ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 65 Nr kol. 738

Ryszard GESSING

Politechnika Śląska

DWUPOZIOMOWE HIERARCHICZNE STEROWANIE STATYSTYCZNIE OPTYMALNYM ROZDZIAŁEM ZASOBÓW

Część II. PRZYPADEK LINIOWEGO SYSTEMU I KWADRATOWEGO WSKAŹNIKA JAKOŚCI

Streszczenie. W części II pracy rozpatrywana jest dwupoziomowa struktura sterowania optymalnym rozdziałem zasobów w przypadku, gdy system jest statyczny i liniowy, a wskaźnik jakości jest kwadratowy. Strategie sterowania optymalnego poszczególnych punktów decyzyjnych przyjmują w rozważanym przypadku postać analityczną. Rozpatruje się również przypadek dynamicznego rozdziału zasobów w systemie statycznym, w którym dynamika wynika z uwzględnienia pojemności magazynu gromadzącego zasoby.

1. WSTĘP

Niniejsza część II pracy stanowi kontynuację części I [8], w której przedstawiono oryginalną metodę wyznaczania optymalnych strategii sterowania rozdziałem zasobów, realizowanego w strukturze hierarchicznej. W niniejszej pracy stosuje się tę metodę do wyznaczania strategii optymalnych w przypadku, gdy system jest liniowy, a wskaźnik jakości - kwadratowy. Poniższe rozważania można zatem częściowo traktować jako zastosowanie przedstawionej uprzednio metody do przypadku, w którym możliwe jest wyprowadzenie strategii optymalnych w postaci analitycznej. Dzięki temu możliwe jest porównanie wyników sterowania statystycznie optymalnego, realizowanego w omawianej strukturze dwupoziomowej i zwykłej jednopoziomowej. W końcowej części pracy przedstawia się zastosowanie otrzymanych wyników do przypadku, gdy w systemie istnieje magazyn gromadzący zasoby, co prowadzi do konieczności uwzględnienia dynamiki.

Dla zrozumienia prezentowanej części II pracy konieczne jest uprzednie zaznajomienie się z częścią I [8]. Rozpatrywana tutaj struktura systemu sterowania, dostępna informacja i poczynione założenia zostały opisane w części I pracy i nie będą tutaj powtarzane.

Przy powoływaniu się na wzory z części I pracy wymieniony numer wzoru poprzedzony jedynką rzymską, np. (I.19), oznacza wzór (19) z części I pracy.

2. Problem liniowo-kwadratowy

Załóżmy teraz, że równanie systemu i pierwotny wskaźnik jakości mają postać

$$y^i = B^i u^i + w^i, \quad i = 1,2,\ldots,M, \tag{1}$$

$$I = \sum_{i=1}^{M} (y^{iT} Q^i y^i + u^{iT} H^i u^i), \tag{2}$$

gdzie: B^i - macierze a Q^i i H^i - macierze symetryczne odpowiednio nieujemnie i dodatnio określone. Zakładamy, że zmienne losowe w^j są niezależne od decyzji u^i, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,M$.

Zgodnie z twierdzeniem 2 z części I, pracy [8], strategia optymalna $u^i = a^{iO}(\bar{y}^i, q^i)$ wynika z rozwiązania zagadnienia minimalizacji w następującym wyrażeniu (wynikającym ze wzorów (I.19),(I.24) i (I.25))

$$\bar{L}^i(y,q^i) = \min_{a^i} E_{|\bar{y}} \left[a^{iT}(B^{iT} Q^i B^i + H^i) a^i + 2a^{iT} B^{iT} Q^i w^i + w^{iT} Q^i w^i \right] \tag{3}$$

przy ograniczeniu

$$E_{|\bar{y}}\, a^i(\bar{y}, q^i) = q^i \tag{4}$$

Zagadnienie to można rozwiązać korzystając z Twierdzenia 1 [8]. Równanie (I.16) po uwzględnieniu (3) i wprowadzeniu oznaczenia

$$S^i = B^{iT} Q^i B^i + H^i \tag{5}$$

przyjmuje postać

$$I^*(\bar{y}^i, u^i, \lambda^i) = E_{|\bar{y}}\, i(u^{iT} S^i u^i + 2u^{iT} B^{iT} Q^i w^i + w^{iT} Q^i w^i) + 2\lambda^{iT} u^i, \tag{6}$$

gdzie dla wygody obliczeń wprowadzono mnożnik Lagrange'a $2\lambda^i$. Po wprowadzeniu oznaczenia $\hat{w}^i = E_{|\bar{y}^i}\, w^i$ warunki (I.17) i (I.18) przyjmują postać:

$$2S^i u^i + 2B^{iT} Q^i \hat{w}^i + 2\lambda^i = 0 \tag{7}$$

$$E_{|\bar{y}}\, u^i = q^i \tag{8}$$

Stąd

$$u^i = -(S^i)^{-1} (B^{iT} Q^i \hat{w}^i + \lambda^i) \tag{9}$$

Podstawiając (9) do (8) wyznaczamy λ^i

$$\lambda^i = -S^i q^i - B^{iT} Q^i \hat{w}^i \tag{10}$$

gdzie $\hat{w}^i = E_{|\bar{y}}\, w^i$. Uwzględniając (10) w (9) otrzymujemy

$$u^i = a^{i0}(\bar{y}^i, q^i) = q^i - (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i (\hat{\hat{w}}^i - \hat{w}^i) \tag{11}$$

Podstawiając (11) do (3) i wykonując operacje $E_{|\bar{y}}$ otrzymujemy po przekształceniach

$$\bar{L}^i(\bar{y}, q^i) = q^{iT} S^i q^i + 2q^{iT} B^{iT} Q^i \hat{w}^i +$$

$$+ E_{|\bar{y}}\, w^{iT} Q^i w^i - E_{|\bar{y}} (\hat{\hat{w}}^i - \hat{w}^i)^T Q^i B^i (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i (\hat{\hat{w}}^i - \hat{w}^i) \tag{12}$$

Strategię optymalną $q^i = b^{i0}(\bar{y})$, $i = 1,2,\ldots,M$ dla wyższego poziomu wyznaczamy podstawiając (12) do (I.21) i dodając do tego wyrażenia wielkość $2\lambda^T(\sum_{i=1}^{M} q^i - \bar{q})$, gdzie 2λ - mnożnik Lagrange'a. Po zróżniczkowaniu otrzymanego wyrażenia względem q^i i przyrównaniu do zera otrzymujemy:

$$q^i = -(S^i)^{-1}(B^i Q^i \hat{w}^i + \lambda), \tag{13}$$

gdzie mnożnik λ wyznaczamy podstawiając (13) do (I.21), skąd po wprowadzeniu oznaczenia $S = \left[\sum_{i=1}^{M} (S^i)^{-1}\right]^{-1}$ otrzymujemy

$$\lambda = -S\left[\sum_{i=1}^{M} (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i \hat{w}^i + \bar{q}\right] \tag{14}$$

Podstawiając (13) wraz z (14) do (12), a to z kolei do (I.21) otrzymujemy po przekształceniach

$$\bar{L}(\bar{y}, \bar{q}) = \bar{q}^T S \bar{q} + 2\bar{q}^T S \sum_{i=1}^{M} (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i \hat{w}^i + R(\bar{y}) \tag{15}$$

gdzie

$$R(\bar{y}) = \left[\sum_{i=1}^{M} (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i \hat{w}^i\right]^T S \left[\sum_{i=1}^{M} (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i \hat{w}^i\right] +$$

$$+ E_{|\bar{y}} \sum_{i=1}^{M} w^{iT} Q^i w^i - E_{|\bar{y}} \sum_{i=1}^{M} \hat{\hat{w}}^{iT} Q^i B^i (S^i)^{-1} B^{iT} Q^i \hat{\hat{w}}^i, \tag{16}$$

przy czym $R(\bar{y})$ nie zależy od $\bar{q}$.

Twierdzenie 1

Dla systemu opisanego równaniem (1) i pierwotnego wskaźnika jakości (2) strategie optymalne $u^i = a^{iO}(\bar{y}^i, q^i)$ oraz $q^i = b^{iO}(\bar{y})$, $i = 1,2,\ldots,M$, minimalizujące wtórny wskaźnik jakości, są określone odpowiednio przez zależności (11) oraz (13), (14).

3. Porównanie ze sterowaniem realizowanym w strukturze jednopoziomowej

Rozważmy teraz przypadek, gdy decyzje o wielkościach u^i są podejmowane na wyższym poziomie przy informacji określonej przez wektor $\bar{y}$. Odpowiada to jednopoziomowej strukturze układu sterowania, w której informacja dolnego poziomu nie jest wykorzystywana. Niechaj dopuszczalne strategie sterowania są określone przez funkcje $u^i = d^i(\bar{y})$, $i = 1,2,\ldots,M$, odwzorowujące zbiór $\bar{Y}$ w zbiór R^r, dla których wtórny wskaźnik jakości o postaci

$$\bar{I}(d) = \sum_{i=1}^{M} \left[y^{iT} Q^i y^i + d^{iT}(\bar{y}) H^i d^i(\bar{y}) \right], \tag{17}$$

(gdzie $d = \left\{ d^1, d^2, \ldots, d^M \right\}$) przyjmuje określoną wartość.

Nietrudno zauważyć, że optymalne strategie sterowania $u^i = d^{iO}(\bar{y})$, można wyznaczyć rozwiązując zagadnienie minimalizacji wyrażenia

$$\bar{L}^*(\bar{y}, \bar{q}) = \min_u \sum_{i=1}^{M} \bar{L}^{*i}(\bar{y}, u^i) \tag{18}$$

gdzie $u = \left[u^{1T}, u^{2T}, \ldots, u^{MT} \right]^T$ oraz

$$\bar{L}^{*i}(\bar{y}, u^i) = u^{iT} S^i u^i + 2u^{iT} B^{iT} Q^i \hat{w}^i + E\,|_{\bar{y}}\, w^{iT} Q^i w^i, \tag{19}$$

przy ograniczeniu

$$\sum_{i=1}^{M} u^i = \bar{q}. \tag{20}$$

Z porównania wzorów (19) i (12) widać, że określają one podobne funkcje zmiennych u^i lub q^i, różniące się tylko o wyrażenie niezależne od tych zmiennych. Uwzględniając ten fakt oraz porównując wzory (18), (19) i (20) ze wzorami (I.21), (12) (I.22), możemy wysnuć następujący wniosek.

Wniosek 1

Przy realizacji sterowania w strukturze dwupoziomowej uzyskujemy zmniejszenie optymalnej wartości wtórnego wskaźnika jakości w stosunku do warto-

ści tego wskaźnika odpowiadającej realizacji sterowania w strukturze jednopoziomowej z informacją określoną przez wektor $\bar{y}$ o wartość równą

$$\bar{I}^{o}_{jw} - \bar{I}^{o}_{d} = E \sum_{i=1}^{M} (\hat{w}^{i} - \hat{\bar{w}}^{i})^{T} Q^{i} B^{i} (S^{i})^{-1} B^{iT} Q^{i} (\hat{w}^{i} - \hat{\bar{w}}^{i}) \geqslant 0, \qquad (21)$$

gdzie $\bar{I}^{o}_{jw}$ i $\bar{I}^{o}_{d}$ - oznaczają minimalne wartości wtórnego wskaźnika jakości odpowiednio dla struktury jednopoziomowej z informacją $\bar{y}$ i dla struktury dwupoziomowej. Jest to wynik wykorzystania bardziej szczegółowej informacji niższego poziomu na skutek pozostawienia temu poziomowi pewnej "swobody" decyzji, wyrażonej ograniczeniem (4).

Należy podkreślić, że rozpatrywana w niniejszej pracy oryginalna koncepcja sterowania w strukturze dwupoziomowej, z różną informacją wyższego i niższego poziomu została zaproponowana po to, aby zmniejszyć ilość informacji przesyłanej do centralnego punktu decyzyjnego wyższego poziomu i przetwarzanej przez ten punkt. Zauważmy, że do centralnego punktu decyzyjnego przesyłana jest tylko informacja zawarta w wektorze $\bar{y}$, natomiast z tego punktu do i-tego punktu decyzyjnego niższego poziomu przesyłana jest tylko informacja o wielkości q^{i}. Z założenia o wzajemnej relacji pomiędzy wektorami $\bar{y}$ i $\bar{y}^{i}$ [8] wynika bowiem, że występujące w optymalnej strategii i-tego punktu decyzyjnego niższego poziomu oceny $\hat{\bar{w}}^{i}$ i $\hat{w}^{i}$ mogą być wyznaczone lokalnie na poziomie niższym.

Z punktu widzenia ilości informacji przesyłanej do centralnego punktu decyzyjnego mogą być zatem porównywane struktura dwupoziomowa ze strukturą jednopoziomową z informacją $\bar{y}$. Z wniosku 1 wynika, że w strukturze dwupoziomowej uzyskujemy zazwyczaj lepsze wyniki sterowania wyrażające się mniejszą wartością wtórnego wskaźnika jakości niż w strukturze jednopoziomowej z informacją $\bar{y}$. Wynik ten jest zgodny z oczekiwaniami, gdyż w strukturze dwupoziomowej dysponujemy większą ilością informacji.

Natomiast zaskakujący na pierwszy rzut oka jest wynik porównania struktury dwupoziomowej ze strukturą jednopoziomową z informacją $\bar{y}^{*} = [\bar{y}^{T}, \bar{y}^{1T}, \bar{y}^{2T}, \ldots, \bar{y}^{MT}]^{T}$. Można mianowicie pokazać, że również w tym przypadku sterowanie realizowane w strukturze dwupoziomowej daje zazwyczaj lepsze wyniki, wyrażające się zmniejszeniem wartości wtórnego wskaźnika jakości. Zastanawiając się nad tym, co może być przyczyną takiego wyniku, dochodzimy do wniosku, że przyczyną tą jest wprowadzenie niekonwencjonalnego elastycznego ograniczenia (4). Jak już wspominaliśmy, ograniczenie to pozostawia dolnemu poziomowi pewną swobodę w podejmowaniu decyzji, które wyraża się tym, że podczas poszczególnych realizacji podziału zasobów o wielkości, które średnio powinna wynosić $\bar{q}$ dzieli się raz zasoby większe niż $\bar{q}$, a innym razem mniejsze, tak że razem daje to średnią wartość $\bar{q}$. Do realizacji takiego sterowania potrzebne jest zatem utrzymywanie w magazynie pewnych rezerwowych zapasów zasobów ponad wartość $\bar{q}$, przeznaczo-

nych na ewentualne pokrycie "uzasadnionego", zwiększonego zapotrzebowania. Inaczej mówiąc, lepsze wyniki sterowania są uzyskiwane dzięki właśnie tym zapasom rezerwowym, utrzymywanym na pojawiającą się czasami "sytuację okazyjną". Wydaje się, że takie postępowanie bywa praktykowane przy rozsądnym gospodarowaniu zasobami finansowymi.

Wyznaczenie rezerwowego zapasu zasobów, przy którym mogą być realizowane rozważane strategie optymalne z zadanym prawdopodobieństwem, jest możliwe, jeżeli znamy wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa wektorów y^1, $y^2,\ldots,y^M$ lub - podczas realizacji sterowania.

4. Sterowanie w zadanym przedziale czasu z magazynem o ograniczonej pojemności i losowym dopływem

Rozważmy teraz przypadek dynamicznego rozdziału zasobów w zadanym przedziale czasu $[0,N]$, dla systemu statycznego opisanego równaniem (1) i powstającego z (2) pierwotnego wskaźnika jakości o postaci

$$I = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (y_n^{iT} Q^i y_n^i + u_n^{iT} H^i u_n^i) \tag{22}$$

Zakładamy, że zasoby są gromadzone w jednym magazynie zasilanym przez losowy dopływ zasobów d_n, z którego to magazynu następuje sterowany pobór zasobów $\bar{q}_n$ przez system i sterowany odpływ zasobów o_n poza system (wszystkie wielkości w chwili n). Poziom zasobów h_n w magazynie powinien spełniać ograniczenie

$$h'_{min} \leq h_n \leq h'_{mx} \tag{23}$$

Jak dotychczas rozpatrujemy dwupoziomową strukturę układu sterowania, w której dostępna w chwili n informacja poziomu wyższego i niższego jest reprezentowana odpowiednio przez wektory $\bar{y}_n$ i $\bar{y}_n^i$, $i = 1,2,\ldots,M$. Utrzymujemy w mocy poczynione poprzednio założenia. Zakładamy dodatkowo, że wektory $\bar{y}_n$, $n = 0,1,\ldots,N$, mają taką własność, że wszystkie składowe wektora $\bar{y}_n$ występują również w wektorze $\bar{y}_{n+1}$[1], przy czym ten ostatni zawiera również rezultaty nowo otrzymanych pomiarów $\bar{y}_{n+1}$, w których występuje wielkość h_{n+1}. Ponieważ system jest statyczny, więc zakładamy także, że decyzje u_n^i nie mają wpływu na wektory $\bar{y}_{n+1}^j$, $i,j, = 1,2,\ldots,M$.

Rozwiązujemy teraz problem wtórny polegający na minimalizacji wtórnego wskaźnika jakości o postaci

[1] Założenie to w niektórych przypadkach nie jest potrzebne.

$$\bar{I}(a,b,c) = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M}\Big\{ y_n^{iT} Q^i y_n^i +$$

$$+ a^{iT}\left[y_n^i, b^i(\bar{y}_n, c_n^1(\bar{y}_n))\right] H^i \cdot a^i\left[\bar{y}_n^i, b^i(\bar{y}_n, c_n^1(y_n))\right] \tag{24}$$

gdzie

$$a = \left\{a^1, a^2, \ldots, a^M\right\}, \quad b = \left\{b^1, b^2, \ldots, b^M\right\}, \quad c = \left\{c_0^1, \ldots, c_N^1, c_0^2, \ldots, c_N^2\right\}$$

poprzez dobór funkcji a,b,c, spełniających ograniczenia (I.5) i (I.6) oraz wynikające z (23) zmodyfikowane ograniczenie w postaci

$$h_{min} \leqslant h_n - \bar{q}_n - o_n + \hat{d}_n \leqslant h_{mx}, \quad n = 0,1,\ldots,N. \tag{25}$$

gdzie:

$$\bar{q}_n = c_n^1(\bar{y}_n), \quad o_n = c_n^2(\bar{y}_n), \quad \hat{d}_n = E_{|\bar{y}_n} d_n.$$

Poszukujemy zatem strategii optymalnych niższego poziomu $u_n^i = a^{i0}(\bar{y}_n^i, q_n^i)$, $i = 1,2,\ldots,M$ oraz wyższego poziomu $q_n^i = b^{i0}(\bar{y}_n, \bar{q}_n)$, $i = 1,2,\ldots,M$, $\bar{q}_n = c_n^{10}(\bar{y}_n)$, $o_n = c_n^{20}(\bar{y}_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$.

Wykorzystując poprzednio rozważania, nietrudno zauważyć, że funkcje a^{i0} i b^{i0} są określone odpowiednio przez wzory (11) i (13), (14), natomiast funkcje c_n^{10} i c_n^{20}, $n = 0,1,\ldots,N$, można wyznaczyć rozwiązując zagadnienie minimalizacji w następującym, wynikającym z (24) i (15), równaniu Bellmana

$$\bar{S}_n(\bar{y}_n) = \min_{\bar{q}_n, o_n}\left\{\bar{q}_n^T S \bar{q}_n + 2\bar{q}_n^T S \sum_{i=1}^{M}(S^i)^{-1} B^{iT} Q^i w^i + E_{|\bar{y}_n} \bar{S}_{n+1}(\bar{y}_n+1)\right\} \tag{26}$$

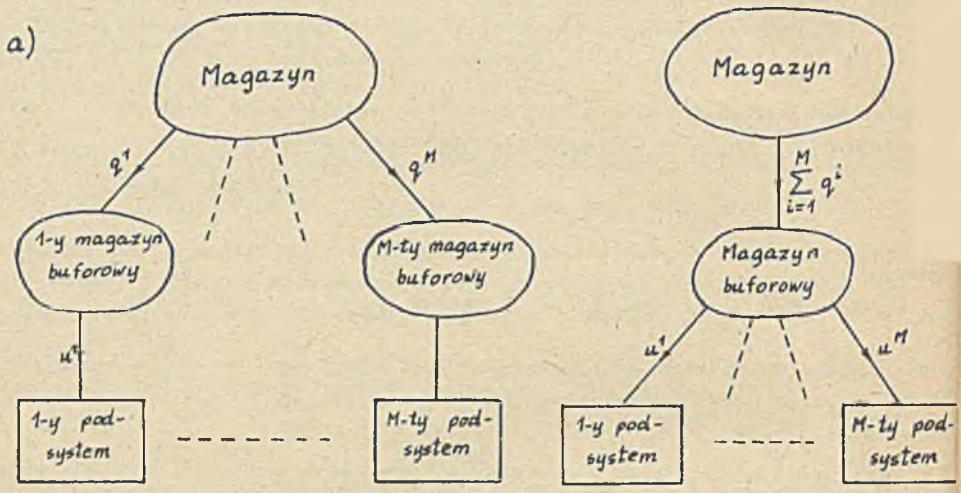
z uwzględnieniem ograniczenia (25) oraz warunku końcowego $\bar{S}_{N+1}(\bar{y}_{N+1}) = 0$[2)]

Dla uproszczenia rozważań ograniczono się tutaj do jednego magazynu gromadzącego zasoby. Rozpatrzenie kilku magazynów wraz z ewentualnymi ograniczeniami w transporcie zasobów pomiędzy magazynami nie powinno stwarzać trudności formalnych, chociaż zwiększają się wtedy trudności obliczeniowe.

---

2) Mówiąc dokładniej, tak określone funkcje $a^{io}, b^{io}, c_n^{10}, c_n^{20}$ minimalizują wskaźnik (24) przy dodatkowym założeniu, że na drodze transportu zasobów z magazynu do podsystemu, znajduje się tzw. magazyn buforowy, dla którego wielkości q_n^i i u_n^i stanowią odpowiednio - dopływ zasobów z magazynu głównego i - odpływ zasobów do podsystemu (rys. II.1).

Nietrudno zauważyć, że zmodyfikowane ograniczenie (25) dopuszcza przekraczanie dolnego i górnego ograniczenia poziomu. Ograniczenie h_{min} powinno być zatem dobrane w ten sposób, aby przy $h_n = h_{min}$ w magazynie znajdował się jeszcze rezerwowy zapas zasobów, na pokrycie jednokrokowego chwilowo zwiększonego ponad $\bar{q}_n$ zapotrzebowania.



Rys. II.1. Struktura przepływu zasobów, dla której podano rozwiązanie jest optymalne:

a - przypadek M - magazynów buforowych, b - przypadek jednego magazynu buforowego

5. Podsumowanie

W rozważonym przypadku problemu liniowo-kwadratowego otrzymujemy znaczne uproszczenie obliczeń, gdyż pokaźna część funkcji określających optymalne strategie może być otrzymana na drodze analitycznej.

Porównanie sterowania realizowanego w strukturze dwupoziomowej i jednopoziomowej wychodzi na korzyść struktury dwupoziomowej. Jest to wynikiem sformułowania rozpatrywanego problemu, w którym zakłada się utrzymywanie w magazynie pewnych rezerwowych zapasów zasobów, przeznaczonych na pokrycie uzasadnionego zwiększonego zapotrzebowania.

W przypadku systemu statycznego i magazynu gromadzącego zasoby polityka optymalnego rozdziału zasobów prowadzi do konieczności uwzględnienia dynamiki. Możliwe jest jednak w tym przypadku wykorzystanie wzorów określających strategie optymalne na poziomie niższym, obowiązujących dla "statycznego" przydziału zasobów o z góry zadanej wartości średniej.

Podziękowanie

Duże znaczenie dla powstania obu części niniejszej pracy miały dyskusje prowadzone w Zespole Teorii Sterowania Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej. Autor dziękuje niniejszym dr inż. Michałowi Latarnikowi, dr inż. Konradowi Wojciechowskiemu, dr inż. Andrzejowi Świerniakowi i innym pracownikom Zespołu Teorii Sterowania za aktywny udział w dyskusjach.

LITERATURA

[1]÷[7]- numeracja według spisu literatury zamieszczonego w części I pracy [8].

[8] Gessing R.: Dwupoziomowe hierarchiczne sterowanie statystyczne optymalnym rozdziałem zasobów. Część I. Podstawowe problemy w przypadku systemów statycznych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., "Automatyka" (w druku).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

ДВУХ-УРОВЕННОЕ ИЕРАРХИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ

Часть II. Случай нелинейной системы и квадратичного показателя качества

Р е з ю м е

Рассматривается двух-уровенную структуру управления оптимальным распределением ресурсов в случае статической, линейной системы и квадратичного показателя качества. Оптимальные стратегии управления отдельных решителей принимают, в рассматриваемом случае, аналогичную форму. Рассматривается также случай динамического распределения ресурсов в статической системе, в которой динамика вытекает из учёта ёмкости склада накапливающего ресурсы.

TWO-LEVEL HIERARCHICAL CONTROL FOR STOCHASTIC OPTIMAL RESOURCE DISTRIBUTION

Part. II. THE CASE OF LINEAR SYSTEM AND QUADRATIC PERFORMANCE INDEX

S u m m a r y

In the second part of the paper the two-level control structure for the optimal resource distribution in the case of a linear system and quadratic performance index has been considered. In the considered case the op-

timal control strategies of the particular decision-makers take the analytical form. The case of dynamic resource distribution in a static system in which the dynamics results from the resource storage capacity has also been considered.