ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: AUTOMATYKA z. 65 Nr kol. 738

Marcin SKOWRONEK, Daniel SERAFIN

Politechnika Śląska

ZMODYFIKOWANA METODA WOLFE'A

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób modyfikacji metody Wolfe'a rozwiązywania zagadnienia programowania kwadratowego. Przedstawiona modyfikacja pozwala na skrócenie czasu obliczeń i zmniejszenie obszaru pamięci zajmowanej przez dane.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń zamieszczono w końcowym rozdziale pracy. Potwierdzają one celowość stosowania proponowanej modyfikacji.

1. Wprowadzenie

Przegląd literatury wskazuje, że autorzy podając rozwiązanie zadania programowania kwadratowego sprowadzają je do postaci kanonicznej [1], [3], [4], [5], dla której, stosując metodę SIMPLEKS 2, otrzymują rozwiązanie optymalne zadania. Sprowadzenie do postaci kanonicznej odbywa się zawsze poprzez wprowadzenie do układów ograniczeń nierównościowych nowych zmiennych (zmiennych uzupełniających) celem zastąpienia ograniczeń nierównościowych - ograniczeniami równościowymi [1], [2]. Dla zmiennych mogących przyjmować wartości dowolne stosuje się przekształcenie polegające na zastąpieniu danej zmiennej dowolnej przez różnicę dwóch zmiennych nieujemnych, Uzyskana postać nazywa się postacią kanoniczną.

Ze względu na łatwość dostępu do odpowiedniej literatury nie przedstawia się w niniejszej pracy szczegółów związanych z uzyskaniem postaci kanonicznej ani samej postaci końcowej. Nie opisano też dalszych etapów związanych z uzyskaniem rozwiązania optymalnego dla postaci kanonicznej, gdyż są one zamieszczone w odpowiedniej literaturze [1], [3], [4], [5], [6], [7]. Można jedynie wspomnieć, iż dla postaci kanonicznej tworzy się warunki konieczne istnienia minimum (warunki Kuhna-Tuckera), a dla znalezienia rozwiązania spełniającego te warunki stosuje się metodę SIMPLEKS. Uzyskane tą drogą rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym zadania programowania kwadratowego. W dalszych rozdziałach pracy przedstawiono sposób modyfikacji algorytmu Wolfe'a. W proponowanej modyfikacji nie sprowadza się zadania do postaci kanonicznej.
W konsekwencji inaczej przedstawia się wtedy zbiór warunków koniecznych istnienia minimum. Etap znalezienia rozwiązania spełniającego określono

warunki konieczne odbywa się podobnie jak dla postaci kanonicznej (tzn. metodą SIMPLEKS z pewnymi dodatkowymi warunkami), lecz dotyczy już zadania o znacznie mniejszym rozmiarze.
W pracy dowodzi się, iż rozwiązanie otrzymane za pomocą algorytmu zmodyfikowanego jest rozwiązaniem optymalnym. Należy dodać, iż w przypadku braku ograniczeń nierównościowych oraz przy spełnieniu warunków nieujemności zmiennych [1],[2] wersja zmodyfikowana przechodzi w wersję kanoniczną.

2. Opis algorytmu

Dane jest zadanie programowania kwadratowego: znaleźć minimum funkcji

$$f(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x} + \underline{x}^T \underline{D} \underline{x} \tag{2.1}$$

przy ograniczeniach

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \tag{2.2}$$

$$\underline{H} \underline{x} < \underline{g} \tag{2.3}$$

$$\underline{x}^1 > \underline{0}, \quad \underline{x}^2 \text{ - dowolne} \tag{2.4}$$

gdzie wektory $\underline{x}^1$ i $\underline{x}^2$ wynikają z następującego podziału wektora $\underline{x}$:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{bmatrix}$$

Wymiary poszczególnych macierzy i wektorów we wzorach (2.1) - (2.4) są następujące:

$$\underline{A} = \left[a_{ij}\right] \quad (i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n) \tag{I}$$

$$\underline{b} = \left[b_i\right] \quad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{II}$$

$$\underline{H} = \left[h_{lj}\right] \quad (l = 1,2,\ldots,k; \quad j = 1,2,\ldots,n) \tag{III}$$

$$\underline{g} = \left[g_l\right] \quad (l = 1,2,\ldots,k) \tag{IV}$$

$$\underline{x} = \left[x_j\right] \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{V}$$

$$\underline{x}^1 = \left[x_j\right] \quad (j = 1,2,\ldots,n_1) \tag{VI}$$

$$\underline{x}^2 = \left[x_j\right] \quad (j = n_1+1,\ n_1+2,\ \ldots,\ n) \tag{VII}$$

$$\underline{c} = \left[c_j\right] \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{VIII}$$

$$\underline{D} = \left[d_{ij}\right] \quad (i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n) \tag{IX}$$

gdzie: macierz $\underline{D}$ jest symetryczna.

Dla określenia warunków koniecznych istnienia minimum funkcji $f(x)$ tworzymy funkcję Lagrange'a:

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = \underline{c}^T \underline{x} + \underline{x}^T \underline{D}\, \underline{x} + \underline{\lambda}^T (\underline{A}\, \underline{x} - \underline{b}) + \underline{\xi}^T(\underline{H}\, \underline{x} - \underline{g}) \tag{2.5}$$

Dla dalszych rozważań wygodnie będzie dokonać podziału macierzy $\underline{A}, \underline{H}, \underline{D}$ oraz wektora $\underline{c}$ zgodnie z podziałem wektora $\underline{x}$ na wektory $\underline{x}^1$ i $\underline{x}^2$

$$\underline{A} = \left[\underline{A}^1\ \underline{A}^2\right], \quad \underline{H} = \left[\underline{H}^1, \underline{H}^2\right], \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{D}^{11} & \underline{D}^{12} \\ \underline{D}^{21} & \underline{D}^{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{C}^1 \\ \underline{C}^2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Korzystając z powyższych oznaczeń otrzymujemy następujące warunki konieczne istnienia minimum [1],[6]:

$$\nabla_{\underline{x}^1} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = \underline{c}^1 + 2\left[\underline{D}^{11}\ \underline{D}^{12}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{bmatrix} + \underline{A}^{1^T} \underline{\lambda} + \underline{H}^{1^T} \underline{\xi} \geq \underline{0} \tag{2.7}$$

$$\nabla_{\underline{x}^2} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = \underline{c}^2 + 2\left[\underline{D}^{21}\ \underline{D}^{22}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{bmatrix} + \underline{A}^{2^T} \underline{\lambda} + \underline{H}^{2^T} \underline{\xi} = \underline{0} \tag{2.8}$$

$$\nabla_{\underline{\lambda}} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = \left[\underline{A}^1\ \underline{A}^2\right] \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{bmatrix} - \underline{b} = \underline{0} \tag{2.9}$$

$$\nabla_{\underline{\xi}} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = \left[\underline{H}^1\ \underline{H}^2\right] \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{bmatrix} - \underline{g} \leq \underline{0} \tag{2.10}$$

$$\underline{x}^1 \geq \underline{0}, \quad \underline{\xi} \geq \underline{0}, \quad \underline{x}^2 \text{ - dowolne}, \quad \underline{\lambda} \text{ - dowolne} \tag{2.11}$$

$$\underline{x}^{1^T} \cdot \nabla_{\underline{x}^1} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = 0 \tag{2.12}$$

$$\underline{\xi}^T \cdot \nabla_{\underline{\xi}} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\xi}) = 0 \tag{2.13}$$

gdzie: $\underline{\lambda}, \underline{\xi}$ są mnożnikami Lagrange'a.

Oznaczając lewe strony (2.7) i (2.10) odpowiednio przez $\underline{\eta}$ i $\underline{v}$ otrzymamy

$$\underline{\eta} = \underline{c}^1 + 2\left[\underline{D}^{11}\ \underline{D}^{12}\right]\begin{bmatrix}\underline{x}^1\\ \underline{x}^2\end{bmatrix} + \underline{A}^{1^T}\underline{\lambda} + \underline{H}^{1^T}\underline{\xi} \geqslant \underline{0} \tag{2.14}$$

$$-\underline{v} = \left[\underline{H}^1\ \underline{H}^2\right]\begin{bmatrix}\underline{x}^1\\ \underline{x}^2\end{bmatrix} - \underline{g} \leqslant \underline{0} \tag{2.15}$$

Po uwzględnieniu zależności (2.14) i (2.15) otrzymuje się następującą postać warunków koniecznych istnienia minimum:

$$\begin{bmatrix}\underline{A}^1 & \underline{A}^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0}\\ \underline{H}^1 & \underline{H}^2 & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0}\\ 2\underline{D}^{11} & 2\underline{D}^{12} & \underline{0} & \underline{A}^{1^T} & \underline{H}^{1^T} & -\underline{I}\\ 2\underline{D}^{21} & 2\underline{D}^{22} & \underline{0} & \underline{A}^{2^T} & \underline{H}^{2^T} & \underline{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}^1\\ \underline{x}^2\\ \underline{v}\\ \underline{\lambda}\\ \underline{\xi}\\ \underline{\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{b}\\ \underline{g}\\ -\underline{c}^1\\ -\underline{c}^2\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

gdzie:

$$\underline{x}^1 \geqslant \underline{0},\quad \underline{\xi} \geqslant \underline{0},\quad \underline{v} \geqslant \underline{0},\quad \underline{\eta} \geqslant \underline{0},\quad \underline{x}^2 \text{ - dowolne},\quad \underline{\lambda} \text{ - dowolne} \tag{2.17}$$

oraz

$$\underline{x}^{1^T}\underline{\eta} = 0,\quad \underline{\xi}^T\underline{v} = 0 \tag{2.18}$$

Pokażemy obecnie, że dla znalezienia rozwiązania spełniającego powyżej określone warunki konieczne istnienia minimum funkcji można zastosować metodę SIMPLEKS podobnie jak w metodzie Wolfe'a [1] dla zadania programowania kwadratowego sformułowanego w postaci kanonicznej. W celu zastosowania metody SIMPLEKS wprowadzamy dodatkowe zmienne określone zależnością:

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^+ - \underline{\lambda}^-;\quad \underline{\lambda}^+ \geqslant \underline{0},\quad \underline{\lambda}^- \geqslant \underline{0} \tag{2.19}$$

$$\underline{x}^2 = \underline{x}^{2+} - \underline{x}^{2-};\quad \underline{x}^{2+} \geqslant \underline{0},\quad \underline{x}^{2-} \geqslant \underline{0} \tag{2.20}$$

Algorytm rozwiązania układu (2.16), (2.17), (2.18) składa się z dwóch faz. W pierwszej fazie, stosując metodę SIMPLEKS, znajduje się rozwiązanie bazowe następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^1 & \underline{A}^2 - \underline{A}^2 & \underline{0} \\ \underline{H}^1 & \underline{H}^2 - \underline{H}^2 & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^{2+} \\ \underline{x}^{2-} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{g} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$\underline{x}^1 \geqslant \underline{0}, \quad \underline{x}^{2+} \geqslant \underline{0}, \quad \underline{x}^{2-} \geqslant \underline{0}, \quad \underline{v} \geqslant \underline{0} \tag{2.22}$$

Jeśli rozwiązanie takie istnieje, to przystępuje się do fazy drugiej, gdzie określa się rozwiązanie bazowe układu (2.10) spełniającego dodatkowo warunki (2.17) i (2.18). Rozwiązanie to uzyskuje się rozwiązując zadanie minimalizacji sumy zmiennych sztucznych

$$z = \underbrace{[1, 1, \ldots, 1]}_{n_1\text{-współrz.}} \underline{u}^1 + \underbrace{[1, 1, \ldots, 1]}_{n-n_1\text{-współrz.}} \underline{u}^2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^1 & \underline{A}^2 & -\underline{A}^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{H}^1 & \underline{H}^2 & -\underline{H}^2 & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ 2\underline{D}^{11} & 2\underline{D}^{22} & -2\underline{D}^{12} & \underline{0} & \underline{A}^{1^T} & -\underline{A}^{1^T} & \underline{H}^{1^T} & -\underline{I} & \underline{E}^1 & \underline{0} \\ 2\underline{D}^{21} & 2\underline{D}^{22} & -2\underline{D}^{22} & \underline{0} & \underline{A}^{2^T} & -\underline{A}^{2^T} & \underline{H}^{2^T} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{E}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^{2+} \\ \underline{x}^{2-} \\ \underline{v} \\ \underline{\lambda}^+ \\ \underline{\lambda}^- \\ \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \\ \underline{u}^1 \\ \underline{u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{g} \\ -\underline{c}^1 \\ -\underline{c}^2 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$\underline{x}^1 \geqslant \underline{0}, \quad \underline{x}^{2+} \geqslant \underline{0}, \quad \underline{x}^{2-} \geqslant \underline{0}, \quad \underline{v} \geqslant \underline{0}, \quad \underline{\lambda}^+ \geqslant \underline{0}, \quad \underline{\lambda}^- \geqslant \underline{0}, \quad \underline{\xi} \geqslant \underline{0} \tag{2.25}$$

$$\underline{\eta} \geqslant 0, \quad \underline{u}^1 \geqslant \underline{0}, \quad \underline{u}^2 \geqslant 0$$

z dodatkowym warunkiem

$$\underline{x}^{1^T} \underline{\eta} = 0, \quad \underline{\xi}^T \underline{v} = 0 \tag{2.26}$$

gdzie $\underline{E}^1$ i $\underline{E}^2$ oznaczają macierze diagonalne o elementach na przekątnej głównej przyjmujących wartości Δ_j^1, $\Delta_j^2 = \pm 1$. Znak elementów Δ_j^1 Δ_j^2 jest tak dobrany, by po podstawieniu za $\underline{x}^1$, $\underline{x}^{2+}$, $\underline{x}^{2-}$, $\underline{v}$ rozwiązania bazowego, uzyskanego w fazie pierwszej oraz przy przyjęciu zerowych wartości składowych wektorów $\underline{\lambda}^+$, $\underline{\lambda}^-$, $\underline{\xi}$, $\underline{\eta}$ otrzymano rozwiązanie układu (2.24) przy nieujemnych wartościach składowych wektorów $\underline{u}^1$ i $\underline{u}^2$. Ten sposób postępowania zapewnia otrzymanie początkowego rozwiązania bazowego układu (2.24) spełniającego dodatkowo warunki (2.25) i (2.26). Tak więc, jeśli $\underline{x}_B^1$, $\underline{x}_B^{2+}$, $\underline{x}_B^{2-}$ są wektorami zawierającymi zmienne bazowe odpowiednich wektorów (bez indeksu B) określone na końcu fazy pierwszej, a przez $\underline{D}_B^{11}$, $\underline{D}_B^{12}$, $-\underline{D}_B^{12}$ oraz $\underline{D}_B^{21}$, $\underline{D}_B^{22}$, $-\underline{D}_B^{22}$ oznaczymy macierze zawierające kolumny odpowiednich macierzy (bez indeksów B) odpowiadające tym zmiennym bazowym, to elementy Δ_j^1 i Δ_j^2 określone są zależnością:

$$\Delta_j^1 = \begin{cases} +1 & \text{gdy} \quad -c_j^1 - 2\underline{d}_{jB}^{11}\,\underline{x}_B^1 - 2\underline{d}_{jB}^{12}\,\underline{x}_B^{2+} + 2\underline{d}_{jB}^{12}\,\underline{x}_B^{2-} \geqslant 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad -c_j^2 - 2\underline{d}_{jB}^{11}\,\underline{x}_B^1 - 2\underline{d}_{jB}^{12}\,\underline{x}_B^{2+} + 2\underline{d}_{jB}^{12}\,\underline{x}_B^{2-} < 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

dla $j = 1,2,\ldots,n_1$

$$\Delta_j^2 = \begin{cases} +1 & \text{gdy} \quad -\underline{c}_j^2 - 2\underline{d}_{jB}^{21}\,\underline{x}_B^1 - 2\underline{d}_{jB}^{22}\,\underline{x}_B^{2+} + 2\underline{d}_{jB}^{22}\,\underline{x}_B^{2-} \geqslant 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad -\underline{c}_j^2 - 2\underline{d}_{jB}^{21}\,\underline{x}_B^1 - 2\underline{d}_{jB}^{22}\,\underline{x}_B^{2+} + 2\underline{d}_{jB}^{22}\,\underline{x}_B^{2-} < 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

dla $j = n_1+1,\ n_1+2, \ldots, n$

gdzie $\underline{d}_{jB}^{lk}$ - oznacza j-ty wiersz macierzy $\underline{D}_B^{lk}$.

Dla rozwiązania zadania minimalizacji funkcji (2.23) stosowany jest algorytm SIMPLEKS, przy czym kolejne rozwiązanie bazowe dobiera się tak, by zawsze spełniony był warunek (2.26). Wykażemy obecnie, że jeżeli macierz $\underline{D}$ jest istotnie dodatnio, określona to ten sposób postępowania zapewnia otrzymanie rozwiązania w którym nie występują w bazie zmienne sztuczne bądź też występują, ale z wartością zero. Ponieważ z założenia macierz $\underline{D}$ jest istotnie dodatnio określona, warunki konieczne istnienia minimum są również warunkami dostatecznymi [1], to otrzymane tym algorytmem rozwiązanie jest poszukiwanym rozwiązaniem zadania programowania kwadratowego. Dowód poprawności algorytmu można przeprowadzić podobnie, jak to pokazano w pracy [1] dla kanonicznej postaci zadania programowania kwadratowego. Przyjmuje się również dodatkowe założenie wykluczające istnienie cyklu w metodzie SIMPLEKS. Pominięcie tego założenia możliwe jest przy stosowaniu leksykograficznej metody SIMPLEKS.

DOWÓD:

Załóżmy, że nie można wykonać żadnego dodatkowego kroku stosując metodę SIMPLEKS, który wynikałby ze sposobu postępowania określonego metodą SIMPLEKS i spełniał ograniczenia (2.26).

Oznaczmy przez $\underline{x}_1^1$ te składowe wektora $\underline{x}^1$, które są dodatnie, natomiast przez $\underline{\eta}_1$ oznaczmy odpowiednie składowe wektora $\underline{\eta}$; $\underline{\eta}_2$ – niech oznaczają te składowe wektora $\underline{\eta}$, które są dodatnie, a $\underline{x}_2^1$ – odpowiednie składowe wektora $\underline{x}^1$. Pozostałe składowe wektorów $\underline{x}^1$ i $\underline{\eta}$ oznaczymy odpowiednio przez $\underline{x}_3^1$ i $\underline{\eta}_3$.
Podobnie oznaczymy przez $\underline{v}_1$ te składowe wektora $\underline{v}$, które są dodatnie, a przez $\underline{\xi}_1$ – odpowiednie składowe wektora $\underline{\xi}$. Natomiast $\underline{\xi}_2$ niech oznaczają te składowe wektora $\underline{\xi}$, które są dodatnie, a $\underline{v}_2$ – odpowiednie składowe wektora $\underline{v}$. Pozostałe składowe wektorów $\underline{v}$ i $\underline{\xi}$ oznaczymy odpowiednio przez $\underline{v}_3$ i $\underline{\xi}_3$.
Mamy więc:

$$\underline{\eta}_1 = \underline{0}, \quad \underline{x}_2^1 = \underline{0}, \quad \underline{\xi}_1 = \underline{0}, \quad \underline{v}_2 = \underline{0} \tag{2.29}$$

Zgodnie z podziałem na wektory $\underline{x}_1^1$, $\underline{x}_2^1$, $\underline{x}_3^1$, $\underline{\eta}_1$, $\underline{\eta}_2$, $\underline{\eta}_3$, $\underline{\xi}_1$, $\underline{\xi}_2$, $\underline{\xi}_3$, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ podzielimy również układ równań (2.24).

$$\begin{bmatrix}
\underline{A}_1^1 & \underline{A}_2^1 & \underline{A}_3^1 & \underline{A}^2 & -\underline{A}^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{H}_{11}^1 & \underline{H}_{12}^1 & \underline{H}_{13}^1 & \underline{H}_1^2 & -\underline{H}_1^2 & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{H}_{21}^1 & \underline{H}_{22}^1 & \underline{H}_{23}^1 & \underline{H}_2^2 & -\underline{H}_2^2 & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{H}_{31}^1 & \underline{H}_{32}^1 & \underline{H}_{33}^1 & \underline{H}_3^2 & -\underline{H}_3^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
2\underline{D}_{11}^{11} & 2\underline{D}_{12}^{11} & 2\underline{D}_{13}^{11} & 2\underline{D}_1^{12} & -2\underline{D}_1^{12} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_1^{1^T} & -\underline{A}_1^{1^T} & \underline{H}_{11}^{1^T} & \underline{H}_{21}^{1^T} & \underline{H}_{31}^{1^T} & -\underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{E}_1^1 & \underline{0} \\
2\underline{D}_{21}^{11} & 2\underline{D}_{22}^{11} & 2\underline{D}_{23}^{11} & 2\underline{D}_2^{12} & -2\underline{D}_2^{12} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_2^{1^T} & -\underline{A}_2^{1^T} & \underline{H}_{12}^{1^T} & \underline{H}_{22}^{1^T} & \underline{H}_{32}^{1^T} & \underline{0} & -\underline{I} & \underline{0} & \underline{E}_2^1 & \underline{0} \\
2\underline{D}_{31}^{11} & 2\underline{D}_{32}^{11} & 2\underline{D}_{33}^{11} & 2\underline{D}_3^{12} & -2\underline{D}_3^{12} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_3^{1^T} & -\underline{A}_3^{1^T} & \underline{H}_{13}^{1^T} & \underline{H}_{23}^{1^T} & \underline{H}_{33}^{1^T} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} & \underline{E}_3^1 & \underline{0} \\
2\underline{D}_1^{21} & 2\underline{D}_2^{21} & 2\underline{D}_3^{21} & 2\underline{D}^{22} & -2\underline{D}^{22} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}^{2^T} & -\underline{A}^{2^T} & \underline{H}_1^{2^T} & \underline{H}_2^{2^T} & \underline{H}_3^{2^T} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{E}^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\underline{x}_1^1 \\ \underline{x}_2^1 \\ \underline{x}_3^1 \\ \underline{x}^{2+} \\ \underline{x}^{2-} \\ \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{\lambda}^+ \\ \underline{\lambda}^- \\ \underline{\xi}_1 \\ \underline{\xi}_2 \\ \underline{\xi}_3 \\ \underline{\eta}_1 \\ \underline{\eta}_2 \\ \underline{\eta}_3 \\ \underline{u}^1 \\ \underline{u}^2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\underline{b} \\ \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \\ \underline{g}_3 \\ -\underline{c}_1^1 \\ -\underline{c}_2^1 \\ -\underline{c}_3^1 \\ -\underline{c}^2
\end{bmatrix} \tag{2,30}$$

Uwzględniając warunki (2.29) oraz założenia poczynione na początku dowodu otrzymujemy, że zostało znalezione rozwiązanie optymalne następującego zadania:

Znaleźć minimum wyrażenia

$$z = \underbrace{[1,1,\ldots,1]}_{n_1\text{-współrz.}}\, \underline{u}^1 + \underbrace{[1,1,\ldots,1]}_{n-n_1\text{-współrz.}}\, \underline{u}^2$$

przy ograniczeniach

$$\underline{x}_1^1 \geq \underline{0},\ \underline{x}_3^1 \geq \underline{0},\ \underline{x}^{2+} \geq \underline{0},\ \underline{x}^{2-} \geq \underline{0},\ \underline{v}_1 \geq \underline{0},\ \underline{v}_3 \geq \underline{0},\ \underline{\lambda}^+ \geq \underline{0},\ \underline{\lambda}^- \geq \underline{0},\ \underline{\xi}_2 \geq \underline{0},$$
$$\underline{\xi}_3 \geq \underline{0},\ \underline{\eta}_2 \geq \underline{0},\ \underline{\eta}_3 \geq \underline{0},\ \underline{u}^1 \geq \underline{0},\ \underline{u}^2 \geq \underline{0} \qquad (2.31)$$

oraz przy ograniczeniach danych układem równań

$$\begin{bmatrix}
\underline{A}_1^1 & \underline{A}_3^1 & \underline{A}^2 & -\underline{A}^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{H}_{11}^1 & \underline{H}_{13}^1 & \underline{H}_1^2 & -\underline{H}_1^2 & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{H}_{21}^1 & \underline{H}_{23}^1 & \underline{H}_2^2 & -\underline{H}_2^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
\underline{H}_{31}^1 & \underline{H}_{33}^1 & \underline{H}_3^2 & -\underline{H}_3^2 & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
2\underline{D}_{11}^{11} & 2\underline{D}_{13}^{11} & 2\underline{D}_1^{12} & -2\underline{D}_1^{12} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_1^{1^T} & -\underline{A}_1^{1^T} & \underline{H}_{21}^1 & \underline{H}_{31}^1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{E}_1^1 & \underline{0} \\
2\underline{D}_{21}^{11} & 2\underline{D}_{23}^{11} & 2\underline{D}_2^{12} & -2\underline{D}_2^{12} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_2^{1^T} & -\underline{A}_2^{1^T} & \underline{H}_{22}^1 & \underline{H}_{32}^1 & -\underline{I} & \underline{0} & \underline{E}_2^1 & \underline{0} \\
2\underline{D}_{31}^{11} & 2\underline{D}_{33}^{11} & 2\underline{D}_3^{12} & -2\underline{D}_3^{12} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_3^{1^T} & -\underline{A}_3^{1^T} & \underline{H}_{23}^1 & \underline{H}_{33}^1 & \underline{0} & -\underline{I} & \underline{E}_3^1 & \underline{0} \\
2\underline{D}_1^{21} & 2\underline{D}_3^{21} & 2\underline{D}^{22} & -2\underline{D}^{22} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}^{2^T} & -\underline{A}^{2^T} & \underline{H}_2^2 & \underline{H}_3^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{E}^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\underline{x}_1^1 \\ \underline{x}_3^1 \\ \underline{x}^{2+} \\ \underline{x}^{2-} \\ \underline{v}_1 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{\lambda}^+ \\ \underline{\lambda}^- \\ \underline{\xi}_2 \\ \underline{\xi}_3 \\ \underline{\eta}_2 \\ \underline{\eta}_3 \\ \underline{u}^1 \\ \underline{u}^2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\underline{b} \\ \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \\ \underline{g}_3 \\ -\underline{c}_1^1 \\ -\underline{c}_2^1 \\ -\underline{c}_3^1 \\ -\underline{c}^2
\end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

W celu określenia wartości przyjmowanej przez funkcję (2.23) zbadamy rozwiązanie zadania dualnego [2] odpowiadającego zadaniu sformułowanemu zależnościami (2.23), (2.31), (2.32). Zadanie dualne będzie sformułowane następująco:

wyznaczyć maksimum wyrażenia

$$w = \underline{b}^T \underline{p} + \underline{g}_1^T \underline{s}_1 + \underline{g}_2^T \underline{s}_2 + \underline{g}_3^T \underline{s}_3 - \underline{c}_1^{1^T} \underline{t}_1 - \underline{c}_2^{1^T} \underline{t}_2 - \underline{c}_3^{1^T} \underline{t}_3 - \underline{c}^{2^T} \underline{r} \qquad (2.33)$$

przy ograniczeniach:

$$
\left.\begin{array}{llllllll}
\underline{A}_1^{1T}\underline{p}+\underline{H}_{11}^{1T}\underline{s}_1+\underline{H}_{21}^{1T}\underline{s}_2+\underline{H}_{31}^{1T}\underline{s}_3+2\underline{D}_{11}^{11T}\underline{t}_1+2\underline{D}_{21}^{11T}\underline{t}_2+2\underline{D}_{31}^{11T}\underline{t}_3+2\underline{D}_1^{21T}\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{A}_3^{1T}\underline{p}+\underline{H}_{13}^{1T}\underline{s}_1+\underline{H}_{23}^{1T}\underline{s}_2+\underline{H}_{33}^{1T}\underline{s}_3+2\underline{D}_{13}^{11T}\underline{t}_1+2\underline{D}_{23}^{11T}\underline{t}_2+2\underline{D}_{33}^{11T}\underline{t}_3+2\underline{D}_3^{21T}\underline{r} & \leqslant & \underline{0} \\
\underline{A}^{2T}\underline{p}+\underline{H}_1^{2T}\underline{s}_1+\underline{H}_2^{2T}\underline{s}_2+\underline{H}_3^{2T}\underline{s}_3+2\underline{D}_2^{12T}\underline{t}_1+2\underline{D}_2^{12T}\underline{t}_2+2\underline{D}_3^{12T}\underline{t}_3+2\underline{D}^{22T}\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{I}\,\underline{s}_1 & = & \underline{0} \\
\underline{I}\,\underline{s}_3 & \leqslant & \underline{0} \\
\underline{A}_1^1\underline{t}_1+\underline{A}_2^1\underline{t}_2+\underline{A}_3^1\underline{t}_3+\underline{A}^2\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{H}_{21}^1\underline{t}_1+\underline{H}_{22}^1\underline{t}_2+\underline{H}_{23}^1\underline{t}_3+\underline{H}_2^2\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{H}_{31}^1\underline{t}_1+\underline{H}_{32}^1\underline{t}_2+\underline{H}_{33}^1\underline{t}_3+\underline{H}_3^2\underline{r} & \leqslant & \underline{0} \\
-\underline{I}\,\underline{t}_2 & = & \underline{0} \\
-\underline{I}\,\underline{t}_3 & \leqslant & \underline{0} \\
\underline{E}_1^{1T}\underline{t}_1+\underline{E}_2^{1T}\underline{t}_2--\underline{E}_3^{1T}\underline{t}_3 & \leqslant & \underline{1} \\
\underline{E}^2\underline{r} & \leqslant & \underline{1}
\end{array}\right\} \qquad (2.34)
$$

Wykorzystano tu tzw. słabe twierdzenie o różnicach dopełniających [2]. Z czwartego, piątego, dziewiątego i dziesiątego wyrażenia układu (2.34) wynika odpowiednio, że

$$\underline{s}_1 = \underline{0}, \quad \underline{s}_3 \leqslant \underline{0}, \quad \underline{t}_2 = \underline{0}, \quad \underline{t}_3 \geqslant \underline{0}.$$

Na podstawie warunku $\underline{s}_1 = \underline{0}$ i $\underline{t}_2 = \underline{0}$ otrzymujemy następujący układ równań spełniony przez rozwiązanie dualne

$$
\left.\begin{array}{lll}
\underline{A}_1^{1T}\underline{p}+\underline{H}_{21}^{1T}\underline{s}_2+\underline{H}_{31}^{1T}\underline{s}_3+2\underline{D}_{11}^{11T}\underline{t}_1+2\underline{D}_{31}^{11T}\underline{t}_3+2\underline{B}_1^{21T}\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{A}_3^{1T}\underline{p}+\underline{H}_{23}^{1T}\underline{s}_2+\underline{H}_{33}^{1T}\underline{s}_3+2\underline{D}_{13}^{11T}\underline{t}_1+2\underline{D}_{33}^{11T}\underline{t}_3+2\underline{D}_3^{21T}\underline{r} & \leqslant & \underline{0} \\
\underline{A}^{2T}\underline{p}+\underline{H}_2^{2T}\underline{s}_2+\underline{H}_3^{2}\underline{s}_3+2\underline{D}_1^{12}\underline{t}_1+2\underline{D}_3^{12T}\underline{t}_3+2\underline{D}^{22T}\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{I}\,\underline{s}_3 & \leqslant & \underline{0} \\
\underline{A}_1^1\underline{t}_1+\underline{A}_3^1\underline{t}_3+\underline{A}^2\underline{r} & = & \underline{0} \\
\underline{H}_{21}^1\underline{t}_1+\underline{H}_{23}^1\underline{t}_3+\underline{H}_2^2\underline{r} & \leqslant & \underline{0}
\end{array}\right\} \qquad (2.35)
$$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{H}^1_{31}\underline{t}_1 + \underline{H}^1_{33}\,\underline{t}_3 + \underline{H}^2_3\,\underline{r} & \leqslant \underline{0} \\ -\underline{I}\;\underline{t}_3 & \leqslant \underline{0} \\ \underline{E}^1_1\,\underline{t}_1 + \underline{E}^1_3\,\underline{t}_3 & \leqslant \underline{1} \\ \underline{E}^2\,\underline{r} & \leqslant \end{array}\right\} \qquad (2.35)$$

Mnożąc pierwsze równanie układu (2.35) lewostronnie przez $\underline{t}_1^T$, drugie przez $\underline{t}_3^T$, trzecie przez $\underline{r}^T$ i dodając wyniki tych operacji otrzymuje się

$$(\underline{t}_1^T \underline{A}_1^{1^T} + \underline{t}_3^T \underline{A}_3^{1^T} + \underline{r}^T \underline{A}^{2^T})\,\underline{p} + (\underline{t}_1^T \underline{H}_{21}^{1^T} + \underline{t}_3^T \underline{H}_{23}^{1^T} + \underline{r}^T \underline{H}_2^{2^T})\underline{s}_2 +$$

$$+ (\underline{t}_1^T \underline{H}_{31}^{1^T} + \underline{t}_3^T \underline{H}_{33}^{1^T} + \underline{r}^T \underline{H}_3^{2^T})\underline{s}_3 + \left[\underline{t}_1^T\; \underline{t}_3^T\; \underline{r}^T\right] \begin{bmatrix} 2\underline{D}_{11}^{11^T} & 2\underline{D}_{31}^{11^T} & 2\underline{D}_1^{21^T} \\ 2\underline{D}_{13}^{11^T} & 2\underline{D}_{33}^{11^T} & 2\underline{D}_3^{21^T} \\ 2\underline{D}_1^{12^T} & 2\underline{D}_3^{12^T} & 2\underline{D}^{22^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \\ \underline{t}_3 \\ \underline{r} \end{bmatrix} \leqslant 0 \qquad (2.36)$$

Pierwszy i drugi składnik sumy (2.36) są równe zero. Czwarty składnik tej sumy przyjmuje wartości nieujemne, ponieważ macierz występująca w tym składniku jest (zgodnie z założeniem twierdzenia) istotnie dodatnio określona. Trzeci natomiast składnik sumy (2.36) też przyjmuje wartości nieujemne, gdyż $\underline{s}_3 \leqslant \underline{0}$ oraz

$$\underline{t}_1^T \underline{H}_{31}^{1^T} + \underline{t}_3^T \underline{H}_{33}^{1^T} + \underline{r}^T \underline{H}_3^{2^T} \leqslant \underline{0}$$

co wynika z siódmego równania układu (2.35).

Aby zależność (2.36) zachodziła, składowe $\underline{t}_1$, $\underline{t}_3$, $\underline{r}$ muszą być równe zeru. Otrzymujemy więc, że wartość funkcji celu, przy uwzględnieniu faktu, iż $\underline{s}_1 = \underline{0}$, $\underline{t}_2 = 0$, określona jest wyrażeniem:

$$w = \underline{b}^T \underline{p} + \underline{g}_2^T \underline{s}_2 + \underline{g}_3^T \underline{s}_3 \qquad (2.37)$$

Uwzględniając, że $\underline{t}_1$, $\underline{t}_3$, $\underline{r} = \underline{0}$ oraz mnożąc pierwsze równanie układu (2.35) przez $\underline{x}_1^{1^T}$ otrzymuje się

$$\underline{x}_1^{1^T} \underline{A}_1^{1^T} \underline{p} + \underline{x}_1^{1^T} \underline{H}_{21}^{1^T} \underline{s}_2 + \underline{x}_1^{1^T} \underline{H}_{31}^{1^T} \underline{s}_3 = 0 \qquad (2.38)$$

Podobnie, mnożąc trzecie równanie układu (2.35) oddzielnie przez $\underline{x}^{2^T}$ i $\underline{x}^{2-^T}$, otrzymuje się:

$$\underline{x}^{2-^T} \underline{A}^{2^T} \underline{p} + \underline{x}^{2+} \underline{H}_2^{2^T} \underline{s}_2 + \underline{x}^{2+} \underline{H}_3^{2^T} \underline{s}_3 = 0 \qquad (2.39)$$

$$-\underline{x}^{2-T}\,\underline{A}^{2T}\,\underline{p} - \underline{x}^{2-T}\,\underline{H}^{2T}\,\underline{s}_2 - \underline{x}^{2-T}\,\underline{H}_3^{2T}\,\underline{s}_3 = 0 \qquad (2.40)$$

Dodając równania (2.38), (2.39), (2.40) otrzymujemy, że

$$(\underline{x}_1^{1T}\,\underline{A}_1^{1T} + \underline{x}^{2+T}\,\underline{A}^{2T} - \underline{x}^{2-T}\,\underline{A}^{2T})\underline{p} + (\underline{x}_1^{1T}\,\underline{H}_{21}^{1T} + \underline{x}^{2+T}\,\underline{H}_2^{2T} - \underline{x}^{2-T}\,\underline{H}_2^{2T})\underline{s}_2 +$$

$$+ (\underline{x}_1^{1T}\,\underline{H}_{31}^{1T} + \underline{x}^{2+T}\,\underline{H}_3^{2T} - \underline{x}^{2-T}\,\underline{H}_3^{2T})\underline{s}_3 = 0 \qquad (2.41)$$

Na podstawie układu (2.32) oraz zależności $\underline{x}_3^1 = \underline{0}$, $\underline{v}_3 = \underline{0}$ wyrażenia w nawiasach w (2.41) są odpowiednio równe $\underline{b}^T$, $\underline{g}_2^T$, $\underline{g}_3^T$, a stąd wynika, że

$$\underline{b}^T\,\underline{p} + \underline{g}_2^T\,\underline{s}_2 + \underline{g}_3^T\,\underline{s}_3 = w = 0 \qquad (2.42)$$

Tak więc na podstawie twierdzenia o równości wartości optymalnych zadania prymalnego i dualnego [2] wynika

$$\underline{u}^1 = \underline{0}, \qquad \underline{u}^2 = \underline{0}$$

co oznacza, że otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym zadania programowania kwadratowego, na tym dowód się kończy.

3. Analiza efektywności algorytmu

Celem numerycznej realizacji zmodyfikowanego algorytmu Wolfe'a opracowano w języku FORTRAN podporgram WOLF. Podprogram rozwiązuje zadanie programowania kwadratowego, w którym mogą, lecz nie muszą występować ograniczenia równościowe, ograniczenia nierównościowe i ograniczenia na znak [5]. Dla zbadania efektywności opracowanego programu dokonano testowania tego programu dużą liczbą zadań programowania kwadratowego. Dla każdego z zadań badano, jak sformułowanie zadania wpływa na czas oraz wynik obliczeń. We wszystkich przebadanych przypadkach otrzymano tę samą wartość rozwiązania, niezależnie od sformułowania zadania. Dla zadań, w których naturalne jest sformułowanie w postaci ogólnej (wykorzystanie zmodyfikowanej postaci algorytmu Wolfe'a), uzyskano istotne skrócenie czasu obliczeń.

3.1. Przykład zapisu zadania programowania kwadratowego

W celu zilustrowania różnic w zapisie zadania programowania kwadratowego rozpatrzmy następujący przykład.

Niech dane jest zadanie sformułowane w postaci ogólnej:
znaleźć minimum funkcji

$$f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 4,25 \\ 3,0 \\ 2,5 \\ -1 \\ 1,5 \\ 3,5 \\ 1,85 \end{bmatrix} ; \quad x_1 \quad 0, \quad x_2 \geqslant 0 \tag{3.2}$$

To samo zadanie w wersji kanonicznej ma postać:
znaleźć minimum funkcji

$$f(x_1,\dots,x_9) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1,\dots,x_9 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_9 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,25 \\ 3 \\ 2,5 \\ -4 \\ 1,5 \\ 3,5 \\ 1,85 \end{bmatrix} ; \quad x_i \geqslant 0 \ (i=1,\dots,9) \tag{3.4}$$

Powyższy przykład ilustruje, że sformułowanie zadania w postaci ogólnej wymaga mniejszej liczby zmiennych oraz mniejszych wymiarów tablic.

3.2. Analiza wyników

Jak już wspomniano, zastosowanie zmodyfikowanej postaci algorytmu Wolfe'a pozwala na skrócenie czasu obliczeń. Dla przedstawionego w punkcie 3.1 przykładu uzyskano następujące wyniki i czas obliczeń:

W przypadku zadania określonego wzorami (3.1), (3.2) otrzymano

$x_1 = 1,25; \quad x_2 = 4,25; \quad f(x_1,x_2) = -5,16944$ (minimum);

czas obliczeń - 8 sek.

W przypadku zadania określonego wzorami (3.3), (3.4) otrzymano

$x_1 = 1,25; \quad x_2 = 4,25; \quad x_3 = 0,75; \quad x_4 = 4,5; \quad x_5 = 8,25; \quad x_6 = 10,75;$

$x_7 = 9,25; \quad x_8 = 0; \quad x_9 = 0; \quad f(x_1,\dots,x_9) = -5.16944$ (minimum);

czas obliczeń - 17 sek.

Uzyskano więc identyczne rozwiązanie przy istotnym skróceniu czasu obliczeń.

Skrócenie czasu obliczeń, dzięki zastosowaniu zmodyfikowanej postaci algorytmu Wolfe'a, wynika:

1) ze zmniejszenia liczba wierszy w tablicy SIMPLEKS; sformułowanie w postaci kanonicznej wymaga wprowadzenia k zmiennych uzupełniających (k - liczba ograniczeń nierównościowych). Liczba wierszy w tablicy SIMPLEKS dla postaci kanonicznej jest więc o k wierszy większa. Ponieważ dane empiryczne wskazują, że liczba iteracji jest proporcjonalna do liczby wierszy tablicy SIMPLEKS [2], stąd uzyskuje się skrócenie czasu obliczeń;

2) ze zmniejszenia czasu koniecznego na poszczególne iteracje wskutek zmniejszenia wielkości przetwarzanej tablicy.

Dla zilustrowania różnic w wielkości przetwarzanej tablicy SIMPLEKS dokonajmy porównania rozmiarów tej tablicy w przypadku postaci kanonicznej i zmodyfikowanej.

Oznaczmy przez w_z, k_z, w_k, k_k liczby wierszy i kolumn odpowiednio dla postaci zmodyfikowanej i postaci kanonicznej. Biorąc pod uwagę wzory (2.24) i (I - IX) otrzymamy

$$w_z = m+k+n$$
$$w_k = m+k+n+k+n_1$$
$$k_z = n+n_1+k+m+m+k+n-n_1+n$$
$$k_k = n+n_1+k+m+k+m+k+n+n_1+k+n+k+n_1$$

Obliczmy różnice

$$w_k - w_z = k+n_1 \tag{3.5}$$

$$k_k - k_z = 3k+3n_1 \tag{3.6}$$

Obliczone wartości (3.5), (3.6) wskazują, iż w przypadku postaci kanonicznej liczba wierszy i liczba kolumn są większe odpowiednio o $(k+n_1)$ i $(3k+3n_1)$ niż w przypadku postaci zmodyfikowanej.

Zastosowanie przedstawionej modyfikacji pozwala nie tylko na zmniejszenie obszaru pamięci przeznaczonego na zapamiętanie tablicy SIMPLEKS, ale także na zmniejszenie obszaru pamięci przeznaczonego dla macierzy definiujących zadanie programowania kwadratowego. Dla przypadku ogólnego zadania programowania kwadratowego konieczny obszar pamięci przeznaczonej na zapamiętanie tych macierzy przy zastosowaniu modyfikacji oraz bez stosowania modyfikacji (postać kanoniczna) został przedstawiony w tablicy.

Macierz	Zadanie bez modyfikacji	Zadanie z modyfikacją
$\underline{A}$	$(m+k)(n+k+n_d)$	mn
$\underline{b}$	m+k	m
$\underline{H}$	-	kn
$\underline{g}$	-	k
$\underline{D}$	$(n+k+n_d)^2$	n^2
c	$n+k+n_d$	n

Obliczając różnicę pomiędzy rozpatrywanymi obszarami pamięci otrzymuje się:

$$\Delta = mk+mn_d+2kn+2kn+2nn_d+n_d^2+n_d \quad ^{x)}$$

Bez modyfikacji obszar pamięci przeznaczonej na dane jest więc o Δ większy niż z modyfikacją.

Znaczne zmniejszenie obszaru pamięci (mniejszy rozmiar zadania programowania kwadratowego), jak również zmniejszenie czasu obliczeń uzasadniają słuszność stosowania zmodyfikowanego algorytmu Wolfe'a. Należy dodać, iż istnieją w programowaniu liniowym metody pozwalające na jeszcze bardziej zwarte przedstawienie tablicy SIMPLEKS [9], [10], [11], [12]. Stosując je, można nie dokonywać rozkładów typu $z=z^+-z^-$. W algorytmie typu Wolfe'a można by dzięki tym metodom doprowadzić do zmniejszenia tablicy SIMPLEKS do rozmiarów $(m+k+n).(m+k+n)$. Obszar pamięci operacyjnej przeznaczony na przechowanie danych uległy wtedy jeszcze pomniejszeniu. Niewspółmiernie jednak wydłuża się czas obliczeń ze względu na znaczne powiększenie się w programie liczby instrukcji niezbędnych do zrealizowania wspomnianych al-

x) $n_d=n-n_1$, gdzie: n, n_1 oraz k, m, n zdefiniowano wzorami (I - IX) w rozdziale 2.

gorytmów. Proponowany w pracy algorytm uwzględnia więc jedynie te elementy modyfikacji, które pozwalają na maksymalne zmniejszenie obszaru pamięci operacyjnej przy jednoczesnym zmniejszeniu czasu obliczeń.

LITERATURA

[1] Hadley: Nielinie jnoje i dinamiczeskoje programirowanije. Moskwa 1974.

[2] Simmonard M.: Programowanie liniowe. PWN, Warszawa 1977.

[3] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, Warszawa 1977.

[4] Caron M.D., Culman C.D., Polak E.: Sterowanie optymalne i programowanie matematyczne. WNT, Warszawa 1975.

[5] Zangwill W.I.: Programowanie nieliniowe. WNT, Warszawa 1974.

[6] Kulikowski R.: Sterowanie w wielkich systemach. WNT, Warszawa 1970.

[7] Gass S.: Programowanie liniowe. PWN, Warszawa 1977.

[8] Skowronek M., Serafin D.: Opis programu WOLF. Ośrodek ETO Politechnika Śląska (niepublikowane).

[9] Bernau J.: Upper bound technique for quadratic programing. Surrey of Mathematical Proceedings of the IX International Mathematical Programming Syposium. Budapest 1976.

[10] Kryńska G.: Raport IBS PAN MPD 24/78. Warszawa 1978.

[11] Hille G.: Matematyka stosowana. Warszawa 1978.

[12] Zoutendijk G.: Mathematical Programming Methods North Holland. Amsterdam 1976.

Recenzent: Dr inż. Maciej Bargielski

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ВОЛЬФА

Р е з ю м е

В работе представлено модификацию алгоритма Вольфа решения задачи квадратического программирования. Эта модификация позволяет сократить время вычислений на ЭВМ и уменьшить область данных оперативной памяти. Примеры вычислений представленные в работе указывают на целисообразность применения предлагаемой модификации.

A MODIFICATION OF WOLFE'S METHOD

S u m m a r y

In this paper we present a modification of the Wolfe's method for solution of the quadratic problem. This modification allows for computation

time shortening and reducing the memory requirements. Results has been described in the final section of the paper. The modification proposed is very efficient for the considered class of problems.