,s}$ oraz

(b) istnieje w grafie $G_{\mu\pi}$ droga łącząca wierzchołki $V_{d_1}, V_{d_2}, \ldots, V_{d_s}$.

Oznaczmy przez $D_{\mu\pi}$ zbiór wszystkich ciągów dowolnej długości, spełniających warunki (a)-(b), zaś przez $D_{\mu\pi}(i,j)$ zbiór wszystkich ciągów $\bar{d} \in D_{\mu\pi}$, dowolnej długości, spełniających dodatkowo warunek $d_1 = i$, $d_s = j$ (zbiór tych ciągów jest wyznaczony przez zbiór wszystkich dróg w grafie $G_{\mu\pi}$ łączących wierzchołki V_i oraz V_j) Oznaczmy dodatkowo przez IJ zbiór postaci

$$IJ = \left\{\langle i,j\rangle \mid D_{\mu\pi}(i,j) \neq \emptyset\right\} \tag{3.6}$$

(tzn. w grafie $G_{\mu\pi}$ istnieje droga łącząca wierzchołki V_i i V_j).

Zdefiniujmy wielkości:

$$\Delta_{\mu}(i,j) = r_{i\mu(i)} - d_{j,\mu(j)} + \max_{\bar{d} \in D_{\mu\pi}(i,j)} \sum_{k=1}^{s} p_{d_k \mu(d_k)}, \quad \langle i,j \rangle \in IJ. \tag{3.7}$$

Zauważmy, że suma występująca we wzorze (3.7) może być interpretowana jako najdłuższa droga łącząca wierzchołki V_i oraz V_j, w grafie $G_{\mu\pi}$ (i zawierająca te wierzchołki).

Następujące twierdzenie określa minimalną wartość funkcji celu (3.3) w rozwiązaniu problemu dolnego poziomu.

Twierdzenie 3.1

Niech $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$, $\bar{\pi} \in \Pi_{\bar{\mu}}$ będą odpowiednio przydziałem oraz wektorem permutacji. Wówczas zachodzi:

$$H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^*) = \max\Big[\max_{\langle i,j \rangle \in IJ} g_{i\mu(i)}(e_{ij}^*),$$

$$\max_{\langle i,j \rangle \in IJ} f_{j\mu(j)}(t_{ij}^*), F_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi})\Big] \tag{3.8}$$

gdzie:

$$F_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi}) = \max_{d \in D_{\mu\pi}} f_{d_s \mu(d_s)}\Big(t_o + \sum_{k=1}^{s} p_{d_k \mu(d_k)}\Big) \tag{3.9}$$

zaś wielkości e_{ij}^*, t_{ij}^* są optymalnymi wartościami zmiennych, wyznaczonymi z rozwiązania podproblemów pomocniczych postaci:

$$\min_{e_{ij},t_{ij}} \max\big[g_{i\mu(i)}(e_{ij}), f_{j\mu(j)}(t_{ij})\big] \tag{3.10}$$

$$e_{ij} + t_{ij} = \Delta_{\mu}(i,j) \tag{3.11}$$

$$e_{ij}, t_{ij} \geqslant 0 \tag{3.12}$$

dla każdego $\langle i,j \rangle \in IJ$.

Dowód twierdzenia 3.1 pominięto ze względu na długość.

Niech $G_{\mu\pi} = \langle V,A \rangle$ będzie grafem kolejności realizacji wszystkich operacji, $i \in N$. Oznaczmy przez $\Gamma_i(G_{\mu\pi}) = \{j \mid \langle V_i,V_j \rangle \in A\}$ - zbiór następników operacji i-tej oraz przez $\Gamma_i^{-1}(G_{\mu\pi}) = \{j \mid \langle V_j,V_i \rangle \in A\}$ - zbiór poprzedników operacji i-tej. Wyznaczmy wielkości

$$\hat{E}_i \triangleq \max\left[w \,|\, g_{i,\mu(i)}(w) \leq H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^*)\right\}, \quad i \in N. \tag{3.13}$$

Następująca własność określa optymalne terminy rozpoczęcia operacji $\bar{S}^* = \left[S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*\right]^T$, wyznaczone przez rozwiązanie problemu dolnego poziomu.

<u>Własność 3.1</u>

Niech $\mu \in \mathcal{M}$, $\pi \in \Pi_\mu$ będą odpowiednio przydziałem oraz wektorem permutacji. Niech $\hat{E}_i$, $i \in N$ będą wielkościami określonymi wzorem (3.13). Wówczas zachodzi:

$$\text{(i)} \quad S_i^* = \max\left[t_0, r_{i\mu(i)} - \hat{E}_i\right], \Gamma_i^{-1}(G_{\mu\pi}) = \emptyset, \quad i \in N, \tag{3.14}$$

$$\text{(ii)} \quad S_i^* = \max\left[\max_{j \in \Gamma_i^{-1}(G_{\mu\pi})} (S_j^* + p_{j\mu(j)}), \; r_{i\mu(i)} - \hat{E}_i\right],$$

$$\Gamma_i^{-1}(G_{\mu\pi}) \neq \emptyset, \quad i \in N. \tag{3.15}$$

Dowód własności 3.1 wynika z dowodu tw. 3.1.

B. Zadanie środkowego poziomu. Należy wyznaczyć

$$H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi}^*,\bar{S}^*) = \min_{\bar{\pi} \in \Pi_\mu} H(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^{**}), \; \bar{S}^* \in \mathcal{S}_{\mu\pi^*}, \; S^{**} \in \mathcal{S}_{\mu\pi} \tag{3.16}$$

Problem ten w ogólnym przypadku jest NP-zupełny. W konstrukcji algorytmu tego zagadnienia (opartego na schemacie podziału i ograniczeń) wykorzystano pewne własności przedstawiona poniżej.

Niech $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$ $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$ będą odpowiednio przydziałem oraz wektorem permutacji. Ciąg $\bar{u} \triangleq \langle u_1, u_2, \ldots, u_s \rangle$ nazywamy ciągiem krytycznym (dla danych $\bar{\mu}$ i $\bar{\pi}$), jeśli:

(a) $H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^*) = F_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi})$ oraz $\bar{u} \in D_{\mu\pi}$ jest ciągiem, który maksymalizuje prawą stronę wzoru (3.9) lub:

(b) $H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^*) = \max_{\langle i,j \rangle \in IJ} g_{i\mu(i)}(e_{ij}^*) = g_{i^*\mu(i^*)}(e_{i^*j^*}^*)$

(lub $H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},S^*) = \max_{\langle i,j \rangle \in IJ} f_{i\mu(i)}(t_{ij}^*) = f_{\hat{i}\mu(\hat{i})}(t_{\hat{i}\hat{j}}^*)$)

oraz $\bar{u} \in D_{\mu\pi}$ jest ciągiem postaci:

$$\bar{u} = \langle i^*, d_1, d_2, \ldots, d_s, j^* \rangle, \; (\bar{u} = \langle \hat{i}, d_1, d_2, \ldots, d_s, \hat{j} \rangle)$$

gdzie $<d_1,d_2,\ldots,d_s> \in D_{\mu\pi}(i^*,j^*)$ ($<d_1,d_2,\ldots,d_s> \in D_{\mu\pi}(\hat{i},\hat{j})$) jest ciągiem maksymalizującym sumę ze wzorze (3.7).

Blokiem na maszynie k-tej nazywamy maksymalny podciąg częściowy $\bar{d}_{vy} = \hat{=} <d_v,d_{v+1},\ldots,d_y>$ ciągu krytycznego, spełniający warunek $u(d_v)=u(d_{v+1})= \ldots = u(d_y)$.

Łatwo zauważyć, że w czasie wykonywania operacji z bloku na maszynie k-tej maszyna wykonuje te operacje bez przestoju.

Następujące twierdzenie określa eliminacyjne własności ciągu krytycznego.

Twierdzenie 3.2

Niech $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$ będzie pewnym przydziałem, zaś $\bar{\mu} \in \Pi_\mu$ niech będzie pewnym wektorem permutacji. Jeżeli istnieje wektor permutacji $\bar{\beta} \in \Pi_\mu$ taki, że:

$$H_{max}(\bar{\mu},\bar{\beta},\bar{S}^*) < H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^{**}), \quad \bar{S}^* \in \mathcal{S}_{\mu\beta}, \quad \bar{S}^{**} \in \mathcal{S}_{\mu\pi} \tag{3.17}$$

to w $\bar{\beta}$ przynajmniej jedna operacja dla przynajmniej jednego bloku z $\bar{\pi}$ poprzedza pierwszą lub występuje za ostatnią operacją tego bloku.

Dowód twierdzenia jest analogiczny do dowodów twierdzeń eliminacyjnych przedstawionych w pracach [2],[4].

Dla rozwiązania problemu środkowego poziomu zastosowano metodę podziału i ograniczeń, z mieszaną strategią podziału, wykorzystującą eliminacyjne własności ciągu krytycznego. Niech $\bar{\alpha} \in \Pi$ będzie pewnym początkowym wektorem permutacji. Ogólna idea metody polega na generowaniu, począwszy od $\bar{\alpha}$, ciągu wektorów permutacji $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$. Dla każdego wektora $\bar{\pi}$ z ciągu wyznaczana jest optymalna wartość rozwiązania problemu dolnego poziomu $H_{max}(\bar{\mu},\bar{\pi},\bar{S}^*)$, $\bar{S}^* \in \mathcal{S}_{\mu\pi}$ oraz ciąg krytyczny $\bar{u} \in D_{\mu\pi}$. Nowe wektory permutacji $\bar{\beta} \in \Pi_\mu$ otrzymuje się z pewnego wektora $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$ z ciągu poprzez przesuwanie operacji w blokach. Zastosowano w tym przypadku schemat przesuwania operacji na pozycję pierwszą lub ostatnią w bloku (szczegółowy opis schematu można znaleźć w pracach [2],[4]). Kolejność generowania nowych wektorów permutacji została określona poprzez lokalną ocenę zmiany wartości funkcji celu przy przesuwaniu jednej operacji. Proces generowania ciągu $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$ jest więc procesem przeglądu drzewa wektorów permutacji $\bar{\pi} \in \Pi_\mu$, przy czym dolne ograniczenie wartości funkcji celu problemu $n/m/J,\tau \geq 1,m_w^k \geq 1,RT/h_{max}$ stwarza dodatkowe możliwości eliminacyjne. Dla rozważanego zagadnienia dolne ograniczenie wyznaczono poprzez relaksację możliwości wykonawczych maszyn, relaksację funkcji kosztów operacji oraz relaksację relacji poprzedzeń.

C. Zadanie górnego poziomu. Należy wyznaczyć

$$H(\bar{\mu}^*,\bar{\pi}^*,\bar{s}^*) = \min_{\bar{\mu}\in\mathcal{M}} H(\bar{\mu},\bar{\pi}^{**},\bar{s}^{**}),\ \bar{s}^{**}\in\mathcal{S}_{\mu^*\pi^*},\ \bar{\pi}^*\in\Pi_{\mu^*}$$

$$\bar{s}^{**}\in\mathcal{S}_{\mu\pi^{**}},\ \bar{\pi}^{**}\in\Pi_{\mu} \qquad (3.18)$$

Problem ten jest rozwiązywany przez przegląd zbioru $\mathcal{M}$ z eliminacją rozwiązań (podzbiorów rozwiązań) za pomocą dolnych ograniczeń oraz dodatkowych kryteriów eliminacji. Kolejność przeglądania elementów zbioru $\mathcal{M}$ jest określona przez lokalną ocenę zmiany wartości funkcji celu przy zmianie przydziału jednej operacji.

4. PODSUMOWANIE

Zaproponowany algorytm jest trójpoziomowym algorytmem powstałym przez złożenie algorytmów rozwiązania problemów opisanych w punkcie 3, A,B,C. Na poziomie dolnym rozwiązywany jest problem o złożoności wielomianowej $O(n^4)$. Algorytm poziomu środkowego jest algorytmem podziału i ograniczeń z cofaniem i wymaga zastosowania algorytmu heurystycznego do wyznaczania rozwiązania początkowego $\bar{\alpha}\in\Pi_{\mu}$. Podobnie algorytm górnego poziomu.

Z opisu podanego w p. 3 pracy wynikają następujące własności algorytmu:

- algorytm jest algorytmem dokładnym, tzn. wyznacza rozwiązanie globalnie optymalne,
- możliwa jest współpraca algorytmu z dowolnymi algorytmami przybliżonymi (heurystycznymi); rozwiązanie przybliżone jest poprawiane w kolejnych krokach algorytmu dokładnego,
- w każdym kroku algorytmu znane jest pewne rozwiązanie dopuszczalne,
- możliwe jest przerwanie pracy algorytmu w dowolnym momencie; aktualnie dostępne rozwiązanie może być uznane za rozwiązanie suboptymalne.

Podane cechy umożliwiają zastosowanie skonstruowanego algorytmu w większości automatycznych systemów podejmowania decyzji, jak również w systemach decyzyjnych czasu rzeczywistego.

LITERATURA

[1] ACHUTHAN N.R., GRABOWSKI J., SIDNEY J.B.: Optimal Flow-Shop Scheduling with Earliness and Tardiness Penalties, Opsearch, nr 4, 1981.

[2] GRABOWSKI J.: Uogólnione zagadnienie optymalizacji kolejności operacji w dyskretnych systemach produkcyjnych. Prace Naukowe ICT PWr,Ser. Monografie, nr 9, Wrocław, 1979.

[3] SIDNEY J.B.: Optimal Single - machine Scheduling with Earliness and Tardiness Penalties, Opns Res., vol. 25, 1977, ss. 62-69.

[4] SMUTNICKI C.: Zagadnienie optymalizacji sekwencji operacji w dyskretnych systemach produkcyjnych z kryterium minimalno-kosztowym. Praca doktorska. Raport Serii PRE, nr 2/81, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981.

[5] SMUTNICKI C.: Metoda "ciągu krytycznego" w zagadnieniach kolejnościowych z minimaksową funkcją celu. Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, z. 146, Kraków 1981.

Rezenzent: Dr inż. Franciszek MARECKI

Wpłynęło do Redakcji 15.05.1982 r.

ПРОБЛЕМА ЧЕРОДОВАНИЯ ЗАДАЧ С МИНИМАКСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ

Р е з ю м е

В статье представлено гнездовую проблему чередования операций с параллельными машинами и общей минимаксовой функцией цели. В этом случае функция цели представляет собой максимальный штраф за ускорение или опоздание всех операций. Показано несколько свойств этой проблемы.Описано общую идею решения в виде алгоритма. Введённый алгоритм может быть применён в нескольких автоматических системах принятия решений в дискретных производственных системах.

THE PROBLEMS OF JOB SCHEDULING WITH MINIMAX GOAL FUNCTION

S u m m a r y

In the paper the job-shop problem with parallel machines and general minimax goal function is considered. In the presented case the goal function is the maximum of earliness or tardiness penalties. Some properties of the problem are shown and the general idea of solution algorithm is described. The proposed algorithm can be used in automatic decision - making systems in discrete production processes.