

Marek KIMMEL

Politechnika Śląska

NIETYPOWE ZADANIA TEORII KOLEJEK
ZWIĄZANE Z DYSKRETNymi PROCESAMI PRZEMYSŁOWYMI

Część III - DALSZE WŁASNOŚCI GRANICZNE

Streszczenie. Przeprowadzono dalsze badania własności modelu procesów wprowadzonych w części I. Wyniki nie są tak jasne jak w części II pracy, ponieważ rozważano modele nie są tak proste. Tym niemniej analiza teoretyczna poparta symulacją odpowiada na podstawowe pytania związane z własnościami granicznymi procesu. Przedstawiono kilka uwag dotyczących zastosowań.

1. Wstęp

Praca stanowi bezpośrednią kontynuację prac [3] i [4]. Z tego powodu odwołanie do konkretnych wyników zawartych w pracach [3], [4] będą zaopatrzone tylko odpowiednio w rzymską jedynkę (np. wzór (I.3.1)) lub dwójkę (np. tw. II.3.1).

W punkcie 2 pracy opisane będą trudności, jakie występują przy próbie udowodnienia dla ogólnej postaci modelu I (tzn. k/l wymierne, por. punkt I.3) rezultatów podobnych do tych, które udowodniono dla szczególnej wersji $l = 1$ (por. pkt II.3). W punkcie 3 przedstawione będą wyniki badań symulacyjnych, świadczące o tym, że model I w przypadku ogólnym zachowuje się podobnie jak w przypadku $l = 1$. Punkt 4 poświęcony jest własnościom granicznym modelu II. Wyniki w tym punkcie mają charakter negatywny, tzn. świadczą o braku rozkładu granicznego. Punkt 5 zawiera smówienie wyników i proponowane przez autora kierunki przyszłych badań.

2. Rozkład stacjonarny dla modelu I

Jak łatwo zauważyć (por. wzory (I.3.6) - (I.3.7)), łańcuch Markowa N_1 , $i = 0, 1, \dots$ opisujący magazyn w modelu I nie jest łańcuchem jednorodnym. Jednordne są natomiast łańcuchy $\{N_{j+1r}\}$, $r = 0, 1, \dots$ dla każdego ustalonego $j = 0, 1, \dots, l-1$; odpowiednie macierze \prod_j^j prawdopodobieństw przejścia są wyrażone wzorami:

$$\prod_j^j = \underline{p}^j \underline{p}^{j-1} \dots \underline{p}^2 \underline{p}^1 \underline{p}^1 \underline{p}^{1-1} \dots \underline{p}^{j+1}, \quad (2.1)$$

dla $j = 1, \dots, l-1$ oraz

$$\underline{p}^0 = \underline{p}^1 \underline{p}^{l-1} \dots \underline{p}^1 \quad (2.2)$$

Wzory (2.1), (2.2) wynikają z zastosowania wzoru (I.2.7). Odpowiedniki wzorów (2.1), (2.2), wyrażone w terminach funkcji tworzących prawdopodobieństwa (FTP), por. [1], wynikają z iteracji wzorów (I.3.6), (I.3.7) i mają postać:

$$\begin{aligned} G_{j,r}(s) &= \frac{(ps+q)^k}{s^l} G_{j,r-1}(s) + \\ &+ \sum_{v=j}^{r-1} \rho_0^{v,r-1} q^{m_{v+1}} \frac{s-1}{s} \frac{(ps+q)^{\sum_{u=v+1}^{l-1} m_{u+1} + \sum_{u=0}^{j-1} m_{u+1}}}{s^{l+j-1+v}} + \\ &+ \rho_0^{1,r-1} q^{m_1} \frac{s-1}{s} \frac{(ps+q)^{\sum_{u=1}^{j-1} m_{u+1}}}{s^{j-1}} + \\ &+ \sum_{v=1}^{j-1} \rho_0^{v,r} q^{m_{v+1}} \frac{s-1}{s} \frac{(ps+q)^{\sum_{u=v+1}^{j-1} m_{u+1}}}{s^{j-1-v}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dla $j = 1, \dots, l$, gdzie $G_{j,r}(s)$ jest FTP zmiennej losowej $N_{j+1,r}$, $\rho^{j,r} = \mathcal{P}\{N_{j+1,r} = 0\}$, a symbol $\sum_{t=a}^b$ traktuje się jako równy 0 dla $b < a$.

Lemat 2.1. Warunkiem koniecznym istnienia rozkładu stacjonarnego $\underline{\pi}^j = (\pi_0^j, \pi_1^j, \dots)$ (por. def. II.2.1) łańcucha $\{N_{j+1,r}\}$, $r = 0, 1, 2, \dots$, jest równość:

$$\sum_{v=1}^{l-1} \pi_0^v q^{m_{v+1}} + \pi_0^1 q^{m_1} = 1 - pk. \quad (2.4)$$

Dowód: Ze wzoru (2.3) wynika, że FTP $G^j(s)$ rozkładu stacjonarnego $\underline{\pi}^j$ musi mieć postać:

$$G^j(s) = \frac{s-1}{s^l - (ps+q)^k} \left[\sum_{v=j}^{l-1} \pi_0^v q^{m_{v+1}} s^{v-j} (ps+q)^{\sum_{u=v+1}^{l-1} m_{u+1} + \sum_{u=0}^{j-1} m_{u+1}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \pi_0^1 q^{m_1} s^{1-j} (ps + q) \sum_{u=1}^{j-1} m_{u+1} + \\
 & + \left[\sum_{v=1}^{j-1} \pi_0^v q^{m_{v+1}} s^{1+v-1} (ps + q) \sum_{u=v+1}^{j-1} m_{u+1} \right] \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Istnienie rozkładu stacjonarnego wymaga, aby $\lim_{s \rightarrow 1^-} G^j(s) = 1$. Po dokonaniu prostych przekształceń otrzymujemy (2.4):

Wniosek 2.1. Jeżeli $p \geq 1/k$, wówczas $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho^{j,i} = 0$, tzn. nie istnieje rozkład graniczny żadnego z łańcuchów $\{N_{j+1r}\}$.

Dowód. Niech $p = 1/k$, wówczas ze wzoru (2.4), pomijawszy trywialny przypadek $q = 0$, wynika: $\pi_0^j = 0$, co po wstawieniu do (2.5) daje $G^j(s) = 0$, a więc rozkład stacjonarny nie istnieje. Podobnie, dla $p > 1/k$, ze wzoru (2.4) wynika, że co najmniej jedno π_0^i jest ujemne.

Ponieważ każdy z łańcuchów $\{N_{j+1r}\}$ jest kontrakcją, stąd na podstawie tw. II.2.2 wynika, że $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho^{j,i} = 0$.

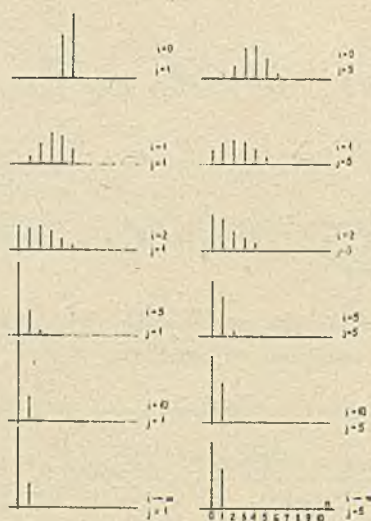
Niestety, warunek (2.4) nie jest wystarczający, chociażby z tego powodu, że jest on taki sam dla każdego $G^j(s)$. Jak dotąd, nie udało się autorowi znaleźć innych, niezależnych warunków koniecznych, pomimo rozpatrzenia np. zależności dla momentów hipotetycznego rozkładu stacjonarnego π_i^j itp. Zawsze otrzymuje się warunki zależne od (2.4). Również trudne jest określenie, kiedy funkcja postaci (2.5) ma nieujemne współczynniki rozwinięcia w szereg potęgowy wokół $s = 0$. Tak więc, na obecnym etapie, zachowanie się łańcucha $\{N_{j+1r}\}$ można badać jedynie metodami symulacyjnymi. Kilka przykładów zamieszczono w kolejnym punkcie pracy.

3. Badania symulacyjne modelu I

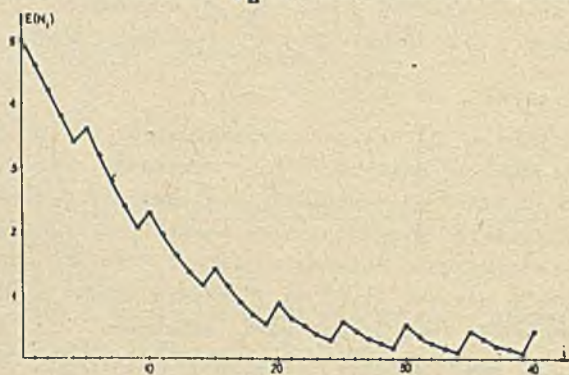
W oparciu o znaną postać macierzy \underline{p}^1 (por. wzór (I.3.5) i równanie (I.2.7)) przeprowadzono badania symulujące zmiany rozkładu procesu $\{N_1\}$.

Przykład 3.1. Zamodelowano łańcuch o parametrach:

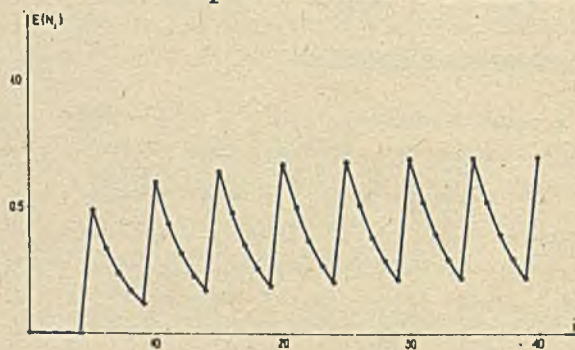
$N_0 = 5$, $p = 0.6$, $k = 6$, $l_1 = 5$. Rysunek 1 przedstawia wykresy rozkładów prawdopodobieństwa, podczas gdy rysunek 2 przebieg wartości oczekiwanej. Przebieg $E(N_1)$ ustala się w postaci charakterystycznej "piły". Oznacza to, że po "rozładowaniu się" dużego warunku początkowego wartość oczekiwania oscyluje z okresem $l = 5$. Oscylacje te związane są z wartością ilo-



Rys. 1. Wykresy rozkładów (φ_n^{i-j}) dla łańcucha z przykładu 3.1



Rys. 2. Wykres $E(N_1)$ dla łańcucha z przykładu 3.1.



Rys. 3. Wykres $E(N_1)$ dla łańcucha z przykładu 3.2

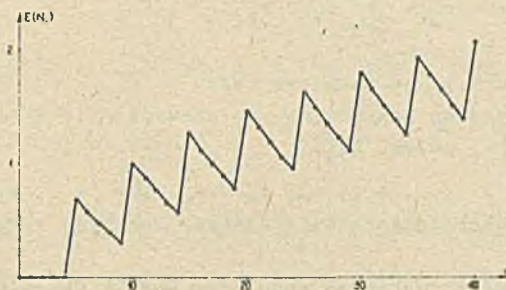
razu $1/k$, a ściślej z faktom, że $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$, $m_5 = 2$ (por. wzory (1.3.2), (1.3.3)). Podobnie oscylują rozkłady.

Przykład 3.2. Zamodelowano łańcuch o parametrach:

$N_0 = 0$, $p = 0.7$, $k = 6$, $l = 5$. Rysunek 3 przedstawia wykres wartości oczekiwanej. Interpretacja podobna jak poprzednio, z tym że $E(N_t)$ ustala się na wyższym poziomie (większa wartość p).

Parametry łańcuchów z przykładów 3.1, 3.2 spełniały nierówność: $p < 1/k$. Przykłady te, jak i inne nie wymienione w pracy, potwierdzają hipotezę, że dla $p < 1/k$ rozkłady graniczne istnieją.

Przykład 3.3. Zamodelowano łańcuch o parametrach "krytycznych" ($p = 1/k$): $N_0 = 0$, $p = 0,8333$, $l = 5$, $k = 6$. Rysunek 4 przedstawia przebieg wartości oczekiwanej. Funkcja ta zdążyła do nieskończoności, potwierdzając rezultat (wniosek 2.1) o nieistnieniu rozkładu granicznego.



Rys. 4. Wykres $E(N_t)$ dla łańcucha z przykładu 3.3

Przykłady powyższe potwierdzają hipotezę, na mocy której model I zachowuje się zasadniczo podobnie jak przypadek szczególny, rozważany w punkcie II.3, jakkolwiek nie udało się tego w pełni dowieść.

4. Własności graniczne modelu II

Przytoczymy na wstępie bez dowodu rezultat dotyczący własności prawdopodobieństw przejścia w jednorodnym łańcuchu Markowa, będący wnioskiem z rezultatów zebranych w książce [5].

Lemat 4.1. Niech $p_{ij}^{(n)}$ będzie prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j podczas n kroków jednorodnego łańcucha Markowa. Wówczas, jeżeli dla pewnego stanu j :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

jest zbieżny, to dla każdego stanu i :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0,$$

Dowód. Stan j , dla którego zachodzi warunek $\sum_n p_{ij}^{(n)}$, jest tzw. stanem niepowracającym [5, rozdz. III.5, s. 40]. Jest on więc także stanem zerowym [5, s. 41]. Z własności stanów zerowych [5, rozdz. III.6, s. 45] wynika teza.

Wniosek 4.1. Niech r_j^n będzie prawdopodobieństwem stanu j w n -tym kroku jednorodnego łańcucha Markowa. Wówczas, o ile są spełnione założenia lematu 4.1, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_j^n = 0$$

Dowód: Zachodzi wzór: $r_j^n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i^0 p_{ij}^{(n)}$.

Korzystając z lematu 4.1, otrzymujemy tezę.

Następny rezultat, podany bez dowodu, to szczególny przypadek twierdzenia o odnowieniu (por. [1, rozdz. XI]).

Lemat 4.2. Niech $\underline{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$, $\underline{b} = (\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$ będą rozkładami prawdopodobieństwa zmiennych losowych o wartościach całkowitych.

Niech dalej spłot dwóch rozkładów tego typu będzie określony jako rozkład \underline{c} taki, że

$$c_i = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j b_{i-j}, \quad i = \dots, -1, 0, +1, \dots,$$

symbolicznie: $\underline{c} = \underline{a} * \underline{b}$. Niech n -krotny spłot rozkładu \underline{a} z samym sobą będzie oznaczony przez $\underline{a} *^n$. Wówczas szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{a} *^n \underline{b}$$

jest zbieżny (dodawanie rozkładów określone jest jak dodawanie wektorów).

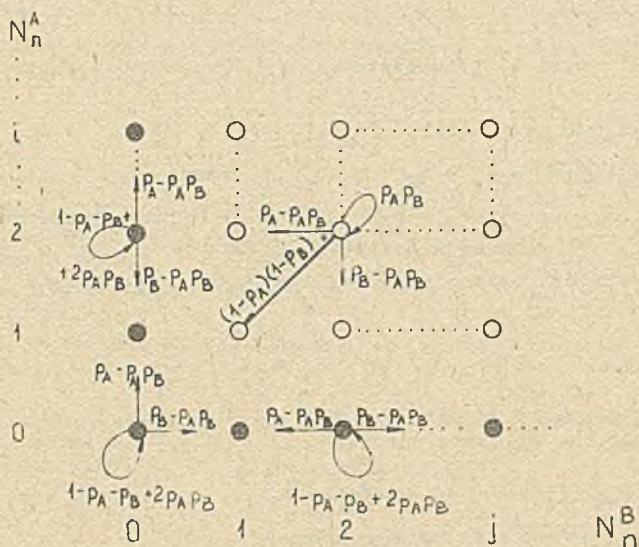
Udowodnimy obecnie rezultat, charakteryzujący własności graniczne modelu II.

Twierdzenie 4.1. Niech $r_{ij}^n = \mathcal{P}(N_n^A = i, N_n^B = j)$ (por. pkt I.4) oraz niech $p_A, p_B < 1$. Wówczas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{ij}^n = 0$$

dla każdej pary (i, j) .

Dowód. Wystarczy udowodnić (na mocy lematu 4.1), że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}|_{ij}$ jest zbieżny (gdzie $P_{ij}^{(n)}|_{ij}$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu (i,j) do stanu (i,j) w n krokach procesu).



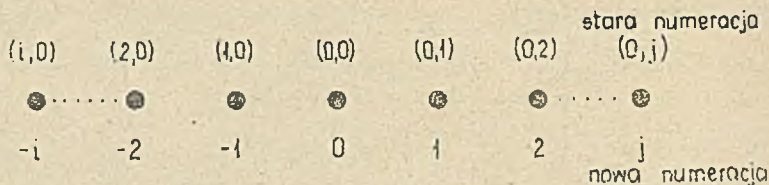
Rys. 5. Kierunki możliwych przejść w łańcuchu Markowa, związanym z modelem II. Przy strzałkach oznaczających kierunki przejść oznaczone ich prawdopodobieństwa

Przyjmijmy $i, j \geq 1$. Jak widać z rysunku 5, niemożliwy jest powrót do takiego stanu, jeżeli się go raz opuści. Dlatego

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}|_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{ij}^{(n)}|_{ij})^n = \frac{1}{1 - P_A P_B} < \infty.$$

Niech i lub j równe będzie zero - stany oznaczone pełnymi kółkami na rysunku 5, "zewnętrzne". Zauważymy, że powrót do stanu zewnętrznego jest możliwy tylko poprzez inne stany wewnętrzne. Dlatego możemy ograniczyć rozważania do łańcucha złożonego tylko z takich stanów. Zbiór stanów zewnętrznych można "zprostować" i ponumerować od nowa (por. rys. 6). Jak łatwo zauważyć $P_{11}^{(n)}$, $1 = \dots = 1, 0, 1, \dots$ (nowa numeracja stanów) jest

równu prawdopodobieństwu, że zmienna losowa $y_n = 1 + \sum_{m=1}^n x_m$ jest równa 1.



Rys. 6. "Rozprostowany" zbiór stanów zewnętrznych

Zmienne x_m są niezależne, $P\{x_m = 0\} = 1 - p_A - p_B + 2p_A p_B$, $P\{x_m = -1\} = p_A - p_A p_B$, $P\{x_m = 1\} = p_B - p_A p_B$. Niech $\underline{u} = (\dots, 0, p_A - p_A p_B, 1 - p_A - p_B + 2p_A p_B, p_B - p_A p_B, 0, \dots)$ będzie rozkładem zmiennej losowej x_m , a \underline{g} rozkładem zmiennej losowej równej 1 z prawdopodobieństwem 1. Wówczas rozkład zmiennej losowej y_n ma postać

$$\underline{g} * \underline{u}^{*n}$$

Ale na mocy lematu 4.2 suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{g}_1 * \underline{u}^{*n}$$

jest zbieżna, co dowodzi twierdzenia.

Elementarne rozważania, oparte na wyliczaniu wartości oczekiwanych zmiennych losowych y_n , pozwalają ocenić kierunek fluktuacji łańcucha, ograniczonego do stanów zewnętrznych. Jest to zresztą niemal klasyczny przykład błędzenia losowego (por. np. [1, rozdz. 12]).

5. Uwagi końcowe

Przedstawione modele uproszczonego węzła montażu wskazują na to, że czynnikiem destabilizacji procesu jest komplementarność produktów A i B, występujących w modelu II. Natomiast model I zachowuje się w pewnych granicach stabilnie. Praktycznie oznacza to, że w rzeczywistym procesie zbliżonym do modelu I prawdopodobieństwo wysokich stanów magazynu jest niskie (por. rys. 1), podczas gdy model II daje okazję do nieprzewidzianych fluktuacji.

Byłoby interesujące zbadać zachowanie pełniejszego modelu węzła montażu, podobnego do opisanego w [3, pkt 2]. Stwarza to jednak sporo trudności technicznych.

Innym kierunkiem badań jest uwzględnienie ograniczeń na pojemność magazynów. Proste zadania tego typu prowadzą do rozpatrywania łańcuchów Markowa o skończonej liczbie stanów. Zasadniczo, rozkłady graniczne dla ta-

Kich kłopotów otrzymuje się dosyć prosto, korzystając np. z metody symbolicznej Howarda [2]. Na przeszkodzie stoi jednak duża złożoność notacji.

Na zakończenie warto zauważyć, że niektóre rozważane procesy, a w szczególności prosty proces z części II pracy, można by badać przez sprowadzenie do znanych problemów teorii kolejek. Nie dotyczy to jednak modelu II. Wydaje się przy tym, że podejście przedstawione tutaj rokuje pewne nadzieje również w przypadku złożonych procesów, bardziej zbliżonych do rzeczywistego, technicznego procesu typu montażu.

LITERATURA

- [1] Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań. Tom II. PWN, Warszawa 1978.
- [2] Howard R.: Dynamic probabilistic systems. Volume I: Markov models. Wiley, New York 1971.
- [3] Kimmel M.: Nietypowe zadania teorii kolejek związane z dyskretnymi procesami przemysłowymi I - podstawowe modele. ZN Pol. Śl., seria Automatyka.
- [4] Kimmel M.: Nietypowe zadania teorii kolejek związane z dyskretnymi procesami przemysłowymi II - własności graniczne prostego modelu. ZN Pol. Śl., seria Automatyka.
- [5] Loève M.: Teoria mierności. Izdatielstwo Inostrannoj Literatury, Moskwa 1962.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Józef Grabowski

НЕТИПИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
СВЯЗАННЫЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Часть III. Очередные граничные свойства

Резюме

Определены очередные граничные свойства модели введенной в части I. Полученные результаты не так очевидны как в части II, потому что модель более сложная, но теоретический анализ вместе с симуляцией дают возможность определить основные граничные свойства процесса.

SPECIFIC PROBLEMS IN THE QUEUEING THEORY CONNECTED
WITH THE DISCRETE INDUSTRIAL PROCESSES

III - FURTHER LIMIT PROPERTIES

Summary

Further investigation of the properties of process models defined in Part I is performed. The results are not as clear as those in Part II sin-

ce the models considered are not so simple. Nevertheless, theoretical analysis supported by simulation results gives the answer for basic questions concerning the process limit properties. Also several remarks concerning possible applications are included.