

Marek KIMMEL

Politechnika Śląska

NIETYPOWE ZADANIA TEORII KOLEJEK ZWIĄZANE Z  
Z DYSKRETNymi PROCESAMI PRZEMYSŁOWYMI

## Część II - WŁASNOŚCI GRANICZNE PROSTEGO PROCESU

**Streszczenie.** Przeprowadzono badanie własności granicznych prostego procesu, będącego szczególnym przypadkiem modeli wprowadzonego w części I pracy. Wyniki otrzymano za pomocą znanych metod łańcuchów Markowa i funkcji tworzących prawdopodobieństwa. Założono także wyniki badań symulacyjnych.

1. Wstęp

Obeona praca jest bezpośrednią kontynuacją pracy [1], dlatego nie są powtarzane podstawowe definicje ani wyniki zawarte w [1]. Odwołania do konkretnych wzorów czy twierdzeń z pracy [1] zaopatrzone są w rzymską jedynkę (np. tw. I.4.1).

Rozważona zostanie szczególna wersja modelu I, dla której  $l=1$ , tzn. linia A, porusza się k razy szybciej niż linia C (por. wzór (I.3.1)). W punkcie 2 podane zostaną potrzebne wyniki z teorii procesów Markowa. W punkcie 3 określona zostanie postać rozkładu stacjonarnego, będącego również rozkładem granicznym oraz warunki konieczne i wystarczające jego istnienia. W punkcie 4 wprowadzone będą wzory na momenty procesu i inne podobne wyniki.

2. Własności graniczne łańcuchów Markowa

**Definicja 2.1.** Rozkładem stacjonarnym jednorodnego łańcucha Markowa o przeliczalnej liczbie stanów (por. pkt I.2) i macierzy przejścia  $P$  nazywa się rozkład  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  taki, że:

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} P. \quad (2.1)$$

Niech  $P_{ij}^{(t)}$  oznacza element macierzy  $(P)^t$  ( $t$ -tej potęgi macierzy przejścia jednorodnego łańcucha Markowa), tzn. prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w ciągu  $t$  kroków (w czasie  $t$ ).

**Definicja 2.2.** (por. [2, s.72]). Łańcuch Markowa nazywa się kontrakcją, jeżeli dla dowolnej pary stanów  $i_1$  oraz  $i_2$  istnieje stan  $j$  oraz obwila  $t$  taka, że:

$$P_{i_1 j}^{(t)} > 0, \quad P_{i_2 j}^{(t)} > 0. \quad (2.2)$$

**Definicja 2.3.** (por. [2, s. 73]). Łańcuch Markowa nazywa się nieprzywiedlnym, jeżeli dla dowolnej pary  $(i, j)$  stanów istnieje  $t \in T$  takie, że  $P_{ij}^{(t)} > 0$ .

**Twierdzenie 2.1.** (por. [2, tw. 2.8]). ZnióŜmy, że istnieje rozkład stacjonarny  $\mathcal{H}$  (jedyny, jeśli łańcuch jest kontrakcją). Wtedy następujące zdania są równowaŝne:

- (a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}^{(t)} = \mathcal{H}_j > 0$ , dla dowolnych  $i, j$ ,
- (b) łańcuch jest kontrakcją i jest nieprzywiedlny

**Twierdzenie 2.2.** (por. [2, tw. 2.6]). Jeśli łańcuch jest kontrakcją i nie istnieje rozkład stacjonarny, to  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}^{(t)} = 0$  dla wszystkich  $i, j$ .

Powyŝsze wyniki wykorzystane zostaną w dalszym ciągu pracy.

### 3. Rozkład graniczny dla przypadku $l = 1$

Rozwaŝmy graniczne zachowanie się modelu I dla przypadku, w którym linia  $A$  porusza się  $j$ -razy szybciej niż linia  $C$ .

Zachowanie się modelu jest, jak się to okaŝe, analogiczne do znanych praw rządzących procesami masowej obsługi.

Wprowadzimy skrótową notację, pisząc  $\underline{P}$  zamiast  $P^1$  (por. wzór (I.3.5))  $G_r(s)$  zamiast  $G_{1r}(s)$  oraz  $\varphi_n^r$  zamiast  $\rho_n^{1,r}$  (por. tw. I.3.1). Oczywiście  $\{N_1\}$  jest obecnie jednorodnym łańcuchem Markowa, a  $m_1 = k$ .

**Wniosek 3.1.** (por. tw. I.3.1 i wzór (I.3.5)). W przypadku  $l = 1$  teza twierdzenia I.3.1 przybiera postać:

$$G_{r+1}(s) = \varphi_0^r q^k \frac{s-1}{s} + \frac{(ps+q)^k}{s} G_r(s), \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

dla  $s \in (0, 1]$ . Na podstawie wniosku 3.1 i innych wyników wykaŝemy następujący rezultat.

**Twierdzenie 3.1.** Dla łańcucha Markowa odpowiadającego modelowi I przy  $l=1$  istnieje rozkład stacjonarny o funkcji tworzącej prawdopodobieństwa (FTP, por. def. I.2.1) postaci:

$$G(s) = \frac{1 - kp}{1 + \sum_{i=0}^{k-1} \left( \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} - 1 \right) s^i} \quad (3.2)$$

lub postaci równoważnej dla  $s \in [0, 1)$ :

$$G(s) = (1 - kp) \frac{s-1}{s - (ps + q)^k} \quad (3.3)$$

o ile tylko  $p \in (0, \frac{1}{k})$ .

Przed dowodem twierdzenia podany zostanie lemat.

Lemat 3.1. Zachodzi następująca zależność:

$$(s-1) \left[ 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \left( \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} - 1 \right) s^i \right] = s - (ps + q)^k. \quad (3.4)$$

Dowód. Oznaczmy przez  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  współczynniki przy  $i$ -tej potędze wielomianu  $W(s)$ , który pomnożony przez  $(s-1)$  daje  $s - (ps + q)^k$ . Rozpisując  $W(s)(s-1)$  oraz stosując wzór na dwumian Newtona do  $(ps + q)^k$ , otrzymujemy po porównaniu współczynników:

$$\begin{aligned} a_0 &= q^k, \\ a_1 - a_0 &= kp q^{k-1} - 1, \\ a_i - a_{i-1} &= \binom{k}{i} p^i q^{k-i}, \quad i = 2, \dots, k-1, \\ a_{k-1} &= -p^k. \end{aligned}$$

Układ ten ma jedyne rozwiązanie postaci:

$$\begin{aligned} a_0 &= q^k, \\ a_i &= \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} - 1, \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

przy czym  $a_{k-1} = [(p + q)^k - p^k] - 1 = -p^k$ .

Przegrupowanie wyrazów daje wzór (3.4).

Dowód twierdzenia 3.1. O ile rozkład stacjonarny istnieje, jego FTP  $G(s)$  musi spełniać równanie (3.1). Wynika stąd jej hipotetyczna postać:

$$G(s) = \mathcal{H}_0 q^k \frac{s-1}{s - (ps + q)^k} \quad (3.5)$$

Żeby udowodnić istnienie rozkładu stacjonarnego, scharakteryzowanego przez FTP  $G(s)$ , wystarczy wykazać (por. lemat I.2.1e), że  $\lim_{s \rightarrow 1^-} G(s) = 1$  oraz że współczynniki rozwinięcia funkcji (3.5) w szereg potęgowy wokół  $s=0$  są nieujemne.

Jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{s \rightarrow 1} G(s) = \frac{\mathcal{P}_0 q^k}{1 - kp},$$

stąd:

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1 - kp}{q^k}. \quad (3.6)$$

Wstawiając (3.6) do (3.5) i stosując lemat 3.1, otrzymujemy wzór (3.2). Zaważmy dalej, że wzór (3.2) można zapisać w postaci:

$$G(s) = (1 - kp) \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i s^i},$$

gdzie:

$$\alpha_i = 1 - \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} > 0.$$

Jednocześnie, na mocy warunku  $\lim_{s \rightarrow 1^-} G(s) = 1$ :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i s^i \leq \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = kp.$$

Stąd, dla  $p < 1/k$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $G(s)$  przedstawia sobą sumę szeregu geometrycznego o postaci:

$$G(s) = (1 - kp) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i s^i \right)^n,$$

równoważnego szeregowi potęgowemu o dodatnich współczynnikach. To kończy dowód twierdzenia.

Wykażemy obecnie, że rozkład stacjonarny jest w rozważanym przypadku identyczny z rozkładem granicznym.

**Lemat 3.2.** Łańcuch Markowa  $\{N_i\}$  jest kontrakcją i jest nieprzywydlny.

**Dowód.** Wykażemy, że dla dowolnych stanów  $n, m$  łańcucha (dla ustalenia uwagi  $n > m$ ) prawdopodobieństwo  $p_{nm}^{(t)} > 0$  dla pewnego  $t$ . Rozważmy  $t = n - m$ . Jedną z możliwości przejścia  $n \rightarrow m$  jest występowanie przez  $t$  kroków procesu:  $W_1 = 0$ . Wynika to ze wzoru (I.3.4). Prawdopodobieństwo  $t$

go zdarzenia wynosi  $q^{kt} > 0$  i jest mniejsze od  $p_{nm}^{(t)}$ . Stąd  $p_{nm}^{(t)} > 0$ . Podobnie dla  $m > n$  przejście jest możliwe, np. przy  $W_1 = 2$ . A więc łańcuch jest nieprzywiedlny (por. def. 2.3).

W celu udowodnienia, że łańcuch jest kontrakcją, zauważmy, że  $p_{nm}^{(t)} > 0$  dla dowolnego  $n$  i  $t$  (wystarczy, że  $W_1 = 1$  przez  $t$  kroków procesu). Można więc położyć  $i_1 = j = m$ ,  $i_2 = n$  w definicji 2.2.

Wniosek 3.2. Jeżeli  $p \in (0, 1/k)$ , to niezależnie od postaci rozkładu początkowego  $\underline{p}^0 = (p_0^0, p_1^0, \dots)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{p}^t = \underline{\pi},$$

gdzie rozkład graniczny  $\underline{\pi}$  scharakteryzowany jest przez FTP  $G(s)$  z twierdzenia 3.1.

Dowód. Na mocy tw. 2.1 i lematu 3.2 zachodzi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j.$$

Ale  $\underline{p}^t = \underline{p}^0 \underline{p}^t$ , stąd:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_i^0 p_{ij}^{(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^0 \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j,$$

co należało wykazać.

Wniosek 3.3. Jeżeli  $p \in [1/k, 1]$ , to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

Dowód: Na mocy tw. 2.2 i lematu 3.2 wystarczy wykazać, że rozkład stacjonarny nie istnieje.

W przypadku  $p = 1/k$  jest to trywialne (por. wzór (3.2)). Niech  $p > 1/k$ . Wówczas na mocy wzoru (3.6) byłoby  $\pi_0 < 0$ , a więc rozkład stacjonarny r również nie istnieje.

Wnioski 3.2 i 3.3 dowodzą, że model I zachowuje się identycznie jak znane powszechnie systemy obsługi masowej.

"Intensywność strumienia wejściowego" wynosi w naszym przypadku  $kp$ , "przebiegowość stanowiska obsługi" wynosi 1. A więc jeżeli  $kp > 1$ , to "długość kolejki", w naszym przypadku  $N_1$ , dąży do nieskończoności, co charakteryzuje się brakiem rozkładu stacjonarnego i tym, że  $p_1^t \rightarrow 0$ .

4. Momenty rozkładu stacjonarnego i inne wyniki

Momenty rozkładu stacjonarnego można wyliczyć, stosując wzory z części (c) lematu I.2.1. Mamy więc:

$$E(N_{\infty}) = M(1) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s-1)(1-kp)}{s-(ps+q)^k} \right] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k-1} i \left[ 1 - \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} \right]}{1-kp}, \quad (4.1)$$

$$E[N_{\infty}(N_{\infty} - 1)] = M(2) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{(s-1)(1-kp)}{s-(ps+q)^k} \right] =$$

$$= \frac{(1-kp) \sum_{i=2}^{k-1} i(i-1) \left[ 1 - \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} \right]}{(1-kp)^2} +$$

$$+ \frac{2 \left[ \sum_{i=1}^{k-1} i \left[ 1 - \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} \right] \right]^2}{(1-kp)^2} \quad (4.2)$$

Wariancję  $D^2(N_{\infty})$  można obliczyć z oczywistej zależności:

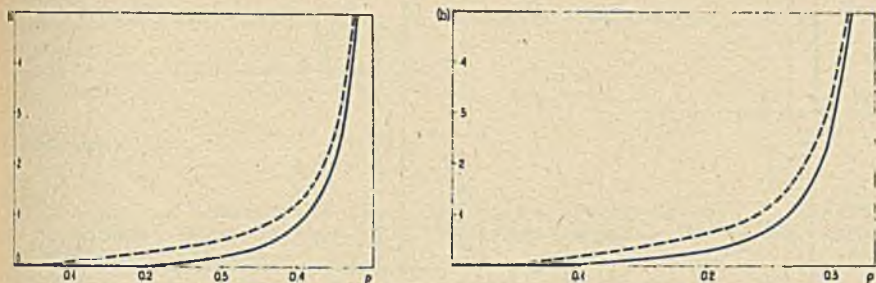
$$D^2(N_{\infty}) = M(2) + M(1) - [M(1)]^2.$$

Wynosi ona:

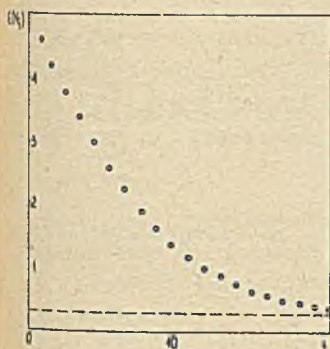
$$D^2(N_{\infty}) = \frac{(1-kp) \sum_{i=1}^{k-1} i^2 \left[ 1 - \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} \right]}{(1-kp)^2} +$$

$$+ \frac{\left[ \sum_{i=1}^{k-1} i \left[ 1 - \sum_{v=0}^i \binom{k}{v} p^v q^{k-v} \right] \right]^2}{(1-kp)^2}. \quad (4.3)$$

Wykresy pierwszych dwóch momentów dla dwóch wartości  $k$  przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Wykresy  $E(N_\infty)$  (linia ciągła) oraz  $\delta = D^2(N_\infty)$  (linia przerywana) w funkcji  $p$ : (a)  $k = 2$ ,  $E(N_\infty) = p^2/(1-2p)$ ,  $\delta = pq/(1-2p)$ , (b)  $k = 3$ ,  $E(N_\infty) = 3p^2/(1-3p)$ ,  $\delta = p\sqrt{3-7p+3p^2}/(1-3p)$



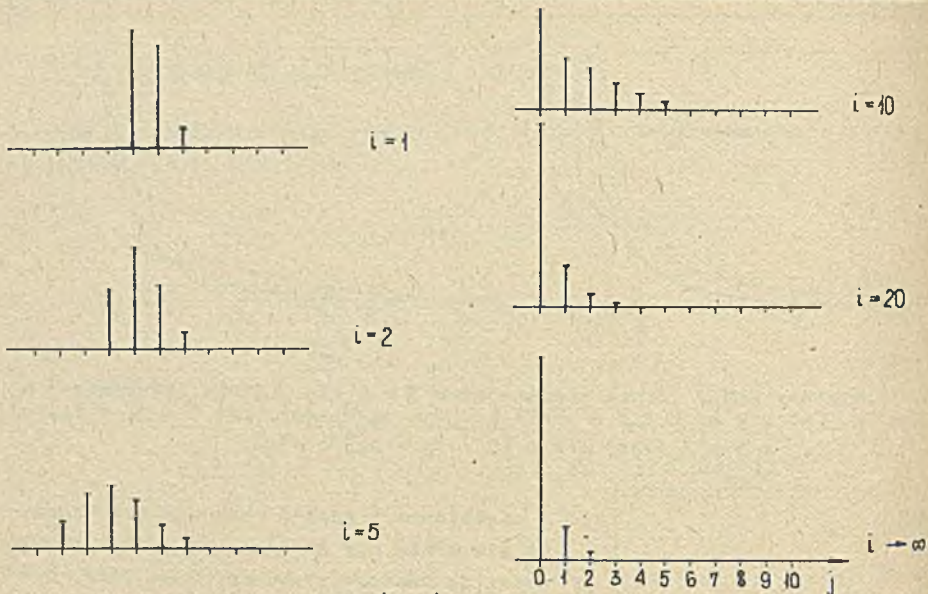
Rys. 2. Wykres  $E(N_i)$  w zależności od  $i$  (kółka); wartość  $E(N_\infty)$  zaznaczona linią przerywaną:  $N_0 = 4$ ,  $k = 2$ ,  $p = 0.3$ .

Istnienie i postać rozkładu granicznego nie mówią nic na temat prędkości zbieżności do takiego rozkładu. Dużą pomocą stanowią tutaj badania symulacyjne. Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono wyniki jednego z eksperymentów, polegającego na rekurencyjnym wyliczeniu rozkładu  $(\rho_0^i, \rho_1^i, \dots)$  w oparciu o wzór (I.3.5). Warto zauważyć, że dla  $i \geq 60$  rozkład nie różni się od rozkładu granicznego (dokładność do 4 miejsc po przecinku).

Dla kompletu informacji o zachowaniu się rozpatrywanej wersji modelu I należałoby określić charakterystykę zmiennej losowej  $Z_i$  równej liczbie egzemplarzy produktu, transportowanych podczas  $i$ -tego cy-

ku linii C (oczywiście  $Z_i = 0$  lub  $1$ ). Jest to stosunkowo proste. Zachodzi bowiem bilans:

$$N_i = N_{i-1} + w_i - Z_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.4)$$



Rys. 3. Wykresy rozkładów  $(\varphi_0^i, \varphi_1^i, \dots)$  dla kilku wartości  $i$ . Dane jak na rys. 2

Wyznaczając  $Z_i$  ze wzoru (4.4), otrzymuje się po uwzględnieniu wzoru (1.3.4):

$$Z_i = N_{i-1} - N_i + w_i = \max \left\{ 1; N_{i-1} + w_i \right\}. \quad (4.5)$$

Tak więc:

$$\mathcal{P} \left\{ Z_i = 0 \right\} = \mathcal{P} \left\{ N_{i-1} + w_i = 0 \right\} = q^k \varphi_0^{i-1}. \quad (4.6)$$

oraz

$$E(Z_i) = 1 - \mathcal{P} \left\{ Z_i = 0 \right\} = 1 - q^k \varphi_0^{i-1}. \quad (4.7)$$

Oczywiście  $E(Z_{\infty}) = kp$ .

### 5. Uwagi

Jasny i przejrzysty obraz zachowania się modelu I w przypadku  $1 \times 1$  odnosi się do sytuacji dość odległej od rzeczywistości. W technicznym procesie montażu warunków  $p < 1/k$  oznacza, że przeciętnie na  $k$  półproduktów mniej niż jeden jest bez usterki. Jednakże, jak zobaczymy w części III, przypadek ilorazu  $1/k$  bliższego jedynki jest o wiele trudniejszy do analizy. Natomiast przedstawione powyżej rozumowanie daje pogląd na to



в какой способ до других подобных задачниц использовать аппарат процессов Маркова.

LITERATURA

- [1] Kimmel M.: Нестандартные задачи теории очередей связанные с дискретными процессами промышленными. I - Основные модели. ЗН Пол. 51., серия Автоматика (в печати).
- [2] Klimow G.P.: Процессы обслуживания массовой. WNT, Warszawa 1979.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Józef Grabowski

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СВЯЗАННЫЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Часть II. Граничные распределения для простого процесса

Резюме

Определены граничные свойства простого специального случая модели процесса введённый в части I. Результаты получены пользуясь теорией марковских цепей и функцией производящей вероятности. Приведены результаты симуляционных испытаний.

SPECIFIC PROBLEMS IN THE QUEUEING THEORY CONNECTED WITH THE DISCRETE INDUSTRIAL PROCESSES

II - LIMIT LAWS FOR A SIMPLE PROCESS

Summary

Investigation of limit properties of a simple special case of the process model introduced in Part I of the paper is performed. The result is obtained with the aid of known results for Markov chains and probability generating functions. Also simulation results are included.