ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: ELEKTRYKA z. 51 Nr kol. 457

Marian Pasko
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ANALIZA PARAMETRYCZNEJ CZUŁOŚCI WĄSKOPASMOWEGO FILTRU RC Z ZASTOSOWANIEM WZMACNIACZA OPERACYJNEGO

Streszczenie. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie zagadnień związanych z czułością dla przyjętego modelu syntezy z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego.
Zagadnienie czułości jest ważnym kryterium przydatności danej metody do praktycznych realizacji.

Jednym z bardzo ważnych zadań jakie stawia się w syntezie układów aktywnych jest wybór odpowiedniej struktury oraz odpowiedniego elementu aktywnego celem zrealizowania zadanej funkcji. Wśród licznych elementów aktywnych na szczególną uwagę zasługują metody syntezy z wykorzystaniem żyratora, konwertora impedancji ujemnej oraz wzmacniacza operacyjnego. Jednym z kryteriów wyboru metody może być ocena czułości.
Zadaniem przedstawionej pracy jest realizacja filtru wąskopasmowego o żądanej dobroci Q przy zastosowaniu wzmacniacza operacyjnego oraz analiza czułości na zmiany wszystkich elementów formujących amplitudowo-częstotliwościową charakterystykę filtru.

Syntetyzowaną funkcję przejścia aktywnego RC filtru z zespolonymi biegunami można przedstawić w formie

$$K(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \tag{1}$$

gdzie

$$s = \sigma + j\omega$$

Aby móc zadaną funkcję przejścia syntetyzować w oparciu o elementy RC należy mianownik rozłożyć na sumę lub różnicę dwóch wielomianów z zerami rzeczywistymi ujemnymi w zależności od przyjętego elementu aktywnego [1]; [4]. W syntezie aktywnych RC filtrów z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego według tzw. uogólnionej metody Kuha [4], mianownik rozkłada się na sumę dwóch wielomianów, tak aby jeden zawierał zera rzeczywiste, a drugi tylko urojone [5]; [7].

Celem zminimalizowania czułości na zmianę współczynnika wzmocnienia k należy zoptymalizować rozkład. Rozpatrzmy napięciową funkcję przejścia filtru wąskopasmowego postaci

$$K_u(s) = \frac{Hs}{s^2 + 2\xi_o s + \omega_o^2} = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2}$$

Dobroć funkcji przejścia określona jest zależnością [3]

$$Q = \frac{\omega_o}{2\xi_o}, \tag{3}$$

gdzie:

ω_o – częstotliwość środkowa filtru,

ξ_o – współczynnik tłumienia.

Przedstawiając mianownik funkcji przejścia w postaci sumy dwóch wielomianów otrzymujemy

$$D(s) = s^2 + 2\xi_o s + \omega_o^2 = A(s) + kB(s) \tag{4}$$

Zakładając, że

$$A(s) = A_o(s+a_1)(s+a_2)$$

$$B(s) = s^2 + \omega_o^2$$

otrzymujemy

$$s^2 + 2\xi_o s + \omega_o^2 = (A_o+k)s^2 + A_o(a_1+a_2)s + A_o a_1 a_2 + k\omega_o^2 \tag{5}$$

stąd

$$\begin{aligned} A_o + k &= 1 \\ A_o(a_1+a_2) &= 2\xi_o \\ A_o a_1 a_2 + k\omega_o^2 &= \omega_o^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Wyliczając a_1, a_2 otrzymujemy

$$a_{1,2} = \frac{2\zeta_o}{A_o} \pm \sqrt{\frac{\zeta_o^2}{A_o^2} + \frac{A_o\,\omega_o^2(k-1)}{A_o^2}} \tag{7}$$

aby jednak a_2 było rzeczywiste, wówczas

$$\frac{\zeta_o^2}{A_o^2} + \frac{A_o\,\omega_o^2(k-1)}{A_o^2} \geqslant 0$$

stąd

$$k \geqslant 1 - \frac{\zeta_o}{\omega_o}$$

ponadto $a_2 > 0$ więc $k < 1$.
Czyli ostatecznie

$$1 - \frac{\zeta_o}{\omega_o} \leqslant k < 1 \tag{8}$$

Minimalną czułość na zmiany współczynnika k otrzymuje się dla

$$k = 1 - \frac{\zeta_o}{\omega_o}$$

i wówczas

$$A_o = \frac{\zeta_o}{\omega_o}; \quad a_1 = a_2 = \omega_o.$$

Otrzymany w ten sposób rozkład będzie rozkładem optymalnym. Wielomian $D(s)$ przyjmuje wówczas postać

$$D(s) = \frac{\zeta_o}{\omega_o}(s + \omega_o)^2 + \left(1 - \frac{\zeta_o}{\omega_o}\right)(s^2 + \omega_o^2) \tag{9}$$

natomiast dobroć Q dla rozkładu optymalnego ma postać

$$Q = \frac{A_o + k}{2A_o}$$

stąd czułość

$$S_k^Q \stackrel{df}{=} \frac{dQ}{Q} \cdot \frac{k}{dk} = -\left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \tag{10}$$

$$S_{A_o}^Q = 1 - \frac{1}{2Q} \tag{11}$$

$$S_{\sum x_i}^Q \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^Q\right| = 2\left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \tag{12}$$

Tak zdefiniowana sumaryczna czułość jest najbardziej "pesymistyczną czułością". Tak zdefiniowana czułość na zmiany parametrów rozłożenia wielomianu pozwala na określenie wypadkowej czułości bez odnoszenia się do konkretnego schematu. Wpływ natomiast zmian współczynnika wzmocnienia elementu aktywnego na charakterystykę filtru można ocenić poprzez zmiany modułu mianownika funkcji przejścia dla częstotliwości $s = j\omega$. Do określenia tych zmian można skorzystać z modułowej czułości zdefiniowanej w następujący sposób [2], [6].

$$S_k^{|D(j\omega)|} = \frac{d|D(j\omega)|}{|D(j\omega)|} \cdot \frac{k}{dk} \tag{13}$$

Relację (13) można jednak sprowadzić do prostszej postaci, korzystając z następujących zależności

$$D(j\omega) = |D(j\omega)|\ e^{j\arg D(j\omega)} \tag{14}$$

$$S_k^{D(j\omega)} = S_k^{|D(j\omega)|} + j\ S_k^{\arg D(j\omega)} \tag{15}$$

wykorzystując, że dla relacji (4)

$$S_k^{D(j\omega)} = \frac{kB(j\omega)}{D(j\omega)} \tag{16}$$

otrzymujemy ostatecznie, że

$$S_k^{|D(j\omega)|} = \mathrm{Re}\left\{\frac{kB(j\omega)}{D(j\omega)}\right\} \tag{17}$$

Korzystając z zależności (17) oraz z zależności (9) otrzymujemy

$$S_k^{|D(j\omega)|} = \mathrm{Re}\left\{ \left(1 - \frac{\xi_o}{\omega_o}\right) \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)(\omega_o^2 - \omega^2 - 2j\xi_o\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_o^2\omega^2} \right\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_o^2\omega^2} \tag{18}$$

Wyrażenie to przyjmuje wartość maksymalną dla

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_o$$

i wynosi dla $Q \gg 1$

$$\left(S_k^{|D(j\omega)|}\right)_{max} = \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \frac{Q^2}{Q^2 + 2} \cong 1 - \frac{1}{2Q} \tag{19}$$

Z zależności (19) wynika, że $S_k^{|D(j\omega)|}$ jest stosunkowo małe przy zmianach współczynnika k. O wiele większy wpływ mają natomiast w metodzie Kuha zmiany zer czwórnika sprzężenia zwrotnego.

Wpływ tych zer można ocenić poprzez modułową czułość wielomianu $D(j\omega)$ na zmianę pierwiastków czwórnika sprzężenia zwrotnego.

Wspomniana czułość ma postać

$$S_\alpha^{|D(j\omega)|} = \frac{d\,|D(j\omega)|}{d\alpha} \cdot \frac{\alpha}{|D(j\omega)|} = \frac{2\omega_o(\omega_o - \xi_o)(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_o^2\omega^2}, \tag{20}$$

gdzie $\alpha = \omega_o$ jest pierwiastkiem wielomianu B(s), przy założeniu, że $\omega_o \gg \xi_o$ co jest słuszne w filtrach wąskopasmowych.

Wyrażenie (20) przyjmuje wartość maksymalną, wynoszącą Q dla $\omega = \sqrt{\omega_o(\omega_o - 2\xi_o)}$.

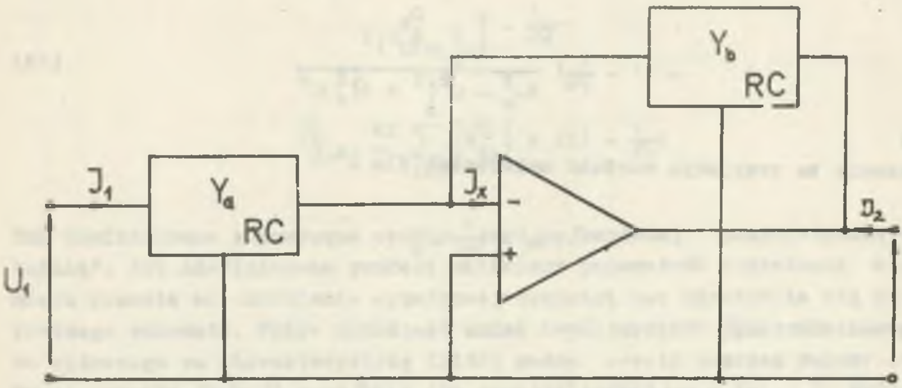
Podsumowując widzimy, że:

$$S_{\sum x_i}^{Q} = 2\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$$

$$S_k^{|D(j\omega)|} = 1 - \frac{1}{2Q}$$

$$S_{\alpha = \omega_o}^{|D(j\omega)|} = Q$$

Z tych zależności wynika, że najbardziej wrażliwym elementem jest czwórnik sprzężenia zwrotnego, a przede wszystkim niestałość jego zer. Realizacja filtru pasmowego z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego według uogólnionej struktury Kuha przedstawiona jest na rys. 1.



Rys. 1

Zakładając, że $J_x = 0$ otrzymujemy

$$K_u(s) = -\frac{y_{21a}}{y_{12b} - \frac{y_{11b} + y_{22a}}{k}} \tag{21}$$

jeżeli $k \to \infty$ wówczas

$$K_u(s) = -\frac{y_{21a}}{y_{12b}}, \tag{22}$$

gdzie:

y_{21a}, y_{12b} - są admitancjami zwarciowymi czwórników Y_a; Y_b.

Wykorzystując optymalne rozłożenie mianownika wyrażenia (2) oraz wybierając pomocniczy wielomian $q(s) = \lambda(s + \omega_o)$ otrzymujemy

$$K_u(s) = \frac{\frac{Hs}{\lambda(s+\omega_o)}}{\frac{\xi_o}{\lambda\,\omega_o}(s+\omega_o) + \frac{1 - \frac{\xi_o}{\omega_o}}{\lambda}\cdot\frac{s^2+\omega_o^2}{s+\omega_o}} = -\frac{y_{21a}}{y_{12b}} = -\frac{y_{21a}}{y_{12b}' + y_{12b}''} \tag{23}$$

gdzie:

$$-y_{12b}' = \left(1 - \frac{\xi_o}{\omega_o}\right)\frac{s^2 + \omega_o^2}{\lambda(s + \omega_o)}; \qquad -y_{12b}'' = \frac{\xi_o}{\lambda\,\omega_o}(s + \omega_o)$$

Układem, który pozwala na realizację zer urojonych admitancji przejściowej y_{12b}' jest czwórnik selektywny kształtu 2T, dla którego

$$-y_{12} = \frac{C}{2}\,\frac{s^2 + \left(\frac{G}{C}\right)^2}{s + \frac{G}{C}} = \frac{C}{2}\,\frac{s^2 + \omega_o^2}{s + \omega_o} \tag{24}$$

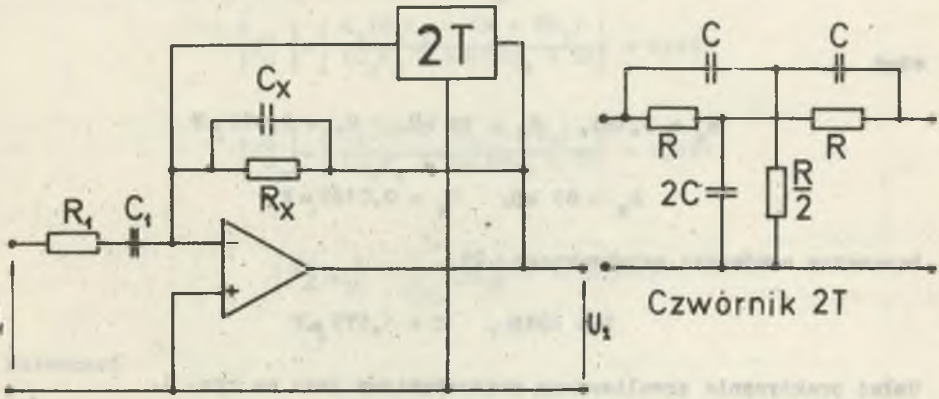
Wobec czego mianownik wyrażenia (23) może być zrealizowany jako równoległe połączenie czwórnika 2T i admitancji przejściowej spełniającej zależność

$$-y_{12b}'' = \frac{\xi_o}{\lambda\,\omega_o}(s + \omega_o)$$

natomiast licznik może być zrealizowany poprzez czwórnik o admitancji przejściowej

$$y_{21a} = \frac{Hs}{\lambda(s + \omega_o)} \tag{25}$$

Stąd struktura ma postać przedstawioną na rys. 2.



Rys. 2

Napięciowa funkcja przejścia dla schematu podanego na rys. 2 ma postać (przy założeniu, że $R_1C_1 = RC$, gdzie R i C elementy czwórnika 2T)

$$K_u(s) = \frac{\frac{s}{R_1}}{s^2(C_x + \frac{C}{2}) + s(\frac{1}{R_x} + \frac{C_x}{CR}) + \frac{1}{R_xRC} + \frac{1}{2R^2C}} = \frac{Hs}{s^2 + 2\xi_o s + \omega_o^2} \tag{26}$$

gdzie:

$$\omega_o^2 = \frac{2R + R_x}{R^2R_xC(2C_x + C)} \tag{27}$$

$$\xi_o = \frac{CR + C_xR_x}{R_xRC(2C_x + C)}$$

$$H = \frac{2}{R_1(2C_x + C)}$$

<u>Przykład realizacji praktycznej oraz wnioski</u>

Przykładem takiego właśnie postępowania jest praktyczna realizacja filtru wąskopasmowego o następujących danych

$$f_o = 200\ \text{Hz},\quad Q = \frac{\omega_o}{2\xi_o} = 40,\quad \lambda = 10^5,\quad H = 100$$

stąd

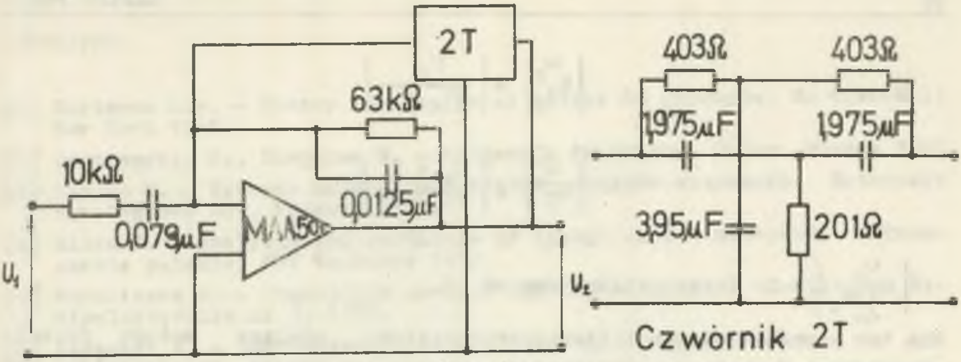
$$H_o = 3{,}184,\quad R_1 = 10\ \text{k}\Omega,\quad C_1 = 0{,}079\ \mu\text{F}$$

$$R_x = 63\ \text{k}\Omega,\quad C_x = 0{,}0125\ \mu\text{F}$$

Parametry czwórnika selektywnego 2T

$$R = 403\Omega,\quad C = 1{,}975\ \mu\text{F}$$

Układ praktycznie zrealizowany przedstawiony jest na rys. 3.



Rys. 3

Do praktycznej realizacji został użyty wzmacniacz operacyjny MAA 501, elementy pasywne były dobierane z dokładnością ± 1%. Określając sumaryczną czułość dobroci na zmiany wszystkich parametrów otrzymano:

$$Q = \frac{\sqrt{(2R + R_x)CR_x(2C_x + C)}}{2(CR + C_xR_x)}$$

$$\left|S_R^Q\right| = \left|\frac{R(C_xR_x - CR - CR_x)}{(2R + R_x)(CR + C_xR_x)}\right| = 0,496$$

$$\left|S_{R_x}^Q\right| = \left|\frac{R(CR - C_xR_x - CR_x)}{(2R + R_x)(CR + C_xR_x)}\right| = 0,496$$

$$\left|S_C^Q\right| = \left|\frac{C_x(C_xR_x - CR + CR_x)}{(C_xR_x + CR)(2C_x + C)}\right| = 0,491$$

$$\left|S_{C_x}^Q\right| = \left|\frac{C_x(CR - CR_x - CR_x)}{(C_xR_x + CR)(2C_x + C)}\right| = 0,491$$

$$\left|S_{\sum x_i}^Q\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|S_{x_i}^Q\right| = 1,874 < 2$$

Natomiast

$$\left|S_R^{\omega_0}\right| = \left|\frac{R + R_x}{2R + R_x}\right|$$

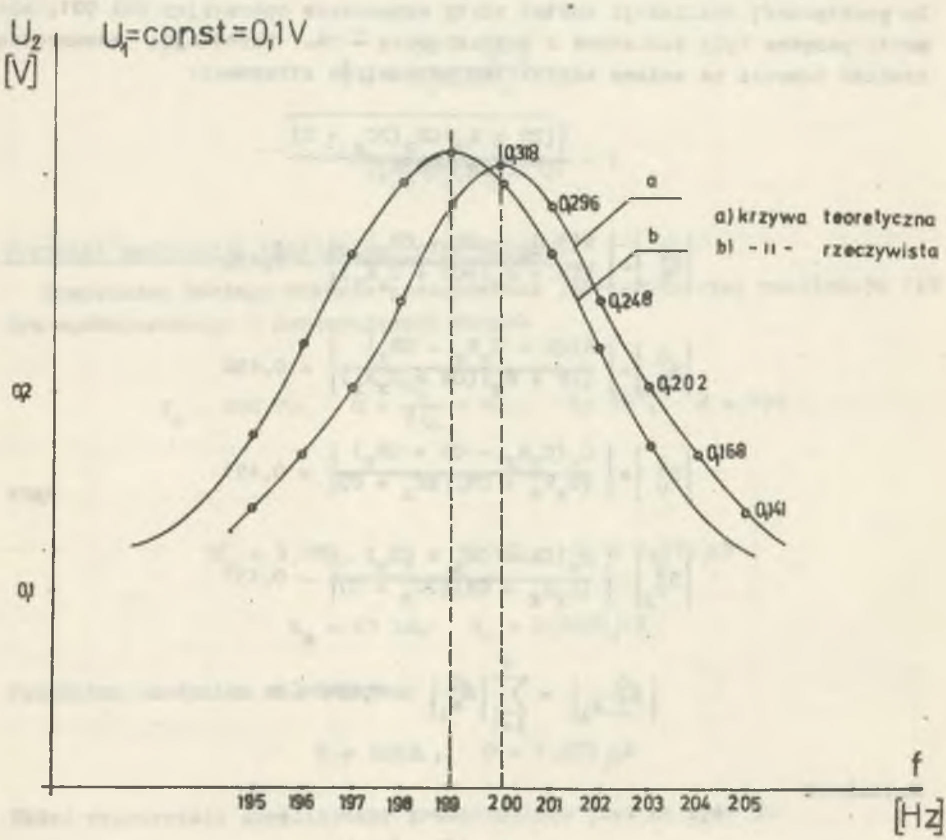
$$\left|S_{R_x}^{\omega_0}\right| = \left|\frac{R}{2R + R_x}\right|$$

$$\left| S_{C_x}^{\omega_o} \right| = \left| \frac{C_x}{2C_x + C} \right|$$

$$\left| S_{C}^{\omega_o} \right| = \left| \frac{C_x + C}{2C_x + C} \right|$$

$\left| S_{\sum x_1}^{\omega_o} \right| = 2$ i jest niezależna od Q.

Dla tak skonstruowanego filtru przeprowadzono pomiary modułu funkcji przejścia w funkcji częstotliwości, a otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

Z przeprowadzonych pomiarów widać dużą zgodność z przewidywaniami teoretycznymi.

LITERATURA

[1] Huelsman L.P. - Theory and Design of Active RC Circuits. Mc Graw-Hill New York 1968.

[2] Znamienskij E., Tiepliuk N. - Aktiwnyje RC filtry. Swjaz. Moskwa 1970

[3] Białko M. - Wybrane zagadnienia syntezy układów aktywnych. Materiały szkoleniowe NOT, Warszawa 1971.

[4] Mitra S. - Analysis and synthesis of linear active networks. (Tłumaczenie polskie) WNT Warszawa 1974.

[5] Worobienko P. - Srawnienie metodow sinteza aktiwnych RC-filtrow. Radioelektronika nr 7, 1970.

[6] Kałachan A. - Sowriemiennyj sintez ciepiej. Energia 1966.

[7] Hakim S. - Synthesis of RC active filtres with prescribed pole sensitivity. Proc. IEE, vol. 112, nr 12, 1965.

Przyjęto do druku w marcu 1975 r.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ УЗКОПОЛОСНОГО ФИЛЬТРА
С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННОГО УСИЛИТЕЛЯ

Р е з ю м е

Целью настоящей работы является представление проблем, связанных с чувствительностью определенной модели синтеза с применением операционного усилителя.

Проблема чувствительности является важным критерием пригодности данного метода для практического применения.

ANALYSIS OF PARAMETRIC SENSITIVITY OF NARROW-BAND
RC FILTER WITH OPERATIONAL AMPLIFIER

S u m m a r y

The paper deals with the problems connected with the sensitivity for the synthesis with the use of operational amplifier.

Sensitivity is one of the important criteria of the usefulness of the method for the practical purposes.