ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

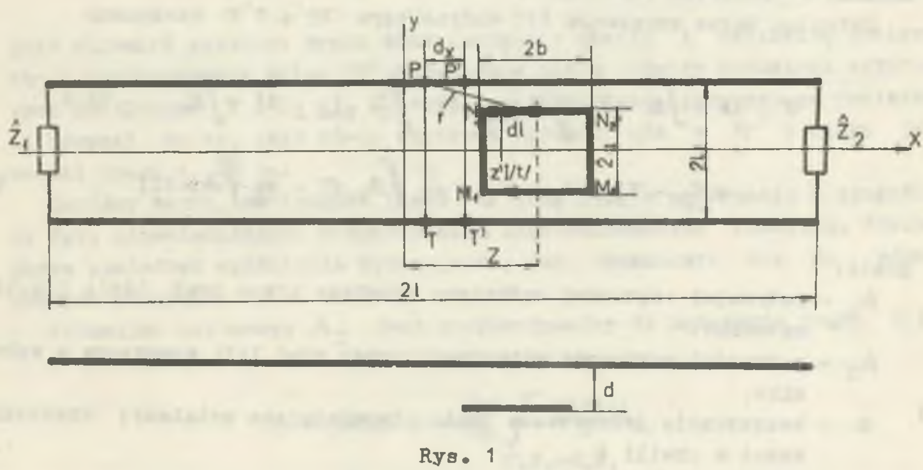
Seria: ELEKTRYKA z. 51 Nr kol. 457

Romuald Dusza
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

BEZPRZEWODOWY PRZESYŁ INFORMACJI W WARUNKACH SILNEGO TŁUMIENIA SYGNAŁU

Streszczenie. Bazując na pewnych założeniach upraszczających skonstruowano model matematyczny układu linia długa-wzbudnik w postaci ramy prostokątnej zajmującej zmienne położenie wzdłuż linii. Przedstawione związki podają zależność między napięcie na końcu linii, a prądem płynącym w wzbudniku.

Dana jest linia długa dwuprzewodowa o długości 2 l i odległości między przewodami 2 l_1, której obydwa końce obciążone są odpowiednio impedancjami Z_1 i Z_2. Wzdłuż osi linii przemieszcza się wzbudnik w postaci ramy o wymiarach 2a x 2b, w którym wymuszony jest prąd sinusoidalny o wartości skutecznej I oraz pulsacji $\omega = 2\pi f$. Abstrahując od realizacji technicznej wymuszenia prądu założymy, że do wzbudnika ramowego włączona jest idealna SPM I(t) sinusoidalna o wartości skutecznej I i pulsacji $\omega = 2\pi f$.



Rys. 1

Zastosujemy teraz uogólnione prawo Ohma i prawo zachowania ładunku do elementu dx rozpatrywanej linii.

Niech i(x,t) jest natężeniem prądu w P w chwili t. Uwzględniając symetrię układu natężenia prądu w T będzie - i(x,t). Oznaczmy przez u(x,t) różnicę potencjałów opóźnionych V_P i V_T w punktach P i T. Jeżeli **E** jest uogólnionym polem elektrycznym w P, to prawo Ohma zapisane dla elementu dl przewodnika ma postać

$$\frac{i\,dl}{\gamma S} = \mathbf{E}\,dl, \tag{1}$$

gdzie:

S - przekrój drutu, zaś

γ - konduktywność właściwa.

Zgodnie z definicją uogólnionego pola elektrycznego (1)

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\ V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{2}$$

gdzie:

V - potencjał opóźniony skalarny,

A - potencjał opóźniony wektorowy.

Pierwszy składnik definicji (2) oznaczamy przez $\mathbf{E}_{stat} = -\text{grad}\ V$ i nazywamy go natężeniem pola elektrostatycznego natomiast drugi składnik oznaczamy przez $\mathbf{E}_{ind} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ i nazywamy natężeniem pola elektrycznego indukcji. Pole elektryczne indukcji $\mathbf{E}_{ind}$ w rozpatrywanym układzie posiada dwie składowe a mianowicie $\mathbf{E}_{ind\ i}$ oraz $\mathbf{E}_{ind\ I}$ przy czym pierwszą z nich wywołuje prąd i(x,t) linii natomiast drugą wywołuje prąd I(t) wymuszony w wzbudniku ramowym.

Całkując teraz wyrażenie (1) wzdłuż toru PP' + T'T otrzymamy

$$R\ i\ dx = \int \mathbf{E}\,dl = \int \mathbf{E}_{stat}\,dl + \int \mathbf{E}_{ind\ i}\,dl + \int \mathbf{E}_{ind\ I}\,dl =$$

$$= V_P - V_{P'} + V_{T'} + V_T - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{A}_i\,dl - \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{A}_I\,dl; \tag{3}$$

gdzie:

$\mathbf{A}_i$ - potencjał wektorowy opóźniony wywołany przez prąd linii i(x,t), natomiast

$\mathbf{A}_I$ - potencjał wektorowy wytworzony przez prąd I(t) wymuszony w wzbudniku,

R - rezystancja jednostkowa linii odpowiadająca ustalonej częstotliwości w chwili t

$$V_P - V_T = u(x,t) \tag{4}$$

$$V_{P'} - V_{T'} = u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dx. \tag{5}$$

Jeżeli punkt P leży dostatecznie daleko od obydwóch końców linii to pole $E_{ind\ i} = -\frac{\partial A_i}{\partial t}$ ma tylko składową wzdłuż linii. Można więc całkę liniową wzdłuż toru $PP' + T'T$ $\int E_{ind\ i}\, dl$ zastąpić całką rozciągniętą na kontur zamknięty $PP'T'TP$. Zgodnie z twierdzeniem Stokesa całka

$$\oint\limits_{PP'T'TP} E_{in\,d}\, dl = -\frac{\partial}{\partial t}\oint\limits_{PP'T'TP} A_i\, dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{PP'T'TP}} (\mathrm{rot}\, A_i)\, n\, ds = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \tag{6}$$

jest równa strumieniowi pola indukcji magnetycznej przepływającego przez kontur w jednostce czasu.
Równanie (3) można teraz zapisać w postaci:

$$R\, i dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{PP'+T'T} A_I\, dl \tag{7}$$

W równaniu tym drugi składnik po prawej stronie stanowi wymuszenie pochodzenia zewnętrznego w stosunku do linii.

Na mocy prawa zachowania ładunku dla odcinka dx jednego z drutów np. PP' możemy napisać

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gu = -\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}, \tag{8}$$

gdyż strumień gęstości prądu opuszczający w chwili t całkowitą powierzchnię ograniczającą walec PP' składający się z różnicy strumieni dotyczących przekrojów P i P' tj. $\frac{\partial i}{\partial x}$ dx oraz strumienia dotyczącego powierzchni bocznej Gu dx, jest równy ubytkowi ładunku qdx w PP' w ciągu jednostki czasu o $\frac{\partial q}{\partial t}$ dx.

Załóżmy teraz, że długość linii l jest mała w porównaniu z długościami fal, odpowiadającymi rozpatrywanym częstotliwościom roboczym. Wówczas można zaniedbać opóźnienie potencjałów, tzn. ograniczyć się do stanów quasiustalonych.

Potencjał wektorowy A_I jest proporcjonalny do natężenia prądu I(t)

$$A_I(x,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{N_1N_2+M_2M_1} \frac{I(t)\,dl}{r}, \tag{9}$$

gdzie r - jest odległością między ustalonym punktem wzdłuż przewodów linii o współrzędnej x a zmiennym punktem wzdłuż boków ramy N_1N_2 i M_1M_2 równoległych do linii o współrzędnej z', ze względu na które odbywa się całkowanie.

W przypadku, gdy rozpatrywany punkt P jest dostatecznie odległy od końców linii to ϕ_i reprezentuje strumień magnetyczny proporcjonalny do i(x,t) i równa się Lidx, gdzie L - współczynnik samoindukcji przypadający na jednostkę długości linii. Różnica potencjałów skalarnych jest proporcjonalna do ładunku q i równa się $\frac{q}{C}$, gdzie C - pojemność jednostkowa linii.

Po tych założeniach upraszczających możemy napisać równania (7) (8) w postaci

$$L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R\, i(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_I(x,z,t)}{\partial t} \tag{10}$$

$$C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + G\, u(x,t) = -\frac{\partial i}{\partial x}, \tag{11}$$

gdzie:

A_I - jest potencjałem wektorowym wywołanym wzdłuż linii przez wymuszony prąd w wzbudniku ramowym.

Dla ustalonego z przebadajmy zachowanie się potencjału wektorowego $A_I(x,z,t)$ ze względu na zmienną x odmierzoną wzdłuż linii. Na mocy wzoru (9) mamy

$$A_I(x,z,t) = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi}\int_{z-b}^{z+b}\frac{dz'}{\sqrt{(x-z')^2+(l_1-a)^2+d^2}} - \int_{z-b}^{z+a}\frac{dz'}{\sqrt{(x-z')^2+(l_1+a)^2+d^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi}\ln\left|\frac{\left[(x-z+b)+\sqrt{(x-z+b)^2+(l_1-a)^2+d^2}\right]\left[(x-z+b)+\sqrt{(x-z+b)^2+(l_1+a)^2+d^2}\right]}{\left[(x-z-b)+\sqrt{(x-z-b)^2+(l_1-a)^2+d^2}\right]\left[(x-z-b)+\sqrt{(x-z-b)^2+(l_1+a)^2+d^2}\right]}\right|, \tag{12}$$

gdzie $I(t) = I_m \sin\omega t$.

Wzór (11) można zapisać w postaci

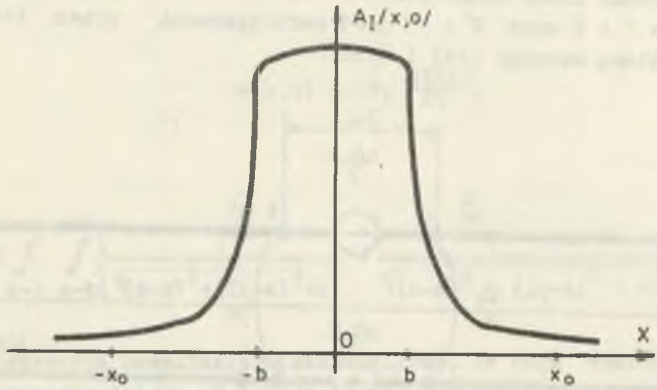
$$A_I(x,z,t) = A_I(x,z)\sin\omega t.$$

Widzimy więc, że dla dowolnego x potencjał A_I jest w fazie z prądem I(t). Jest to wynikiem zaniechania opóźnienia potencjałów. Wykres funkcji $A_I(x,z)$ dla z=0 ma postać przedstawioną na rys. 2.

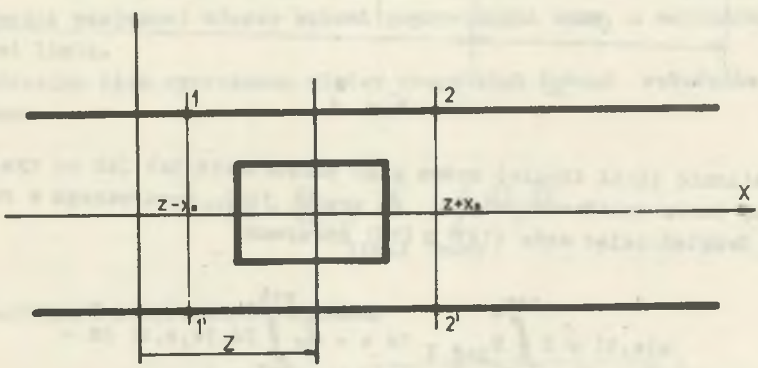
Z wzoru (12) wynika, że pole elektryczne indukcji wywołane przez prąd wzbudnika I(t) równe $E_{ind\,I} = -\frac{\partial A_I}{\partial t}$ praktycznie rzecz biorąc jest skupione w przedziale $(z-x_o,\ z+x_o)$. Ponieważ długość tego przedziału $2x_o$

jest bardzo mała w porównaniu z długością linii l ($l \gg 2x_o$) ($L\,2x_o$, $R\,2x_o \cong 0$) to dla $x \in (z-x_o,\ z+x_o)$ równanie (10) przyjmie postać

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_I(x,z,t)}{\partial t} = 0 \tag{13}$$



Rys. 2



Rys. 3

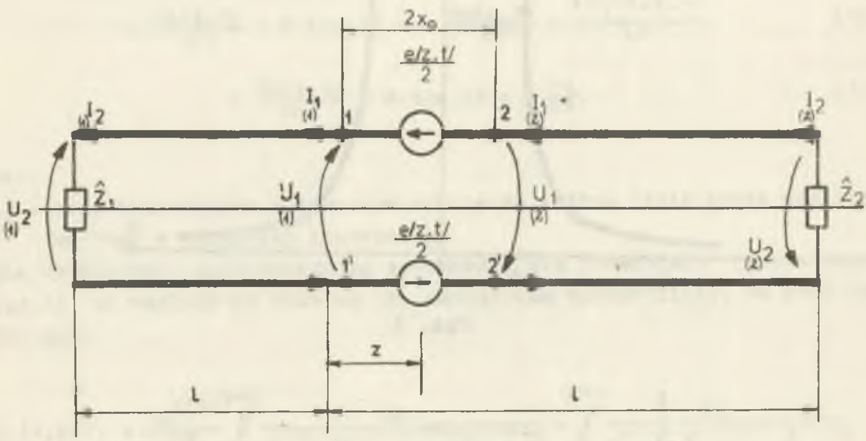
Całkując równanie (13) wzdłuż linii od punktu 1 do punktu 2 oraz od $2'$ do $1'$ otrzymamy

$$\int_1^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dx = -\int_1^2 \frac{\partial A_I(x,z,t)}{\partial t}\,dx = \int_1^2 E_{ind\ I}\,dx = \frac{e(z,t)}{2} \tag{14}$$

Ze względu na symetrię

$$\int_1^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dx = -\frac{e(z,t)}{2} \tag{15}$$

Z punktu widzenia linii długiej można więc uważać, że różnica potencjałów między węzłem 1 i 2 oraz 2' i 1' jest podtrzymywana przez idealną SEM e(z,t) określoną wzorami (14) i (15).



Rys. 4

Zasilanie linii długiej można więc przedstawić tak jak na rys. 4. Określmy teraz zależność e(z,t) od prądu I(t) wymuszanego w ramce wzbudnika. Uwzględniając wzór (12) i (14) otrzymamy

$$e(z,t) = 2\int_{z-x_0}^{z+x_0} E_{ind\ I}\,dx = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{z-x_0}^{z+x_0} 2A_I(x,z,t)\,dx =$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4}\, 2\int_{z-x_0}^{z+x_0}\int_{z-b}^{z+b}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-z')^2+(l_1-a)^2+d^2}} - \right.\right. \tag{16}$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-z')^2+(l_1+a)^2+d^2}}\right)dx\,dz\right]\frac{dI(t)}{dt}$$

Gdyby w wyrażeniu stojącym w nawiasie kwadratowym wzoru (16) całkowanie ze względu na współrzędną x odbywało się wzdłuż całej linii, to stanowiłoby ono dokładnie [2] współczynnik indukcyjności wzajemnej między przewodami linii a równoległymi do niej przewodami ramy wzbudnika. Ponieważ jednak, jak pokazaliśmy, potencjał $A_I(x,z,t)$ dla $x \notin (z-x_0,\ z+x_0)$ jest pomijalnie mały, możemy więc we wzorze (16) powiększyć granice całkowania ze względu na x nie zmieniając istoty rozumowania.
Mamy więc

$$e(z,t) = -M_1 \frac{dI(t)}{dt}, \tag{17}$$

gdzie

$$M_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2 \int_{z-l}^{z+l} \int_{z-b}^{z+b} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-z')^2+(l_1-a)^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-z')^2 + (l_1+a)^2 + d^2}} \right] dx\, dz' \tag{18}$$

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że rama wzbudnika znajduje się dostatecznie daleko od końców linii. Ponieważ końce linii są zwarte odpowiednio przez impedancje $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_2$, należy więc w przypadku położeń ramy wzbudnika w pobliżu końców linii uwzględnić również współczynnik indukcyjności wzajemnej między bokami poprzecznymi ramy a odcinkami zawierającymi linię.
Uwzględniając więc sprzężenia między wszystkimi bokami wzbudnika i linii otrzymamy

$$M(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_{linii}} \oint_{C_{ramy}} \frac{dl\, dl'}{r} \tag{19}$$

a po podwójnym scałkowaniu otrzymamy

$$M(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[4b \ln \left| \frac{l-z+\sqrt{(l-z)^2 + (l_1-a)^2 + d^2}}{-l-z+\sqrt{(l+z)^2 + (l_1-a)^2 + d^2}} \right| - \right.$$

$$- 4b \ln \left| \frac{l-z+\sqrt{(-z)^2 + (l_1+a)^2 + d^2}}{-l-z+\sqrt{(l+z)^2 + (l_1+a)^2 + d^2}} \right| +$$

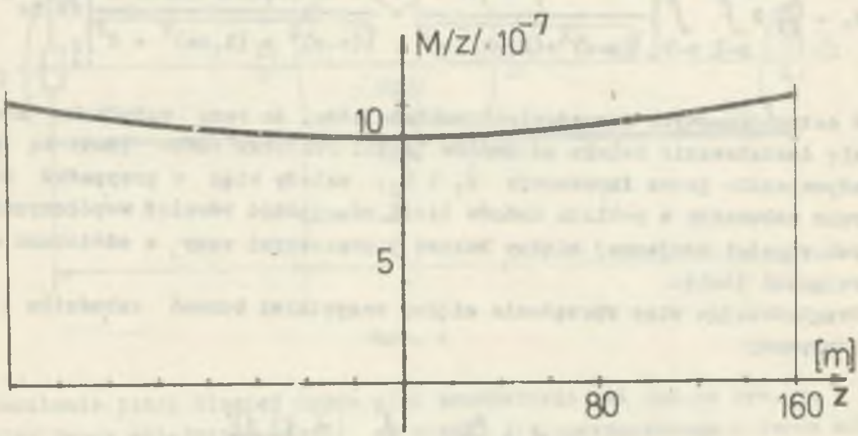
$$+ 2a \ln \left| \frac{l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l-z-b)^2}}{-l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l-z-b)^2}} \right| -$$

$$- 2a \ln \left| \frac{l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l-z-b)^2}}{-l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l-z+b)^2}} \right| +$$

$$+ 2a \ln \left| \frac{l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l+z-b)^2}}{-l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l+z-b)^2}} \right| - \qquad (20)$$

$$- 2a \ln \left| \frac{l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l+z+b)^2}}{-l_1 + \sqrt{l_1^2 + d^2 + (l+z+b)^2}} \right| .$$

Współczynnik indukcyjności wzajemnej w funkcji położenia ramy wzbudnika przedstawiony jest na rys. 5.



Rys. 5

Rozważania nasze będą ogólniejsze, jeżeli w modelu zasilania linii przedstawionym na rys. 4 za $e(z,t)$ podstawimy

$$e(z,t) = M(z)\,\frac{dI(t)}{dt} \qquad (21)$$

zamiast wzoru (18) i (17).

Przystąpimy teraz do określenia w stanie ustalonym relacji między napięciem na jednym z końców linii np. U_2 a prądem wzbudnika I.

Jak wiadomo [4] rozwiązanie równań telegrafistów (10) i (11) w stanie ustalonym dla odcinków linii na prawo i na lewo od wzbudnika, zgodnie z oznaczeniami przedstawionymi na rys. 4 można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \hat{U}_{(1)1} &= \hat{U}_{(1)2}\cosh\hat{\gamma}(l+z) + \hat{Z}_c\hat{I}_{(1)2}\sinh\hat{\gamma}(l+z) \\ \hat{I}_{(1)1} &= \hat{I}_{(1)2}\cosh\hat{\gamma}(l+z) + \frac{1}{\hat{Z}_c}\hat{U}_{(1)2}\sinh\hat{\gamma}(l+z) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{(2)1} &= \hat{U}_{(2)2}\cosh\hat{\gamma}(l-z) + \hat{Z}_c\hat{I}_{(2)2}\sinh\hat{\gamma}(l-z) \\ \hat{I}_{(2)1} &= \hat{I}_{(2)2}\cosh\hat{\gamma}(l-z) + \frac{1}{\hat{Z}_c}\hat{U}_{(2)2}\sinh\hat{\gamma}(l-z) \end{aligned} \tag{23}$$

podającej związek między napięciem i prądem w punkcie x=z linii za pomocą napięć i prądów na jej końcach.

Na końcach linii zachodzi

$$\hat{I}_{(1)2} = \frac{\hat{U}_{(1)2}}{\hat{Z}_1}, \qquad \hat{I}_{(2)2} = \frac{\hat{U}_{(2)2}}{\hat{Z}_2} \tag{24}$$

Uwzględniając w punkcie x=z linii warunek napięciowy i prądowy w postaci

$$\hat{E} = \hat{U}_{(1)1} + \hat{U}_{(2)1}, \qquad \hat{I}_{(1)1} = \hat{I}_{(2)1} \tag{25}$$

a następnie rozwiązując układ równań (22), (23), (24) i (25) ze względu na napięcie $U_{(1)2}$ otrzymamy

$$\hat{U}_{(1)2} = \frac{\hat{E}\left[\frac{1}{\hat{Z}_2}\cosh\hat{\gamma}(l-z) + \frac{1}{\hat{Z}_c}\sinh\hat{\gamma}(l-z)\right]}{\left[\cosh\hat{\gamma}(l+z) + \frac{\hat{Z}_c}{\hat{Z}_2}\sinh\hat{\gamma}(l+z)\right]\left[\frac{1}{\hat{Z}_2}\cosh\hat{\gamma}(l-z) + \frac{1}{\hat{Z}_c}\sinh\hat{\gamma}(l-z)\right] + \ldots}$$

$$\ldots \overline{+\left[\cosh\hat{\gamma}(l-z) + \frac{\hat{Z}_c}{\hat{Z}_2}\sinh\hat{\gamma}(l-z)\right]\left[\frac{1}{\hat{Z}_1}\cosh\hat{\gamma}(l+z) + \frac{1}{\hat{Z}_c}\sinh\hat{\gamma}(l+z)\right]}, \tag{26}$$

gdzie

$$\hat{Z}_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega c}}, \qquad \hat{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega c)}$$

Jeżeli impedancje $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_2$ na końcach linii są równe impedancji falowej tzn. $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \hat{Z}_c$ to równanie (26) przyjmie postać

$$\hat{U}_{(1)2} = \frac{1}{2}\hat{E}\, e^{-\gamma(1+z)}. \tag{27}$$

Jeżeli przyjąć model linii bez strat (tj. R=0 i G=0) to

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad \hat{\gamma} = j\omega\sqrt{LC}$$

a więc równanie (27) można przepisać w postaci

$$\hat{U}_{(1)2} = \frac{1}{2}\hat{E}\, e^{-j\omega\sqrt{LC}\,(1+z)} \tag{28}$$

W równaniach (26), (27) i (28) za $\hat{E}$ należy podstawić

$$\hat{E} = j\omega\, M(z)\hat{I} \tag{29}$$

gdzie współczynnik M(z) wyrażony jest wzorem (20).

Jeżeli w rzeczywistej linii współczynnik tłumienia $\alpha = \mathrm{Re}\,\hat{\gamma}$ jest pomijalnie mały oraz obydwa jej końce są obciążone impedancją falową to z równania (28) wynika, że niezależnie od położenia ramy wzbudnika sygnał na dowolnym końcu linii jest stały. Fakt ten można wykorzystać do przesyłu informacji z ruchomych klatek maszyn wyciągowych do centrum ich sterowania. Oprócz powyższego wniosku jakościowego analiza powyższa dostarcza nam związków ilościowych (wzory (28) i (29)), w oparciu o które można zaprojektować układ rzeczywisty dla z góry zadanych parametrów wyjściowych.

Pomiary przeprowadzone na obiekcie rzeczywistym pozwoliły ustalić współczynnik tłumienia, który dla szybu o głębokości do 400 m wynosi $\alpha = 1{,}31 \cdot 10^{-3}$.

Przeprowadzone doświadczenia potwierdziły słuszność przedstawionych zależności (20-28 i 29) z dokładnością 3% (dokładność przyrządów pomiarowych).

LITERATURA

[1] Szulkin P., Pogorzelski S. - Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT Warszawa, 1964.
[2] Tamm J.E. - Podstawy teorii elektryczności. WNT Warszawa 1967.
[3] Moon P., Spencer D.E. - Teoria pola. PWN Warszawa 1966.
[4] Atabiekow G.J. - Teoria liniowych obwodów elektrycznych. WNT Warszawa 1964.
[5] Leja F. - Teoria funkcji analitycznych. PWN Warszawa 1957.

Przyjęto do druku w styczniu 1975 r.

БЕСПРОВОДНАЯ ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ
В УСЛОВИЯХ УСИЛЕННОГО ГЛУШЕНИЯ СИГНАЛА

Р е з ю м е

На базе определенных упрощенных исходных данных построена математическая модель системы длинная лния - возбудитель в виде прямоугольной рамы, занимающей переменное положение вдоль линии.

Представленные связи показывают зависимомть между напряженнем на конце линии и током, протекающим через возбудитель.

WIRELESS INFORMATION TRANSFER IN THE CIRCUMSTANCES
OF BIG SIGNAL DAMPING

S u m m a r y

Basing upon certain initial simplified data a mathematical model of long-line inductor-system has been built in the form of rectangular frame which occupies a changing position along the line.

The presented equations show the voltage dependence at the line's end and the current flowing in the inductor.