

Daniel SERAFIN, Zbigniew SOCHA,

Andrzej KWIECIEŃ

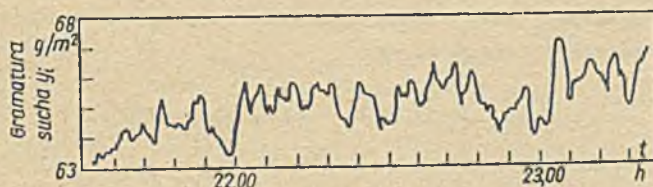
Politechnika Śląska

MOŻLIWOŚCI BADANIA I ANALIZY PROCESÓW LOSOWYCH PRZY OGRANICZENIACH POMIAROWYCH

Streszczenie. W pracy zawarto opis metodyki badania procesów losowych za pomocą funkcji korelacji i funkcji gęstości widmowej w przypadku ograniczonych możliwości pomiarowych. Położono szczególny nacisk na numeryczną analizę badanych procesów. Rozważania zilustrowano przykładami zamieszczając wyniki obliczeń na EMC dotyczące analizy rzeczywistych procesów losowych.

1. Wstęp

Proponowane w literaturze sposoby badania i analizy zarejestrowanych przebiegów czasowych, a w szczególności przebiegów losowych będących realizacjami pewnych procesów losowych [1], [2], [7], okazują się niejednokrotnie niemożliwe do zastosowania. Wiąże się to z koniecznością posiadania wielu informacji i danych o badanym procesie, do których dostęp może okazać się utrudniony lub wręcz niemożliwy. Dotyczy to np. częstotliwości granicznej widma sygnału, możliwości uzyskania wielu realizacji procesu losowego lub też możliwości uzyskania odpowiednio długich realizacji. Jako przykład można rozpatryć proces, którego realizacja przedstawiona jest na rys. 1. Jest to, jak widać, proces wolnozmienny, a przedstawiona realizacja jest jedyną, jaką się dysponuje. Sytuacje podobne jak opisana powyżej są przedmiotem dalszych rozważań.



Rys. 1. Przykładowa realizacja procesu losowego - przebieg czasowy zmian masy suchej 1 m^2 papieru (tzw. gramatury suchej)

2. Problem określenia czasu próbkowania

Podstawą trudność sprawia określenie czasu próbkowania zarejestrowanego sygnału. Pewne źródła literaturowe [1], [2], [3], [4], [7] podają zależność pozwalającą na obliczenia czasu próbkowania (korzysta się z tw. Sazonna-Kotielnikowa). Zależność ta jest następująca:

$$\Delta t = \frac{1}{2f_g} \quad (1)$$

gdzie:

Δt - oznacza czas próbkowania,

f_g - oznacza częstotliwość graniczną widna sygnału.

Niestety, zależność (1) wymaga znajomości parametru f_g , którego wyznaczenia, przy braku dodatkowych informacji o procesie lub własnościach przyrządów rejestrujących, jest w rozpatrywanych sytuacjach niemożliwe. Należy tu dodać, że najczęściej [3], [4] wartość f_g określa się przy założeniu, iż znana jest strefa nieczułości przyrządu pomiarowego, a jego transmitancja lub zarejestrowany przebieg czasowy jest na tyle regularny i gładki, aby można było wyznaczyć czas próbkowania w oparciu o wyrażenie zawierające wartość pochodnej badanego sygnału losowego w każdej chwili czasu. Wspomniane metody nie są więc możliwe do zastosowania w prowadzonych tu rozważaniach. W prasie proponuje się, aby przyjąć pewną zależność z góry wartość czasu próbkowania $\Delta t = \Delta t_z$. Wartość Δt_z zostanie później zweryfikowana. Sposób weryfikacji opisany zostanie w dalszej części pracy.

Przyjmując wartość $\Delta t = \Delta t_z$ można przystąpić do dalszej analizy.

3. Opis metodyki postępowania

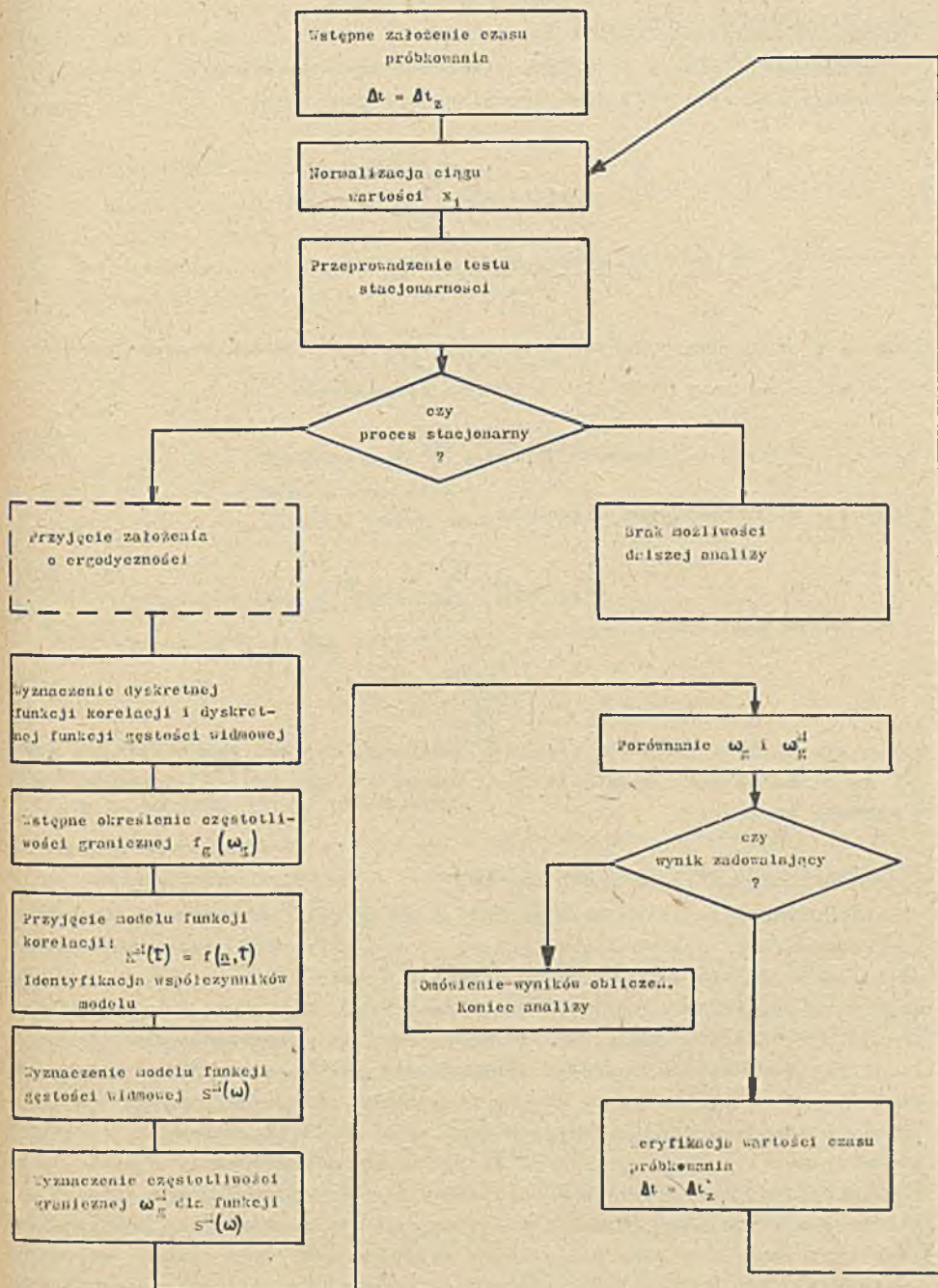
Na rys. 2 przedstawiono schematycznie sposób postępowania przy badaniu procesów losowych należących do rozpatrywanej tu klasy. Badany przebieg losowy oznaczymy przez $x(t)$. W wyniku przeprowadzenia próbkowania sygnału otrzymuje się ciąg wartości:

$$x_i = x(i \Delta t); \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

gdzie:

$n \Delta t = T$, a T - oznacza czas realizacji procesu.

Obecnie omówione zostaną szczegółowe etapy postępowania zawarte w schemacie na rys. 2.



3.1. Normalizacja ciągu x_i

Normalizacja polega na przekształceniu ciągu wartości x_i w ciąg \hat{x}_i o wartości średniej równej zero i wariancji równej jeden.

Niech

$$\bar{x}_{sr} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x}_{sr})^2 \quad (4)$$

oznaczają odpowiednio wartość średnią i wariancję skwantowanego sygnału x_i .

Można utworzyć nowy ciąg \hat{x}_i w sposób następujący:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}_{sr}}{\sigma}, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5)$$

Ciąg \hat{x}_i ma następujące własności:

$$\hat{\bar{x}}_{sr} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \hat{x}_i = 0 \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (\hat{x}_i - \hat{\bar{x}}_{sr})^2 = 1 \quad (7)$$

Normalizacja jest jednym z elementów wstępnej obróbki skwantowanego sygnału x_i i ma na celu usunięcie tzw. trendu stałego [1], [2] występującego w sygnale losowym.

3.2. Realizacja testu stacjonarności

Przeprowadzenie testu stacjonarności ma na celu weryfikację hipotezy, czy rozpatrywany proces losowy należy do klasy procesów stacjonarnych [5]. Jeśli na podstawie wyników testu hipotezę należy odrzucić, wtedy dalsza analiza rozpatrywanego procesu jest niemożliwa. Wynika to z faktu, iż dysponuje się zaledwie jedną realizacją procesu, a wyznaczenie funkcji korelacji procesu niestacjonarnego wymaga wielu realizacji. Dalsza analiza jest możliwa, gdy w wyniku testu nie ma podstaw do odrzucenia postawionej hipotezy o stacjonarności. Ponieważ dane empiryczne [1] wskazują, iż rzeczywiste losowe procesy stacjonarne są procesami ergodycznymi, a więc dla celów praktycznej analizy można bez troski o precyzję potraktować rzeczywiste procesy stacjonarne jako procesy ergodyczne (w ścisłych rozważaniach teoretycznych należałoby pamiętać, iż stacjonarność jest tylko warunkiem koniecznym ergodyczności). W wielu praktycznych przypadkach wspomniane założenie o ergodyczności jest uwzględniane [6].

Sposób przeprowadzenia testu stacjonarności można znaleźć w licznej na ten temat literaturze, np. [1], [8]. Należy jedynie dodać, iż do badań stacjonarności przeprowadzonych w ramach niniejszej pracy zastosowano test serii [1].

3.3. Wyznaczenie funkcji korelacji

W dalszej części pracy pojęcie funkcji korelacji będzie dotyczyło funkcji korelacji własnej.

Przy założeniu ergodyczności funkcję korelacji w postaci dyskretnej można estymować następująco:

$$K_j = \frac{1}{n-j+1} \sum_{i=0}^{n-j} \hat{x}_i \hat{x}_{i+j}; \quad (j = 0, 1, \dots, n_{\max}) \quad (8)$$

gdzie:

$K_j = K(j \Delta t)$ - oznacza wartość funkcji korelacji w punkcie j , co odpowiada opóźnieniu $j \Delta t$,

n_{\max} - oznacza maksymalną wartość opóźnienia.

3.4. Wyznaczenie funkcji gęstości widmowej

Dyskretną funkcję gęstości widmowej można estymować zależnością:

$$S(\omega) = 2 \sum_{j=1}^{n_{\max}} K_j \cos \omega j d_j \quad (9)$$

gdzie:

d_j - oznacza tzw. funkcję wagi.

Funkcja wagi została zastosowana w celu częstotliwościowego wygładzenia estymatora funkcji gęstości widmowej.

Estymator (9) określony jest w punktach

$$\omega = \omega_j = \frac{\pi}{n_{\max}} i; \quad (i = 0, 1, \dots, n_{\max}) \quad (10)$$

a więc dla przyjętego czasu próbkowania Δt_z otrzymuje się częstotliwość graniczną ω_g określoną następująco:

$$\omega_g = \frac{\pi}{n_{\max}} n_{\max} = \pi \quad (11)$$

Najbardziej znane funkcje wagi [1], [2] to funkcja Hanna - d_H określona wzorem:

$$d_{Hj} = \begin{cases} 0 & \text{dla } (j > n_{\max}) \\ 1 & \text{dla } (j = 0, 1, \dots, n_{\max}) \\ 2 & \text{dla } (j < -n_{\max}) \\ 0 & \end{cases} \left(1 + \cos \frac{\pi}{n_{\max}} j\right) \quad (12a)$$

oraz funkcja Parzona - d_p

$$d_{p,j} = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{j}{n_{\max}}\right)^2 + 6 \left(\frac{j}{n_{\max}}\right)^3; & (j = 0, 1, \dots, \frac{1}{2} n_{\max}) \\ 2 \left(1 - \frac{j}{n_{\max}}\right)^3 & (j = \frac{1}{2} n_{\max} + 1, \dots, n_{\max}) \\ 0 & (j > n_{\max}) \end{cases} \quad (12b)$$

3.5. Przyjęcie modelu funkcji korelacji

Przyjęcie określonego modelu funkcji korelacji winno odbywać się na podstawie zaobserwowanych wartości wyznaczonych z zależności (8) oraz na podstawie doświadczeń wyniesionych z badań nad określoną klasą zjawisk fizykochemicznych.

Ogólną postać przyjętego modelu można zapisać następująco:

$$K^M(\tau) = f(\underline{a}, \tau) \quad (13)$$

gdzie:

$K^M(\tau)$ - oznacza model funkcji korelacji,

$f(\underline{a}, \tau)$ - jest funkcją zależną od czasu opóźnienia oraz wektora współczynników \underline{a} , którego składowymi są nieznanne na razie wartości a_1, \dots, a_r .

3.6. Identyfikacja współczynników modelu funkcji korelacji

W oparciu o wyznaczoną wg (8) dyskretną funkcję korelacji K_j oraz o przyjęty model $f(\underline{a}, \tau)$ należy obliczyć wartości składowych wektora \underline{a} zadając, aby przebieg funkcji $f(\underline{a}, \tau)$ leżał możliwie jak najbliżej punktów K_j .

Oznaczając:

$$f(\underline{a}, j\Delta\tau) = f_j(\underline{a})$$

postawione zadanie można rozwiązać dokonując minimalizacji po wektorze \underline{a} sumy kwadratów odchyłek wartości $f_j(\underline{a})$ od wartości K_j . Należy więc wyznaczyć:

$$\min_{\underline{a}} \sum_{j=0}^{n_{\max}} [K_j - f_j(\underline{a})]^2 = \sum_{j=0}^{n_{\max}} [K_j - f_j(\hat{\underline{a}})]^2 \quad (14)$$

Zadanie polega więc na minimalizacji nieliniowej funkcji (14) wielu zmiennych. Minimalizacji tej można dokonać wykorzystując jedną ze znanych metod minimalizacji funkcji wielu zmiennych [9], [10]. Ostatecznie otrzymuje się ścisłą zależność:

$$K^M(\tau) = f(\underline{a}, \tau) \quad (15)$$

gdzie:

\underline{a} - jest znalezionym wektorem wartości współczynników modelu.

3.7. Wyznaczenie funkcji gęstości widmowej $S^M(\omega)$ odpowiadającej funkcji korelacji $K^M(\tau)$

Dokonując transformacji Fouriera funkcji korelacji $K^M(\tau)$

$$S^M(\omega) = [K^M(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} K^M(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (16)$$

otrzymuje się funkcję gęstości widmowej $S^M(\omega)$.

3.8. Wyznaczenie częstotliwości granicznej ω_g^M dla $S^M(\omega)$

Wartości $\frac{M}{\varepsilon}$ można obliczyć zakładając, iż odrzuca się pewną część widma mocy sygnału tak, aby ta odrzucona część stanowiła niewielki procent całego widma. Poszukuje się więc takiego ω_g^M , aby

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} S^M(\omega) d\omega - \int_{-\omega_g^M}^{\omega_g^M} S^M(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S^M(\omega) d\omega} 100\% < \Delta [\%] \quad (17)$$

gdzie:

Δ - przyjęta mała wartość.

3.9. Porównanie wartości ω_g^M i ω_g

O ile otrzymane wartości ω_g^M i ω_g spełniają warunek:

$$\left| \omega_g^M - \omega_g \right| < \varepsilon$$

gdzie:

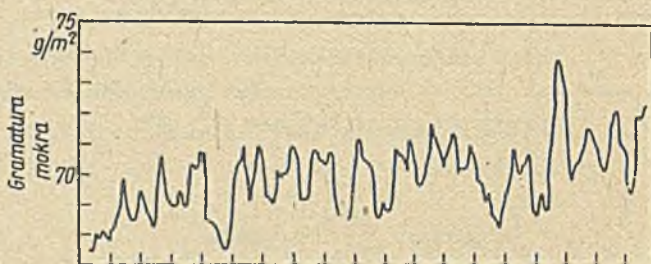
ε - miara dokładności,

można uważać przeprowadzone rozważania za zadowalające. W przeciwnym wypadku należy przyjąć inną wartość $\Delta t'_2 = \Delta t$ i dokonać powtórnie analizy procesu.

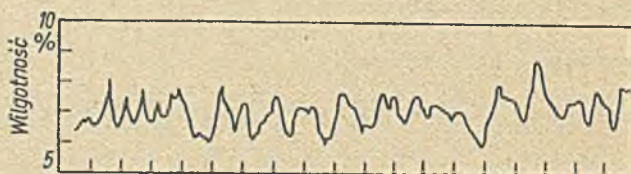
4. Ilustracja numeryczna

Mając realizacje procesów losowych (rys. 1,3,4), dla zilustrowania rozważań opisanych w poprzednich rozdziałach przeprowadzono obliczenia numeryczne. W tym celu opracowany został program w języku FORTRAN, uwzględniający wszystkie etapy opisanych poprzednio rozważań. Nie korzystano ze standardowych programów [11] zawartych w bibliotece systemowej ODRA 1300, ponieważ programy te nie pozwalają na realizację wszystkich opisanych etapów (brak np. testu stacjonarności). Wobec tego wielokrotne łączenie programów własnych z programami bibliotecznymi jest nieopłacalne.

Analizowano przebiegi losowe przedstawione na rys. 1,3,4, a szczególnie opisano wyniki numeryczne dotyczące sygnału z rys. 3^x.



Rys. 3. Przykładowa realizacja procesu losowego - przebieg czasowy zmian masy 1 m² papieru z uwzględnieniem wpływu wilgotności (tzw. gramatury mokrej)



Rys. 4. Przykładowa realizacja procesu losowego - przebieg czasowy zmian wilgotności

^x Blizsze dane o procesie, z którego pochodzą badane przebiegi losowe, można znaleźć w [12].

W realizowanym teście stacjonarności za medianę \bar{x}_M przyjęto wartość średniokwadratową. Ponieważ sygnał został wcześniej znormalizowany, wartość ta wyniosła (zgodnie z oczekiwaniem)

$$\bar{x}_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^2 = 1$$

gdzie:

N - oznacza ilość przedziałów obserwacji [1], [8],

\hat{x}_i - oznaczają wartości średniokwadratowe zmiennej x w poszczególnych przedziałach obserwacji:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ji}; \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

n_i - oznacza ilość punktów realizacji w i -tym przedziale.

Wartości \hat{x}_i zawarte są w tablicy 1^{xx)}

Tablica 1

i	\hat{x}_i	czy $\hat{x}_i > \bar{x}_M$
1	0,0063	-
2	0,4916	-
3	1,3204	+
4	0,2856	-
5	0,6074	-
6	0,4699	-
7	0,5965	-
8	0,4356	-
9	2,4167	+
10	1,2820	+

W obliczeniach przyjęto $N = 10$.

Z tablicy 1 wynika że w ciągu: $\underbrace{-}_{1} \underbrace{+}_{2} \underbrace{- - -}_{3} \underbrace{+ +}_{4}$

występują $r=4$ serie.

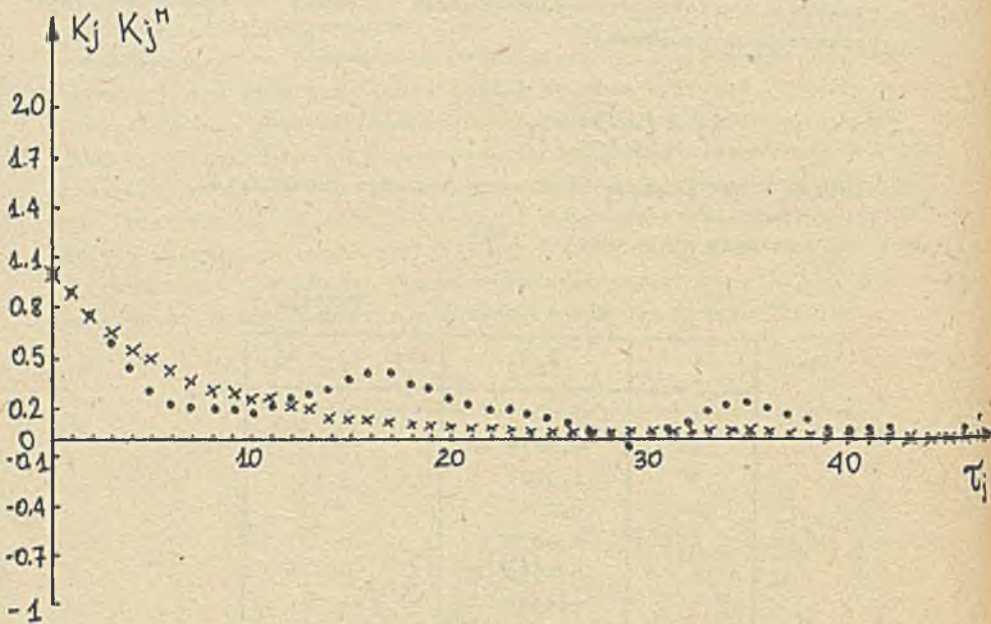
Dla przyjętego poziomu istotności $\bar{\alpha} = 0,05$ przedział akceptacji hipotezy o stacjonarności (niezależności obserwacji w serii) wynosi

$$r_{10/2; 1-\bar{\alpha}/2} < r \leq r_{10/2; \bar{\alpha}/2} \quad (18)$$

^{xx)} Znaki "-" i "+" oznaczają odpowiednio, że $\hat{x}_i \leq \bar{x}_M$ i $\hat{x}_i > \bar{x}_M$.

gdzie: $r_{n;1-\alpha/2}$ i $r_{n;\alpha/2}$ są kwantylami odpowiednio rzędu $1-\alpha/2$ i $\alpha/2$ dla ciągu $N = 2n$ obserwacji. Ponieważ $r_{5;0,975} = 2$, $r_{5;0,025} = 9$, tzn. zachodzi $2 < 4 \leq 9$, a więc warunek (18) jest spełniony.

Wobec powyższego nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o stacjonarności badanego procesu. Opierając się na zależnościach przedstawionych w [7] oszacowano $n_{\max} = 50$ (wzór (8)) i wyznaczono funkcję korelacji K_j (na podst. (8)). Przebieg K_j przedstawia rys. 5^x.



Rys. 5. Wykresy funkcji korelacji dla gramatury mokrej

Przyjmując model

$$K_j^M = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \quad (19)$$

wyznaczono współczynniki α i ω_0 w wyniku minimalizacji kryterium (14). Proces minimalizacji zrealizowano opierając się na:

- metodzie błędzenia przypadkowego w celu wstępnego oszacowania obszaru minimum (tzw. metoda MONTE-CARLO),
- metodzie SIMPEKS-NELDERA pozwalającej na znaczne zbliżenie się do punktu optymalnego,

^x Znakiem "x" oznaczono przebieg wynikający z rozważań teoretycznych (dla przyjętych modeli). Znakiem "o" oznaczono przebiegi wyznaczone zgodnie z równaniami (8) i (9).

- metodzie gradientowej pozwalającej na szybkie i dokładne wyznaczenie punktu optymalnego (punkt startowy otrzymany z poprzedniej metody leży blisko punktu optymalnego).

Otrzymano: $\alpha = 0,1295$, $\omega_0 = 0,986 \cdot 10^{-6}$.

Można przyjąć, że ces $\omega_0 \tau = 1$, a więc aproksymująca funkcja ma charakter wykładniczy

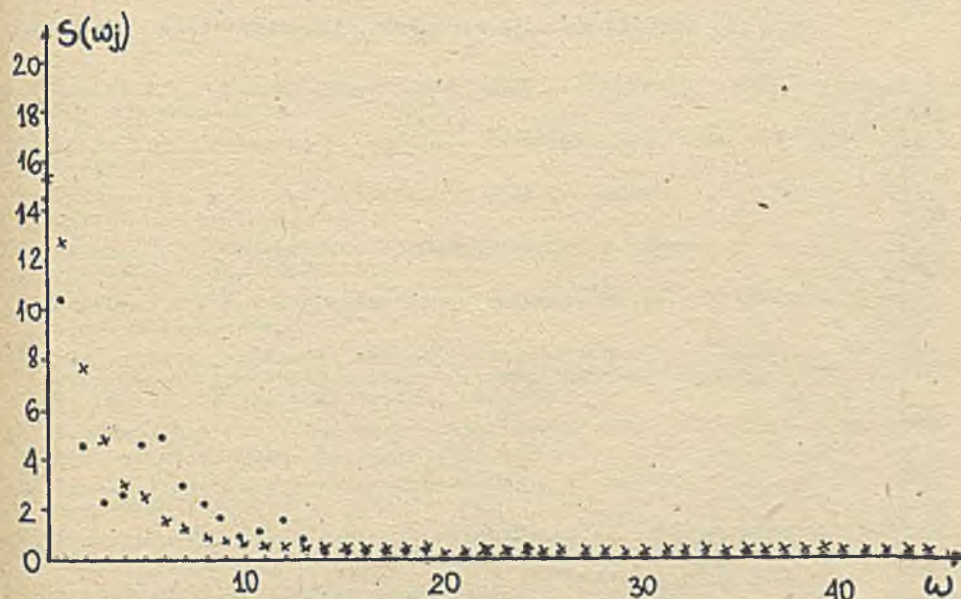
$$K^M(\tau) = e^{-0,1295|\tau|}$$

Przebieg tej funkcji w postaci dyskretnej przedstawia rys. 4.

Funkcja gęstości widmowej odpowiednia do (19) wynosi:

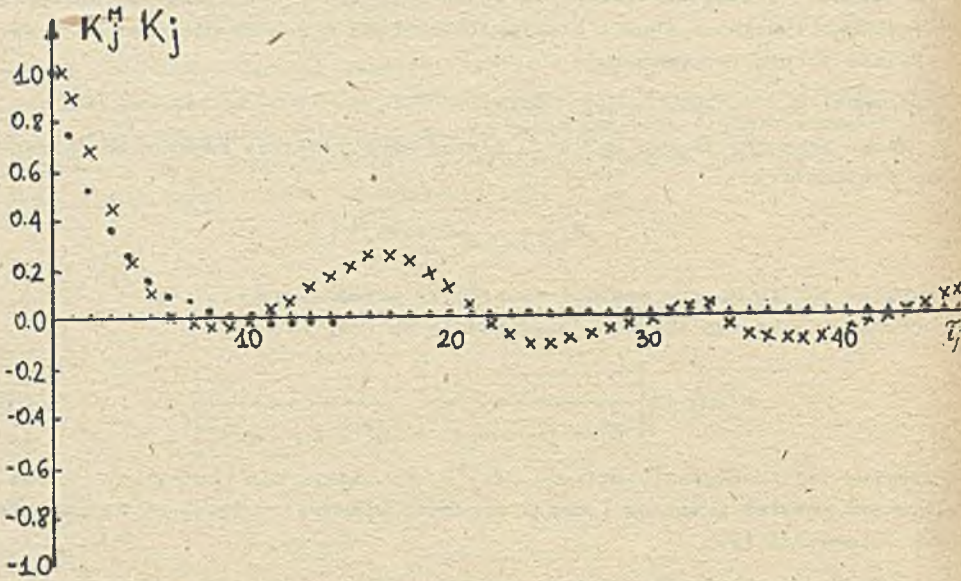
$$S^M(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (20)$$

Przebieg tej funkcji przedstawia rys. 6, na którym dla porównania przedstawiono również przebieg funkcji gęstości widmowej wyznaczony na podstawie zależności (9).

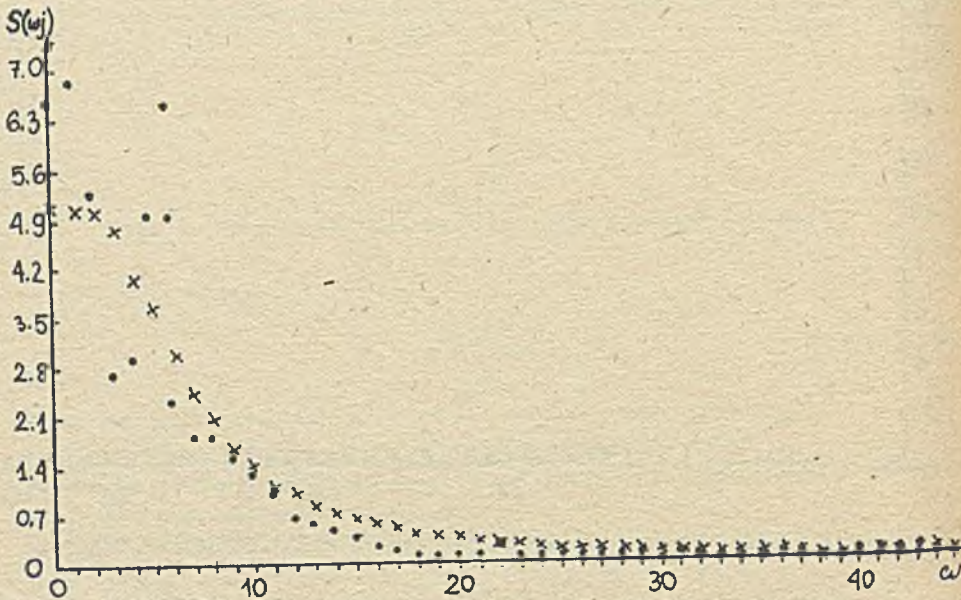


Rys. 6. Wykresy funkcji gęstości widmowych dla gramatury mokrej

Odrzucona część widma (wzór (17)) wynosi $\Delta = 2,6\%$. Identyczne obliczenia przeprowadzono dla pozostałych sygnałów, dla których zarejestrowano przebiegi przedstawione na rys. 1 i 4. Uzyskano wyniki:



Rys. 7. Wykresy funkcji korelacji dla wilgotności



Rys. 8. Wykresy funkcji gęstości widmowych dla wilgotności

- przebieg z rys. 1

$$\alpha = 0,084, \quad \omega_0 = 0,137 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta = 1,7\%$$

- przebieg z rys. 4

$$\alpha = 0,29, \quad \omega_0 = 0,16, \quad \Delta = 6,0\%$$

Odpowiednie przebiegi funkcji korelacji przedstawiono na rys. 5, 7. Ponadto na rys. 6, 8 przedstawiono dla porównania przebiegi funkcji gęstości widmowych $S(\omega)$ i $S^M(\omega)$ zgodnie ze wzorami (9) i (16).

Podsumowanie

Zgodność pomiędzy wynikami uzyskanymi na drodze rozważań teoretycznych i wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych pozwala przypuszczać, iż proponowana w pracy metoda może być wykorzystana do analizy rzeczywistych sygnałów losowych.

LITERATURA

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
- [2] Ottes R.K., Enochson L.: Analiza numeryczna szeregów czasowych. WNT, Warszawa 1978.
- [3] Mańczak K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1978.
- [4] Kuzmin I.W., Kedrus W.A.: Osnovy teorii informacji i kodowania. GI-IOVSz, Kijew 1977.
- [5] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.
- [6] Węglarz A.: Określenie cech diagnostycznych chorób serca na podstawie analizy probabilistycznej procesu sterowania rytmem serca. Zeszyty Naukowe Nr 39, WSI, Zielona Góra 1976.
- [7] Sołodownikow W.W.: Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego. WNT, Warszawa 1964.
- [8] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1968.
- [9] Findeisen V., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa 1977.
- [10] Luenberger D.G.: Teoria optymalizacji. PWN, Warszawa 1974.
- [11] Materiały firmowe ELWRO. Analiza statystyczna. Wrocław 1975.
- [12] Niederliński A.: Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej. T.2. WNT, Warszawa 1977.

ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
В УСЛОВИЯХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Р е з ю м е

Рассмотрена методика исследования случайных процессов при помощи корреляционной функции и спектральной функции в случае, когда некоторые сигналы недоступны для измерений. В статье подчеркнуто вычислительный аспект. Приведены примеры исследования случайных процессов и результаты расчетов на ЭВМ.

POSSIBILITIES OF RESEARCH AND ANALYSIS
OF RANDOM PROCESSES WITH LIMITED MEASUREMENTS

S u m m a r y

In this paper we describe methods of random processes investigation with the aid of correlation function and spectral density function in the case of limited measurement possibilities. We stress particularly the numerical analysis of explored processes. Our considerations are illustrated by examples of computation results relative to the analysis of real random processes.