

Marek KIMMEL

Politechnika Śląska

NIETYPOWE ZADANIA TEORII KOLEJEK

ZWIĄZANE Z DYSKRETNymi PROCESAMI PRZEMYSŁOWYMI

Część I - PODSTAWOWE MODELE

Streszczenie. Wprowadzono opis probabilistyczny modeli pewnych procesów o charakterze dyskretnym. Modele pokrywają pewną klasę tak zwanych dyskretnych procesów przemysłowych, ważną dla zastosowań. Do opisu procesów użyto procesów Markowa o nieskończonej liczbie stanów.

1. WSTĘP

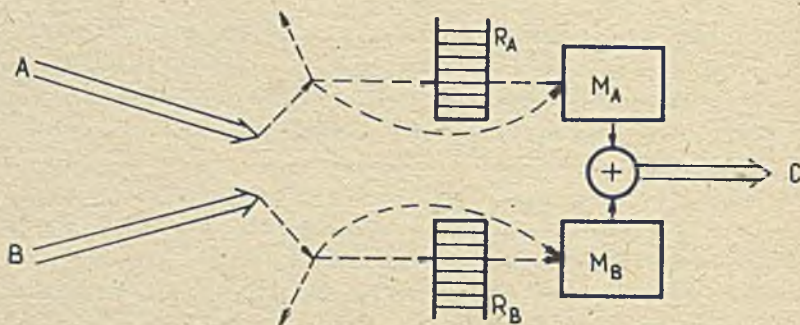
Matematyczny opis dynamiki dyskretnych procesów przemysłowych (w których materiał i półprodukty przepływają w nieciągłych porcjach) dostarcza wielu problemów o charakterze probabilistycznym. Występują one zwykle wówczas, kiedy w grę wchodzi zagadnienie jakości wyrobów. Jest to związane z losowością powstawania usterek. Problemy te są z reguły zbliżone do tradycyjnych zadań teorii kolejek (procesów obsługi masowej [4]) z pewnymi specyficznymi różnicami. Mianowicie, w klasycznych problemach obsługi najczęściej przyjmowane jest założenie o tzw. całkowitej losowości strumienia wejściowego lub założenia zbliżone, co pociąga za sobą oczywiste konsekwencje dla opisu matematycznego. W zadaniach wynikłych z rozważania dyskretnych procesów przemysłowych nie stosuje się założenia o całkowitej losowości strumienia, przeciwnie - w grę wchodzi strumienie zdarzeń "regularne" i "deterministyczne", a tylko "popsute" przez losowe usterek produkcji. Tak więc, proces ma w tym przypadku o wiele bardziej "sztywny" charakter.

W pracy rozważa się dwa modele matematyczne procesów, związane z pracą tzw. węzła montażu, który jest częścią składową bardziej złożonych procesów dyskretnych. W punkcie 2 pracy powtórzono dla wygody czytelnika opis funkcjonowania typowego węzła montażu [3] oraz podano niezbędne definicje i własności funkcji tworzących prawdopodobieństwa oraz procesów Markowa. W punktach 3 i 4 rozważono odpowiednio model I i model II, będące różnymi uproszczeniami modelu podstawowego. Wyprowadzono wzory na ewolucję w czasie rozkładów prawdopodobieństwa interesujących zmiennych losowych. W części II pracy podane zostanie twierdzenie graniczne dla szczególnej wersji

modelu I oraz jego konsekwencje, podczas gdy w części III udowodnione zostaną pewne niepełne rezultaty dla ogólnej postaci modelu I i dla modelu II. W części III zamieszczone będą również wyniki badań o charakterze numeryczno-symulacyjnym.

2. Opis węzła montażu, funkcje tworzące i procesy Markowa

Węzeł montażu jest układem trzech linii montażowych, jak na rys. 1. Linie A i B służą do wytwarzania dwóch półproduktów, kierowanych następnie do magazynów M_A i M_B . Następnie półprodukty kieruje się do tzw. węzła sumacyjnego, w którym montuje się z nich produkt finalny, transportowany dalej linią C. Półprodukty mogą posiadać usterki i są wówczas kierowane na zespoły stanowisk remontowych R_A i R_B . Krytyczne dla procesu są liczby półproduktów w magazynach M_A i M_B , dlatego w dalszym ciągu rozważane będą rozkłady tych właśnie zmiennych losowych. Inne zagadnienia, związane z dynamiką węzła montażu, przedstawiono w pracy [3].



Rys. 1. Schemat ideowy węzła montażu

Definicja 2.1: Niech N będzie zmienną losową o wartościach całkowitych nieujemnych i niech $p_n = \mathcal{P}\{N = n\}$. Funkcję $g(s)$ zmiennej rzeczywistej s ($s \in [0, 1]$) określoną wzorem:

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \quad (2.1)$$

nazywa się funkcją tworzącą prawdopodobieństwa (FTP) zmiennej losowej N . Ponieważ $p_n \geq 0$, $\sum p_n = 1$, FTP jest funkcją analityczną (tj. rozkładalną w szereg Taylora) dla $s \in (-1, 1)$.

Podstawowe własności FTP ujęte zostaną w postaci lematu.

Łemat 2.1 (por. np. [1]). Niech $g(s)$ będzie FTP zmiennej losowej N (całkowitej nieujemnej). Niech dalej $E(N)$ będzie wartością oczekiwaną N i ogólniej niech:

$$M_{(1)} = E [N(N-1)\dots(N-k+1)] \quad (2.2)$$

będzie l -tym momentem faktorialnym N (dopuszcza się $M_{(1)} = \infty$). Wówczas:

(a) $g(s)$ jest dodatnia, ściśle wypukła o ile $p_0 + p_1 \neq 1$ i ściśle rosnąca, o ile $p_0 \neq 1$ ($s \in [0, 1]$),

(b) zachodzą wzory:

$$p_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n g(s)}{ds^n} \right|_{s=0} \quad (2.3)$$

(c) zachodzą wzory:

$$M_{(1)} = \left. \frac{d^1 g(s)}{ds^1} \right|_{s=1} \quad (2.4)$$

przy czym lewa strona równa się ∞ , wtedy i tylko wtedy, o ile $\lim_{s \rightarrow 1^-} d^1 g/ds^1 = \infty$,

(d) niech $\{N_m\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych, a $\{g_m(s)\}$ ciągiem odpowiednich FTP; wówczas ciąg $\{N_m\}$ zbieżny jest według rozkładu do zmiennej losowej N wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{g_m(s)\}$ zbieżny jest do FTP $g(s)$,

(e) funkcja $g(s)$, analityczna dla $s \in [0, 1]$, jest FTP pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} g(s) = 1 \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{d^i g}{ds^i} \right|_{s=0} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

Definicja 2.2. Niech $\underline{N} = (N_1, N_2)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową taką, że N_i jest całkowite nieujemne ($i = 1, 2$). Dwuwymiarową FTP zmiennej losowej \underline{N} nazywa się funkcją $g(s_1, s_2)$ dwóch zmiennych s_1, s_2 ($s_i \in [0, 1]$) określoną wzorem:

$$g(s_1, s_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} p_{n_1, n_2} s_1^{n_1} s_2^{n_2} \quad (2.5)$$

gdzie $p_{n_1, n_2} = P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2\}$.

Własności dwuwymiarowej FTP są oczywistymi rozszerzeniami własności jednowymiarowej FTP.

Dla dowolnego łańcucha Markowa $\{N_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ o przeliczalnej liczbie stanów i dyskretnym czasie określimy prawdopodobieństwa przejścia wzorami:

$$p_{nm}^t = \mathcal{P}\{N_t = m \mid N_{t-1} = n\}, \quad (2.6)$$

przy czym $\sum_{n \geq 0} p_{nm}^t = 1$. Liczba p_{ij}^t nazywa się prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j na t -tym etapie procesu (w chwili t).

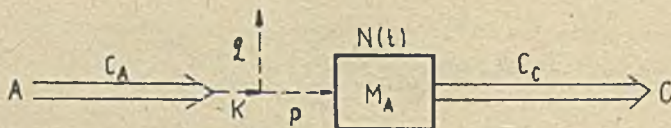
Oznaczmy przez r_n^t prawdopodobieństwo, że na t -tym etapie proces znajduje się w stanie n -tym, tzn. $r_n^t = \mathcal{P}\{N_t = n\}$. Oznaczmy przez \underline{r}^t nieskończony wektor wierszowy (r_0^t, r_1^t, \dots) , a przez \underline{p}^t nieskończoną macierz $[p_{ij}^t]$. Wówczas z najprostszymi własnościami rachunku macierzy oraz prawdopodobieństw warunkowych wynika, że:

$$\underline{r}^{t+s} = \underline{r}^t \underline{p}^{t+1} \underline{p}^{t+2} \dots \underline{p}^{t+s}. \quad (2.7)$$

Łańcuch Markowa nazywa się jednorodnym, jeżeli $\underline{p}^t = \underline{p}$. Dla uniknięcia kolizji oznaczeń t -ta potęga macierzy \underline{p} oznaczana będzie przez $(\underline{p})^t$.

3. Model 1

Często spotykana wersja węzła montażu przedstawiona jest na rys. 2. Półprodukt A destarozany jest przez linię montażową A , a następnie sprawdzany na stanowisku kontrolnym K . Usterka powodująca całkowitą nieprzydatność półproduktu zdarza się z prawdopodobieństwem q (dla wygody oznaczono $p = 1 - q$). Półprodukt wadliwy nie wraca na linię. Półprodukty prawidłowo wykonane przekazywane są do magazynu M_A i odbierane stamtąd przez linię C . Zakłada się, że obie linie poruszają się ze stałymi prędkościami, a ich cykle (tzn. odstępy czasowe między kolejnymi produktami opuszczającymi linię) równe są odpowiednio C_A i C_C .



Rys. 2. Schemat ideowy modelu I

Łączenie 3.1. Cykle C_A i C_C mają się do siebie jak dwie liczby całkowite, tzn.:

$$k C_A = l C_C, \quad (3.1)$$

przy czym z oczywistych powodów $k > l$, a liczby k i l dobrane są tak, aby ułamek k/l był nieskracalny.

Zakłada się również, że kontrola techniczna i operacje transportowe zajmują tyle samo czasu dla każdego produktu, można więc bezpiecznie przyjąć, że nie zajmują go w ogóle. Z podobnych względów można założyć synchronizację linii w momencie ich uruchomienia. Ponadto przyjmuje się, że sterki poszczególnych egzemplarzy produktu są niezależne stochastycznie.

Przyrost zawartości $N(t)$ magazynu M_A może nastąpić w chwilach $t = iC_A$, $i = 1, 2, \dots$, podczas gdy spadek zawartości (o jeden egzemplarz, albo o zero egzemplarzy, gdy magazyn był pusty) następuje w chwilach $t = iC_C$, $i = 1, 2, \dots$. Interesować nas będą rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych N_i :

$$N_i = N(iC_C)$$

Określmy ciąg $\{i_j\}$ wzorami:

$$\{i_j\} = \left\{ \left[\frac{jk}{l} \right] \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (3.2)$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą. Wielkość i_j jest równa maksymalnej liczbie półproduktów dostarczonych do magazynu M_A podczas trwania cykli linii C o numerach od 1 do j , od $l+1$ do $l+j$, od $2l+1$ do $2l+j$ itd. Niech dalej:

$$w_1 = i_1$$

$$w_j = i_j - i_{j-1}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (3.3)$$

Liczba w_j równa się maksymalnej liczbie półproduktów dostarczonych do magazynu M_A podczas trwania cyklu linii C o numerze j , $l+j$, $2l+j$ itd. Niech w_i będzie zmienną losową równą liczbie półproduktów dostarczonych do magazynu M_A w czasie trwania i -tego cyklu linii C . Łatwo wykazać, że

$$N_i = \max \left\{ N_{i-1} + w_i - 1; 0 \right\} \quad (3.4)$$

oraz że w_i jest zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego o wartości oczekiwanej $p_{i,j}$ dla $i = j, l+j, 2l+j \dots$.

Postulowana niezależność usterek powoduje, że ciąg $\{N_i\}$ można uważać łańcuch Markowa. Uwzględniając wzór (3.4) oraz znane własności rozkładu Bernoulliego otrzymamy postać macierzy \underline{P}^1 :

$$\begin{array}{cccccccc}
 q^{\binom{m_j}{q}} + \binom{m_j}{1} p q^{\binom{m_j}{q}-1} & \binom{m_j}{2} p^2 q^{\binom{m_j}{q}-2} & \binom{m_j}{3} p^3 q^{\binom{m_j}{q}-3} & \dots & p^{\binom{m_j}{q}} & 0 & 0 & \dots \\
 q^{\binom{m_j}{q}} & \binom{m_j}{1} p q^{\binom{m_j}{q}-1} & \binom{m_j}{2} p^2 q^{\binom{m_j}{q}-2} & \dots & \binom{m_j}{m_j-1} p^{\binom{m_j}{q}-1} & p^{\binom{m_j}{q}} & 0 & \dots \\
 0 & q^{\binom{m_j}{q}} & \binom{m_j}{1} p q^{\binom{m_j}{q}-1} & \dots & \binom{m_j}{m_j-1} p^{\binom{m_j}{q}-1} & q^{\binom{m_j}{q}} & p^{\binom{m_j}{q}} & \dots \\
 \underline{p}^{j+r-1} & 0 & 0 & q^{\binom{m_j}{q}} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

$j = 0, 1, 2, \dots, l-1, \dots \quad r = 0, 1, 2, \dots$
(3.5)

Używając wzorów (2.7), (3.5) można otrzymać rozkłady wszystkich zależnych losowych N_i . Dla celów badania własności łańcucha $\{N_i\}$ wygodniej jednak będzie użyć FTP.

Twierdzenie 3.1. Niech $G_{j,r}(s)$ będzie FTP zmiennej losowej N_{j+lr} i niech $\varphi_n^{j,r} = \mathcal{P}\{N_{j+lr} = n\}$. Wówczas:

$$G_{j+1,r}(s) = \varphi_0^{j,r} q^{\binom{m_{j+1}}{q}} \frac{s-1}{s} + \frac{(ps+q)^{\binom{m_{j+1}}{q}}}{s} G_{j,r}(s)$$

$$j = 1, \dots, l-1, \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

$$G_{1,r+1}(s) = \rho_0^{1,r} q^{m-1} \frac{s-1}{s} + \frac{(ps+q)^{m-2}}{s} G_{1,r}(s),$$

$$r = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

dla $s \in (0, 1]$.

Dowód: Wykazemy wzór (3.6); wzór (3.7) można udowodnić analogicznie. Z definicji FTP:

$$G_{j+1,r}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{j+1,r} s^n. \quad (3.8)$$

Wykorzystując macierz \underline{p}^1 (wzór (3.5)) łatwo pokazać, że:

$$\rho_0^{j+1,r} = \rho_0^{j,r} (q^{m_{j+1}} + m_{j+1} p q^{m_{j+1}-1}) + \rho_1^{j,r} q^{m_{j+1}},$$

$$\rho_n^{j+1,r} = \frac{n+1}{i=\max\{0; n-m_{j+1}+1\}} \rho_i^{j,r} \binom{m_{j+1}}{n-i+1} p^{n-i+1} q^{m_{j+1}-n+1-i},$$

stąd po podstawieniu do (3.8), otrzymujemy dla $s \neq 0$:

$$G_{j+1,r}(s) = \rho_0^{j,r} q^{m_{j+1}} - \rho_0^{j,r} q^{m_{j+1}/s} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=\max\{0; n-m_{j+1}+1\}}^{n+1} \rho_i^{j,r} \binom{m_{j+1}}{n-i+1} p^{n-i+1} q^{m_{j+1}-n+1-i} s^n =$$

$$= \rho_0^{j,r} q^{m_{j+1}} - \rho_0^{j,r} q^{m_{j+1}/s} +$$

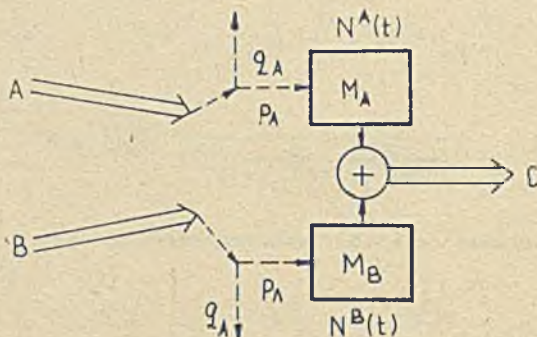
$$+ \sum_{u=0}^{m_{j+1}} \sum_{i=0}^{\infty} s^{u+i-1} \rho_i^{j,r} \binom{m_{j+1}}{u} p^u q^{m_{j+1}-u} = \rho_0^{j,r} q^{m_{j+1}} \frac{s-1}{s} +$$

$$+ \frac{1}{s} \sum_{u=0}^{m_{j+1}} s^u \binom{m_{j+1}}{u} p^u q^{m_{j+1}-u} \sum_{i=0}^{\infty} s^i \rho_i^{j,r} \quad (3.9)$$

Krok drugi wynika ze zmian wskaźników sumacyjnych według wzoru $u = n - i + 1$. Wzór (4.0) jest równoważny z tezą twierzenia.

4. Model II

Rozważmy inną szczególną wersję węzła montażu (rys. 3). Wszystkie trzy linie poruszają się synchronicznie z tym samym cyklem C . Zakłada się, podobnie jak w modelu I, niezależność mechanizmów powstawania usterek oraz pomija się czasy transportu, montażu w węźle sumacyjnym itp. Prawdopodobieństwo usterki półproduktu A oznacza się przez p_A ($q_A = 1 - p_A$), półproduktu B - przez p_B ($q_B = 1 - p_B$). Liczebność magazynu M_A w chwili t oznacza się przez $N^A(t)$, magazynu M_B - przez $N^B(t)$. Oznaczmy skrótkowo: $N_i^A = N^A(iC)$, $N_i^B = N^B(iC)$, $i = 0, 1, \dots$.



Rys. 3. Schemat ideowy modelu II

Ponadto, liczbę produktów typu A (odpowiednio: B), docierających do magazynu M_A (odp.: M_B) w cyklu i -tym oznaczamy przez w_i^A (odp.: w_i^B). Oczywiście $w_i^A = 0$ lub 1, w zależności od tego, czy usterka wystąpi czy nie itp.

Proces $\{N_i^A, N_i^B\}$ jest łańcuchem Markowa o przeliczalnej liczbie stanów. Wszystkie stany procesu można by ponumerować i wypisać w sposób jawny macierz \underline{P} , ale byłoby to niezwykle kłopotliwe. Znacznie prościej jest indeksować prawdopodobieństwa parami wskaźników, odpowiadających stanom magazynów M_A i M_B . Oznaczmy więc:

$$r_{m_A, m_B}^i = \mathcal{P} \left\{ N_i^A = m_A, N_i^B = m_B \right\} \quad (4.1)$$

$$p_{m_A, m_B | n_A, n_B} = \mathcal{P} \left\{ N_{i+1}^A = m_A, N_{i+1}^B = m_B \mid N_i^A = n_A, N_i^B = n_B \right\}. \quad (4.2)$$

Prawdopodobieństwa przejścia procesu można wyznaczyć metodami podobnymi jak w punkcie 3 pracy. Na przykład:

$$P_{00|00} = \mathcal{P}\left\{W_i^A = 0, W_i^B = 0\right\} + \mathcal{P}\left\{W_i^A = 1, W_i^B = 1\right\},$$

$$P_{01|00} = \mathcal{P}\left\{W_i^A = 0, W_i^B = 1\right\},$$

$$P_{10|00} = \mathcal{P}\left\{W_i^A = 0, W_i^B = 0\right\}.$$

Ponieważ $\mathcal{P}\left\{W_{i+1}^A = 1\right\} = P_A$, $\mathcal{P}\left\{W_{i+1}^B = 1\right\} = P_B$, mamy:

$$P_{00|00} = 1 - P_A - P_B + 2P_AP_B, \quad (4.3)$$

$$P_{01|00} = P_B - P_AP_B, \quad (4.4)$$

$$P_{10|00} = P_A - P_AP_B, \quad (4.5)$$

Podobnie dla $m \geq 1$:

$$P_{m0|m0} = 1 - P_A + 2P_AP_B - P_B, \quad (4.6)$$

$$P_{m+1,0|m0} = P_A - P_AP_B, \quad (4.7)$$

$$P_{m-1,0|m0} = P_B - P_AP_B, \quad (4.8)$$

$$P_{0m|0m} = 1 - P_A - P_B + 2P_AP_B, \quad (4.9)$$

$$P_{0,m+1|0m} = P_B - P_AP_B, \quad (4.10)$$

$$P_{0,m-1|0m} = P_A - P_AP_B. \quad (4.11)$$

Natomiast dla $m, n \geq 1$:

$$P_{mn|mn} = P_AP_B, \quad (4.12)$$

$$P_{m-1,n|mn} = P_B - P_AP_B, \quad (4.13)$$

$$P_{m,n-1|mn} = P_A - P_AP_B, \quad (4.14)$$

$$P_{m-1,n-1|mn} = 1 - P_A + P_AP_B - P_B. \quad (4.15)$$

Twierdzenie 4.1. Niech $G^J(s_A, s_B)$, $s_A, s_B \in [0, 1]$ oznacza łączną FTP zmianowych losowych N_j^A, N_j^B . Wówczas jeżeli $s_A, s_B \neq 0$, to:

$$\begin{aligned} G^{J+1}(s_A, s_B) &= \frac{1}{s_A s_B} (1 - p_A + p_A s_A)(1 - p_B + p_B s_B) G^J(s_A, s_B) - \\ &- (1 - p_B) \left[p_A \left(\frac{1}{s_B} - s_A \right) + (1 - p_A) \left(\frac{1}{s_A s_B} - 1 \right) \right] G^J(s_A, 0) - \\ &- (1 - p_A) \left[p_B \left(\frac{1}{s_A} - s_B \right) + (1 - p_B) \left(\frac{1}{s_A s_B} - 1 \right) \right] G^J(0, s_B) - \\ &- (1 - p_A)(1 - p_B) \left(1 - \frac{1}{s_A s_B} \right) G^J(0, 0) \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia jest oparty na rozumowaniu identycznym jak w przypadku twierdzenia 3.1. Oczywiście $G^J(0, 0) = x_{00}^J$.

$$G^J(s_A, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} r_{10}^J s_A^i \quad \text{itp.}$$

5. Uwagi

Wprowadzone modele I i II są uproszczeniami podstawowego modelu węzła montażu - w dwóch różnych kierunkach. Model I uwzględnia możliwość różnic prędkości linii, co z kolei zaniedbuje model II. Na odwrót, model II uwzględnia fakt, że do wytworzenia produktu finalnego mogą być potrzebne dwa rodzaje półproduktów. Twierdzenia 3.1, 4.1 pozwalają wyprowadzić w estymacjach II i III pracy wkłady na momenty procesów $\{N_t\}$ (model I) oraz $\{N_t^A, N_t^B\}$ (model II) oraz udowodnić wyniki dotyczące własności granicznych tych procesów.

LITERATURA

- [1] Faller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań. Tom I, PWN, Warszawa 1973.
- [2] Kimmel M.: Zagadnienia statystyczne w procesie montażu. ZN. Pol. Śl. Seria Automatyka z. 47, 1979.
- [3] Kimmel M.: Zastosowanie teorii procesów punktowych do projektowania węzła montażu. ZN. Pol. Śl. seria Automatyka, z. 54, 1980.
- [4] Klimow G.P.: Procesy obsługi masowej. WNT, Warszawa 1979.

**НЕТИПИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С ДИСКРЕТНЫМИ ПРОЦЕССАМИ****Часть I. Основные модели****Резюме**

Введенная вероятностная характеристика моделей некоторых дискретных процессов, важных и применяемых на практике. "Закон Эволюции" процесса описан в виде цепи Маркова с бесконечным числом состояний.

**SPECIFIC PROBLEMS IN THE QUEUEING THEORY CONNECTED WITH
THE DISCRETE INDUSTRIAL PROCESSES****I - BASIC MODELS****S u m m a r y**

In the paper we introduce the probabilistic description of models for certain processes of discrete character. The models cover a class of so called discrete industrial processes which is important for applications. The process "law of evolution" is described in form of a Markov process with infinite number of states.