

Jerzy BAJOREK

Instytut Elektrotechniki
Politechniki Rzeszowskiej

PRZESTRZENNA ANALIZA STANU NIEUSTALONEGO W WYBRANEJ STRUKTURZE
PROWADZĄCEJ FALE TEM

Streszczenie. W pracy rozwiązano równania Maxwella dla wybranego prowadzącego falę TEM układu źródła prądu - bezstratny kabel współosiowy. W otrzymanych wynikach podkreślono nielokalny charakter funkcji potencjałów pola elektromagnetycznego w pobliżu źródła w pierwszej fazie stanu nieustalonego. Podano również, wynikającą z tego faktu, nielokalną interpretację współczynników w równaniach telegrafistów:

1. Wprowadzenie

Wśród metod analizy stanu nieustalonego w liniach długich dominuje w chwili obecnej metoda obwodowa. Ujęcie obwodowe oparte na pojęciu parametrów linii na jednostkę jej długości jest tak popularne, że na przykład monografia Cholewickiego [1] poświęcona analizie stanu nieustalonego w liniach długich i układach drabinkowych przyjmuje równania telegrafistów za punkt wyjścia. W nielicznych przypadkach wyniki otrzymane metodami teorii obwodów poprawiane są w oparciu o równania elektrodynamiki. Przykładami mogą tutaj być: teoria skośnika [2], teoria przepięć atmosferycznych [3], czy opis oddziaływających ze sobą układów o stałych rozłożonych [4]. Należy jednak podkreślić, że nawet w tych nielicznych przypadkach rozwiązanie układu równań Maxwella otrzymuje się, ze względu na trudności obliczeniowe, po wprowadzeniu szeregu założeń upraszczających. Założenia te, na przykład w przypadku metody potencjałów opóźnionych, są bardzo różnorodne dla różnych rzeczywistych układów i często w niezadowalający sposób uzasadnione. Z tego względu konieczne jest podjęcie badań teoretycznych z jednej strony kontynuujących ujęcie przestrzenne przebiegów przejściowych w układach o stałych rozłożonych, ale z drugiej strony wolnych od zbyt daleko idących a słabo uzasadnionych założeń upraszczających. Badania takie należy rozpocząć od ścisłej analizy pewnych wyidealizowanych układów, aby następnie, po teoretycznej i eksperymentalnej weryfikacji konsekwencji kolejnych założeń upraszczających, można było przejść do analizy rzeczywistych obiektów.

Przedstawione opracowanie nawiązuje do podanych powyżej uwag. W wybranym, wyidealizowanym układzie źródło zasilania - bezstratny kabel współosiowy przeprowadzono ścisłą przestrzenną analizę zjawisk przejściowych zarówno w czole fali elektromagnetycznej, jak i w otoczeniu przyjętego źródła zasilania. W następnym etapie rozważań, po rozbudowie stosowanego aparatu matematycznego i wykorzystaniu szybszych maszyn cyfrowych, będzie możliwe stopniowe przechodzenie do bardziej ścisłej niż to ma miejsce dotychczas, analizy stanu nieustalonego w rzeczywistych obiektach.

2. Badany układ

Analizując pole elektromagnetyczne w nieograniczonym, jednorodnym, bezstratnym kablu współosiowym stwierdzamy, że prowadzi on falę TEM przesuwającą się bez zniekształceń wzdłuż jego osi [5]. Z równań Maxwella dla takiego kabla wynikają równania telegrafistów ze współczynnikami znanymi jako statycznie określone: indukcyjność i pojemność na jednostkę długości kabla

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{\Phi}{I} = \frac{A_z(b) - A_z(a)}{I} \quad (1)$$

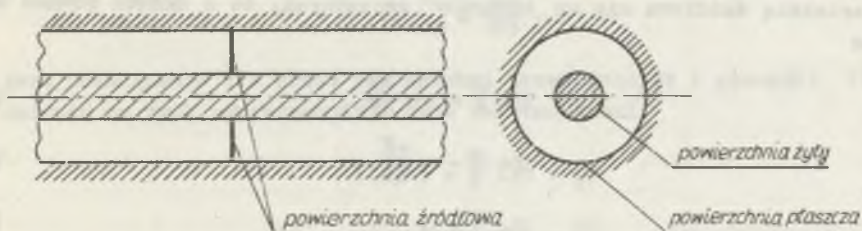
$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{Q}{\varphi(b) - \varphi(a)} \quad (2)$$

W podanych zależnościach μ, ϵ są przenikalnościami: magnetyczną i dielektryczną ośrodka między powierzchniami przewodzącymi kabla, a i b są promieniami odpowiednio żyły i powłoki, Φ strumieniem magnetycznym na jednostkę długości kabla, I prądem powierzchni przewodzących, A_z składową osiową potencjału wektorowego, Q ładunkiem na jednostkę długości kabla, U napięciem między powierzchniami przewodzącymi, zaś φ potencjałem skalarnym. Pole elektromagnetyczne jest w takim kablu lokalne, to znaczy na płaszczyźnie prostopadłej do osi kabla zarówno wektory jak i potencjały pola są rozwiązaniem dwuwymiarowych równań Laplace'a.

Dla poprawnej analizy przebiegów przejściowych w czole fali elektromagnetycznej pojawiającej się na początku kabla opisane powyżej ujęcie nie wystarcza, ponieważ niedopuszczalne jest wówczas pominięcie efektów brzegowych i do rozważań należy wprowadzić źródło zasilania.

Można sprawdzić, że falę TEM na całej, objętej oddziaływaniem źródła, długości bezstratnego kabla prowadzi układ przedstawiony na rys. 1. Układ ten posiada źródło w postaci pierścienia wyciętego z powierzchni prostopadłej do osi kabla przez powierzchnie przewodzące. Przyjmujemy, że pierścieniem tym płynie w kierunku promieniowym prąd źródłowy $i(t)$. Z wartości prądu źródłowego wynika wartość gęstości powierzchniowej prądu $i_p(r, t)$ na powierzchni źródłowej

$$i_r(r, t) = \frac{i(t)}{2\pi r} \quad (3)$$

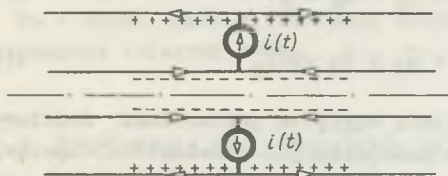


Rys. 1. Przekrój badanego układu źródło zasilania - kabel współosiowy

Przy zerowych warunkach początkowych w układzie i gęstości powierzchniowej prądu danej zależnością (3) gęstość powierzchniowa ładunku jest na całej powierzchni źródłowej zerowa

$$\sigma_r(r, t) = 0 \quad (4)$$

Na powierzchniach przewodzących gęstość powierzchniowa prądu i_z oraz ładunku σ_z jest niezerowa w strefie oddziaływania źródła. Promień tej strefy związany jest z prędkością propagacji oddziaływań elektromagnetycznych w obszarze ograniczonym powierzchniami przewodzącymi. Przy założonej polaryzacji źródła zasilania rozptył prądów i rozkład ładunków w przekroju osiowym badanego układu można przedstawić schematycznie tak jak na rys. 2.



Rys. 2. Rozptył prądów i rozkład ładunków na przekroju osiowym badanego układu

W odróżnieniu od znanych ujęć przebiegów przejściowych w liniach długich, w przedstawionej poniżej analizie oprócz połączenia elektrycznego źródła z linią uwzględnione zostało również sprzężenie elektromagnetyczne między tymi elementami. Jedynym założeniem jest założenie postaci prądu na powierzchni źródłowej,

a wszystkie pozostałe przebiegi w układzie są konsekwencją tego warunku i przyjętej struktury układu źródła zasilania - linia długa.

3. Rozwiązanie dla wektorów pola

Jeżeli w badanym obszarze ograniczonym powierzchniami przewodzącymi i powierzchnią źródłową nie ma ładunków swobodnych, to z układu równań Maxwella

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (8)$$

wynikają dwa niezależne równania dla wektorów pola

$$\square \vec{E} = 0 \quad (9)$$

$$\square \vec{B} = 0 \quad (10)$$

Dla jednoznacznego rozwiązania tych równań należy ustalić warunki graniczne, jakie spełniają funkcje $\vec{E}(r, z, t)$ i $\vec{B}(r, z, t)$ w obszarze dla $z=0$, oraz na powierzchniach ograniczających badany obszar dla $t \geq 0$ [6]. Jeżeli przed wzbudzeniem źródła pole elektromagnetyczne było w układzie zerowe, to warunki początkowe są zerowe. Warunki brzegowe na powierzchniach nieciągłości mają znaną postać wiążącą składowe normalne wektora natężenia pola elektrycznego z gęstością powierzchniową ładunku, oraz składowe styczne wektora indukcji magnetycznej z gęstością powierzchniową prądu [7]

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{E}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (11)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{B}_1 + \vec{n}_2 \times \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{I}_p \quad (12)$$

Korzystając z symetrii badanego układu względem powierzchni źródłowej można rozważania dotyczące przebiegów przejściowych prowadzić w połowie omawianej struktury. Z warunku znikania składowej osiowej E_z wektora natężenia pola elektrycznego na powierzchniach doskonale przewodzących oraz zależności (4) wynikają zerowe warunki brzegowe i zerowe rozwiązanie dla tej składowej w całym obszarze

$$E_z(r, z, t) = 0 \quad (13)$$

Przy zadanym wymuszeniu prądowym na powierzchni źródłowej, wobec zależności (13), będzie w układzie występować tylko składowa kątowna B_θ wektora indukcji magnetycznej i składowa radialna E_r wektora natężenia pola e-

lektrycznego. Konsekwencją warunków brzegowych (11) i (12), równania (6) i równania ciągłości

$$\nabla \cdot \vec{i}_p + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

jest rozwiązanie dla prądu powierzchni przewodzących i gęstości liniowej ładunku na tych powierzchniach dane zależnościami

$$i(z, t) = \frac{1}{2} i(t - \frac{z}{v}) \quad (15)$$

$$q(z, t) = \frac{1}{2} i(t - \frac{z}{v}) \quad (16)$$

Otrzymane zależności pozwalają na jednoznaczne rozwiązanie równań falowych na dwie niezerowe składowe wektorów pola. Korzystając z zależności (15) otrzymujemy rozwiązanie równania (10) w postaci

$$B_\theta(r, z, t) = - \frac{\mu}{4\pi r} i(t - \frac{z}{v}) \quad (17)$$

Podobnie korzystając z zależności (16) otrzymujemy rozwiązanie równania (9) w postaci

$$E_r(r, z, t) = - \frac{1}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} i(t - \frac{z}{v}) \quad (18)$$

Wiadomo, że każde rozwiązanie równań Maxwella spełnia równania falowe (9) i (10), ale spośród rozwiązań równań falowych trzeba wybrać te, które spełniają równania Maxwella [8]. W prosty sposób sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia układ równań Maxwella. Jest ono ponadto identyczne z rozwiązaniem dla kabla nieograniczonego. Tak więc badany układ źródło - kabel także w otoczeniu źródła zasilania możemy opisywać znanymi równaniami telegrafistów.

4. Rozwiązanie dla potencjałów pola

W dalszej części rozważań wykażemy, że w oparciu o badania przestrzenno-czasowych przebiegów funkcji potencjałów pola elektromagnetycznego można w omawianym układzie przeprowadzić głębszą analizę stanu nieustalonego.

Wiadomo, że jeżeli na potencjały pola zostanie nałożony dodatkowy warunek Loerntza

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

to układ równań Maxwella (5) ÷ (8) można rozwiązać rozwiązując dwa niezależne równania falowe na potencjał skalarny φ i wektorowy A .

$$\square \varphi = 0 \quad (20)$$

$$\square \vec{A} = 0 \quad (21)$$

Ze względu na symetrię walcową zagadnienia oraz postać wymuszenia prądowego, równania (21) i (22) są równoważne trzem równaniami skalarnym

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 A_r}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

Warunki początkowe dla tych równań są zerowe, a z połączenia warunków brzegowych dla wektorów pola z zależnościami definiującymi funkcje potencjałów

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (25)$$

$$\vec{E} = -(\nabla \varphi + \dot{\vec{A}}) \quad (26)$$

warunkiem symetrii zagadnienia względem powierzchni źródłowej i warunkiem Lorentza otrzymujemy warunki brzegowe postaci

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{1}{4\pi \epsilon a} i \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{1}{4\pi \epsilon b} i \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (29)$$

$$A_z \Big|_{z=0} = 0 \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\mu}{4\pi a} i \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{\mu}{4\pi b} i \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial A_r}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{\mu}{4\pi r} i(t) \quad (33)$$

$$A_r \Big|_{r=a} = A_r \Big|_{r=b} = 0 \quad (34)$$

Rozwiązania podanych równań poszukiwano w pracy czystą metodą siatek [9]. Najistotniejszą zaletą tej metody jest możliwość fizycznej interpretacji wyników na każdym etapie obliczeń. Jest to rzeczą bardzo istotną zwłaszcza dla pierwszych prób rozwiązywania postawionego problemu. Zastosowanie jawnego schematu obliczeniowego prowadzi w omawianym przypadku do bardzo przejrzystego układu równań algebraicznych. Jeżeli przykładowo dla potencjału skalarnego przyjmiemy oznaczenia

$$\Delta r = \Delta z = h; \quad \Delta t = \frac{h}{v\sqrt{2}} \quad (35)$$

$$a = \min.h; \quad b = \max.h \quad (36)$$

$$\varphi(r, z, t) = \varphi(kh, ln, m \frac{h}{v\sqrt{2}}) = V[k, l, m] \quad (37)$$

to odpowiedni układ równań algebraicznych przyjmuje postać

$$V[k, l, m+1] = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2r}\right) V[k+1, l, m] + \left(1 - \frac{h}{2r}\right) V[k-1, l, m] + \right. \\ \left. + V[k, l+1, m] + V[k, l-1, m] \right\} - V[k, l, m-1] \quad (38)$$

$$V[k, l, 0] = V[k, l, 1] = 0 \quad (39)$$

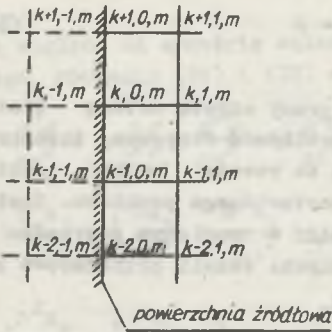
$$V[k, -1, m] = V[k, l, m] \quad (40)$$

$$V[\min-1, l, m] = V[\min + 1, l, m] - \frac{h}{2\pi c a v} i \left[\left(\frac{m}{\sqrt{2}} - 1\right) \frac{h}{v} \right] \quad (41)$$

$$V[\max+1, l, m] = V[\max-1, l, m] + \frac{h}{2\pi c b v} i \left[\left(\frac{m}{\sqrt{2}} - 1\right) \frac{h}{v} \right] \quad (42)$$

Podstawowe równanie (39) pozwala na wyznaczenie wartości potencjału w dowolnym węźle wewnętrznym siatki na bazie wartości potencjału w danym węźle i węzłach sąsiednich dla dwóch wcześniejszych kroków czasowych. Zależność (40) wynika z zerowych warunków początkowych w obszarze. Postać zależności (41) ÷ (43) związana jest z koniecznością wprowadzenia dla warunków brzegowych typu Neumanna zewnętrznych węzłów siatki schematu różnicowego [10] - (rys. 3).

Każda z szukanych funkcji potencjału liczona była niezależnie na EMC Odra 1204. Obliczenia przeprowadzono w dwóch etapach. W pierwszym etapie



Rys. 3. Wycinek siatki schematu różnicowego w otoczeniu powierzchni źródłowej

richsa, Lewy'ego głoszący, że koło zależności równania różniczkowego musi być wpisane w równoległobok zależności schematu różnicowego [9]. Dla równych kroków przestrzennych otrzymujemy kwadrat zależności schematu różnicowego, który musi być co najmniej opisany na koło zależności i stąd warunek stabilności ma postać

$$\Delta t \leq \frac{h}{v\sqrt{2}} \quad (43)$$

Konsekwencją tego warunku jest rozprzestrzenianie się rozwiązania numerycznego wzdłuż osi układu z prędkością większą od $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Przyjęcie do obliczeń siatki stopniowo rozrzedzanej prowadzi do bardzo szybkiego wygaszenia rozwiązania poza okręgiem zależności.

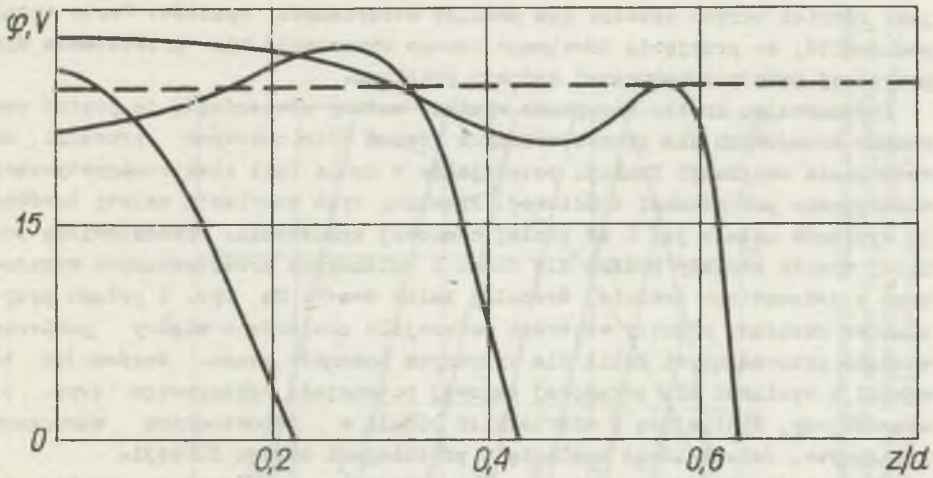
Po zakończeniu pierwszego etapu obliczeń program przechodził do etapu drugiego, w którym granice zmiennych przestrzennych i czasu narzuconego były przez pojemność pamięci bębnowej maszyny i realny czas obliczeń. W drugim etapie obliczeń cały badany obszar dwóch zmiennych przestrzennych podzielony został na szereg połączonych ze sobą tablic, a organizacja programu polegała na prowadzeniu bieżących obliczeń na jednej tablicy, przy pozostałych tablicach przechowywanych w pamięci bębnowej.

W przeprowadzonych obliczeniach numerycznych przyjęto, że prąd powierzchni źródłowej narasta wykładniczo według zależności

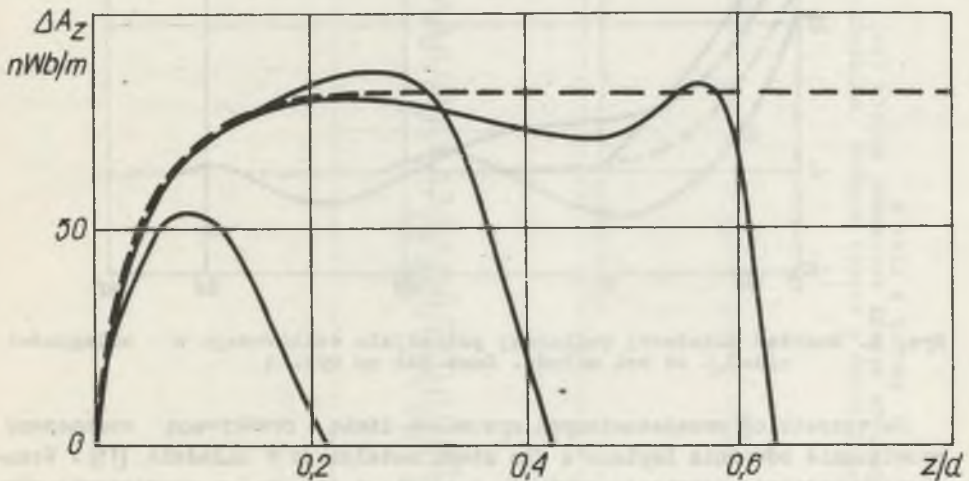
$$i(t) = 2[1 - \exp(-t/\tau)] \quad (44)$$

Dla $\tau \rightarrow 0$ przebieg ten przechodzi w bardzo popularną w badaniach teoretycznych funkcję jednostkową, natomiast dla $t \rightarrow \infty$ otrzymujemy ustaloną

liczono na siatce stopniowo rozrzedzanej, z liczbą węzłów dostosowaną do pojemności pamięci operacyjnej maszyny. Taka organizacja obliczeń pozwoliła na szybkie wygaszenie błędu wnoszonego do rozwiązania przez warunek stabilności schematu różnicowego. Wiadomo bowiem, że rozwiązanie równania falowego względem dwóch zmiennych przestrzennych jest jednoznacznie wyznaczone przez warunki początkowe na kole zależności. Koło to jest obszarem wokół badanego punktu ograniczonym okręgiem o promieniu $r=tv$. Jeżeli równanie falowe rozwiązujemy metodą siatek, to przy dowolnie wybranych krokach przestrzennych, dobór kroku czasowego ogranicza warunek stabilności Couranta, Fried-



Rys. 4. Rozkład różnicy wartości potencjału skalarnego między powierzchniami przewodzącymi kabla. b) $a = 1,5$. Stała czasowa wymuszenia $\tau v/d = 0,05$. Krzywe odpowiadają kolejno czasom: $t_1 v/d = 0,21$; $t_2 v/d = 0,42$; $t_3 v/d = 0,63$.

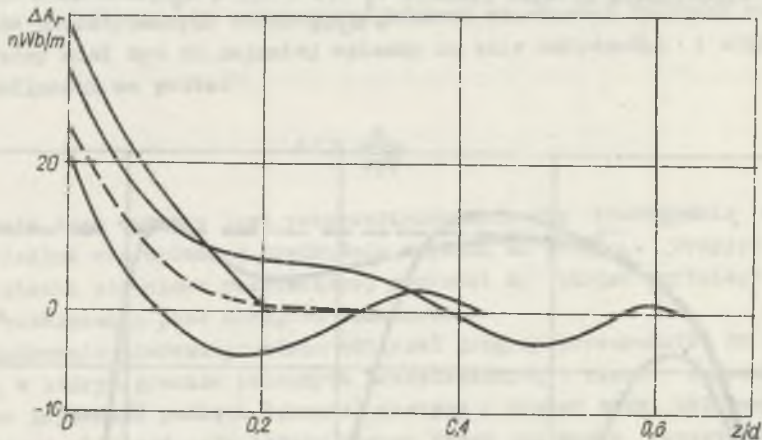


Rys. 5. Rozkład różnicy wartości składowej osiowej potencjału wektorowego między powierzchniami przewodzącymi kabla dla danych z rys. 4

wartość prądu źródłowego, odpowiadającą stanowi ustalonemu w układzie, co jest również bardzo istotne dla analizy otrzymanych wyników. Warto tutaj podkreślić, że przyjęcie dowolnego innego wymuszenia nie przedstawia dla przyjętej metody numerycznej żadnego problemu.

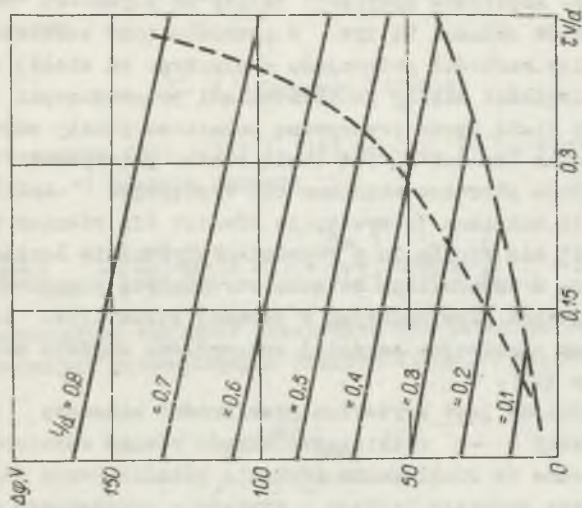
Podsumowując krótko otrzymane wyniki, możemy stwierdzić, że postać warunków brzegowych dla przedstawionych równań różniczkowych prowadzi do wzbudzenia oscylacji funkcji potencjałów w czole fali elektromagnetycznej w otoczeniu powierzchni źródłowej. Przebieg tych oscylacji zależy zarówno od wymiarów układu jak i od stałej czasowej wymuszenia. Przedstawione poniżej wyniki zostały podane dla czasu i zmiennych przestrzanych wyrażonych w jednostkach średniej średnicy kabla $d=a+b$. Na rys. 4 podano przykładowe rozkłady różnicy wartości potencjału skalarnego między powierzchniami przewodzącymi kabla dla wybranych momentów czasu. Porównując te wyniki z wynikami dla składowej osiowej potencjału wektorowego (rys. 5) obserwujemy, wynikającą z niewielkich różnic w odpowiednich warunkach brzegowych, daleko idącą analogię w przebiegach obydwu funkcji.

Dla składowej radialnej potencjału wektorowego otrzymujemy przebieg innego typu, dominujący w otoczeniu powierzchni źródłowej (rys. 6).

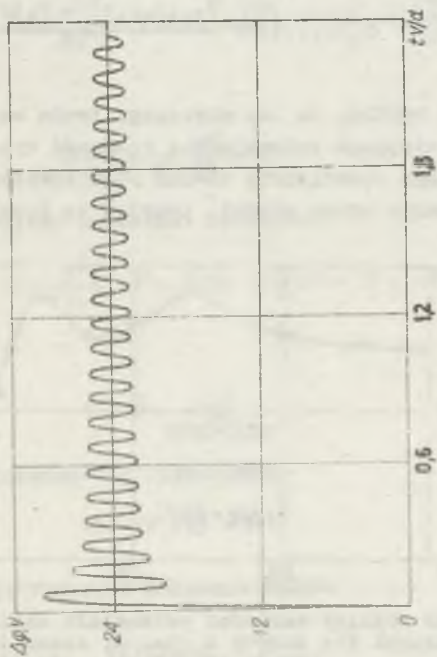


Rys. 6. Rozkład składowej radialnej potencjału wektorowego w odległości $r/d=0,5$ od osi układu. Dane jak na rys. 4

Na wszystkich przedstawionych rysunkach linią przerywaną zaznaczone rozwiązanie równania Laplace'a dla stanu ustalonego w układzie [11]. Wzbudzone w układzie oscylacje zanikają w czasie i dla $t \rightarrow \infty$ rozwiązanie równań falowych zmierza do rozwiązania równań Laplace'a. Na rys. 7 przedstawiono przykładowo przebieg zmian w czasie różnicy wartości potencjału skalarnego między powierzchniami przewodzącymi na zaciskach źródła zasilania. Występujące w tym przebiegu oscylacje mają okres



Krys. 8. Zależność pierwszego maksimum różnicy wartości potencjału skalarnego między powierzchniami od stałej czasowej wymuszenia i odległości między powierzchniami przewodzącymi.



Krys. 7. Przebieg zmian w czasie różnicy wartości potencjału skalarnego między zaciśkami źródła ($z=0$) dla danych z rys. 4

$$r = 2 \frac{b-a}{v} \quad (45)$$

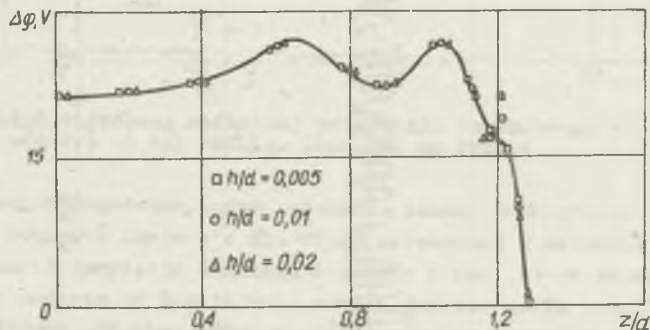
są więc ściśle powiązane z przestrzennym ujęciem przebiegów falowych w badanym układzie. Amplituda oscylacji zależy od szybkości narastania wymuszenia i wymiarów układu. Na rys. 8 przedstawiono zależność pierwszego maksimum różnicy wartości potencjału skalarnego od stałej czasowej wymuszenia \mathcal{U} i odległości między powierzchniami przewodzącymi $l=b-a$.

Na rysunku tym linią gęsto przerywaną połączono punkty odpowiadające rozwiązaniu równania Laplace'a, zaś linią rzadko przerywaną ograniczono obszar, poza którym pierwsze maksimum nie występuje. Analizując rysunek stwierdzamy, że maksimum to występuje również dla różnicy wartości potencjału mniejszej niż wynika to z rozwiązania równania Laplace'a. Wynik ten potwierdza tezę o zasadniczym związku otrzymanych przebiegów z przestrzennym ujęciem zjawisk przejściowych w badanej strukturze. Identyczny wniosek otrzymujemy analizując bardziej szczegółowo obydwie składowe potencjału wektorowego [11].

Jeżeli spełnione jest kryterium stabilności schematu różnicowego, to przy kroku siatki $h \rightarrow 0$ rozwiązanie układu równań różnicowych jest jednostajnie zbieżne do rozwiązania równania różniczkowego [6]. Stosując rozwinięcie Taylora względem każdego z wyrazów w podstawowym wzorze schematu różnicowego stwierdzamy, że główna część błędu jest rzędu h^4 [9]. Szacując błąd metodą Runge'go [12] otrzymujemy zależność

$$\varepsilon_h(r, z, t) \approx \frac{V_{2h}(r, z, t) - V_h(r, z, t)}{15} \quad (46)$$

Z rysunku 9 wynika, że bez większego trudu można dobrać taki krok przestrzenny, aby otrzymać zadowalającą zgodność wyników przy różnych krokach siatki. Otrzymane rozwiązanie równań różnicowych można wobec tego, przy dostatecznie małym kroku siatki, przyjąć za rozwiązanie równań falowych.



Rys. 9. Rozkład różnicy wartości potencjału skalarnego między powierzchniami przewodzącymi dla danych z rys. 4, czasu $t_v/d=1,8$ i trzech różnych kroków siatki schematu różnicowego

Analizując warunki graniczne w badanym układzie można sprawdzić, że otrzymane rozwiązanie na potencjały pola będzie spełniać postulowany warunek Lorentza. Załóżmy mianowicie, że warunek Lorentza nie jest spełniony, to znaczy prawa strona warunku jest funkcją skalarną współrzędnych przestrzennych i czasu

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(r, z, t) \quad (47)$$

Z warunków brzegowych (28), (31) i (34) wynika, że na powierzchni źródłowej funkcja $f(r, z, t)$ spełnia warunek

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right\} \Big|_{z=0} = 0 \quad (48)$$

Podobnie z pozostałych warunków brzegowych dla potencjałów pola wynika, że na powierzchniach przewodzących funkcja $f(r, z, t)$ spełnia warunek

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0 \quad (49)$$

Równanie (22), po przyjęciu warunku Lorentza w postaci (48), można zapisać w postaci

$$\square \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla(f - \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \nabla \times \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (50)$$

lub inaczej

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla f \quad (51)$$

Z równania (21) otrzymujemy natomiast zależność

$$\square \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) - \frac{\partial}{\partial t} (f - \nabla \cdot \vec{A}) = 0 \quad (52)$$

lub inaczej

$$\nabla \cdot \vec{E} = - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (53)$$

Łącząc (52) i (54) z tożsamością różniczkową

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 \quad (54)$$

otrzymujemy dla funkcji $f(r, z, t)$ równanie falowe

$$\square f = 0 \quad (55)$$

Warunki (49) i (50) są dla tego równania warunkami brzegowymi. Warunki początkowe są również zerowe, ponieważ zerowe potencjały pola przed włączeniem źródła spełniają warunek Lorentza. Tak więc rozwiązaniem równania (56) jest funkcja równa tożsamościowo zeru w całym obszarze. Wynik ten dowodzi spełnienia warunku Lorentza przez badane funkcje potencjałów.

5. Podsumowanie

Otrzymane rozwiązanie dla wektorów i potencjałów pola elektromagnetycznego w badanej strukturze w sposób zadowalający przedstawia skutki wprowadzenia na początku bezstratnego jednorodnego kabla wyidealizowanego źródła zasilania. Przypomnijmy, że jedynym warunkiem przyjętym w pracy jest założenie postaci prądu na powierzchni źródłowej, a wszystkie pozostałe przebiegi w układzie są konsekwencją tego warunku i przyjętej struktury układu. Rozwiązanie równań falowych przy zadanych warunkach początkowo-brzegowych w przestrzennie ujętym układzie źródła zasilania—linia długa pozwala na uwzględnienie sprzężenia elektromagnetycznego źródła z kablem, oraz ujawnienie takiego efektu jak oscylacje funkcji potencjałów wokół wartości znanych jako rozwiązanie dla stanu ustalonego. Otrzymany wynik jest niezgodny ze spotykanym w literaturze twierdzeniem o lokalnym charakterze funkcji potencjałów w układzie prowadzącym falę TEM [13], [14]. Z przedstawionych przestrzenno-czasowych przebiegów funkcji potencjałów wynika, że występujące w równaniach telegrafistów dla badanego układu stałe współczynniki, w początkowym okresie rozwoju stanu nieustalonego, w otoczeniu powierzchni źródłowej, zależą w sposób istotny od związanej z obecnością źródła składowej radialnej potencjału wektorowego A_r

$$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{A_z(b, z, t) - A_z(a, z, t) - \int_a^b dr \frac{\partial A_r(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\text{const}}}{i(z, t)} \quad (56)$$

$$\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{q(z, t)}{\varphi(b, z, t) - \varphi(a, z, t) - \int_a^b dr \frac{\partial A_r(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=\text{const}}} \quad (57)$$

W miarę wpływu czasu zależność (58) przechodzi w zależność (2), czyli znaną, lokalnie określoną pojemność na jednostkę długości kabla. Dla prądu powierzchni źródłowej dowolnie zmiennego w czasie składowa radialna potencjału wektorowego wpływa na wartość dynamicznie określonego napięcia w mianowniku zależność i (58) i występujący po lewej stronie tej zależności współczynnik traci sens fizyczny pojemności na jednostkę długości kabla. Inaczej wygląda problem dla zależności (57). W pobliżu powierzchni źródłowej nawet w stanie ustalonym składowa radialna potencjału wektorowego

na swój poważny udział z wytwarzanym strumieniem indukcji magnetycznej i chociaż rozważany współczynnik zachowuje sens fizyczny indukcyjności na jednostkę długości kabla, to jednak dla jego obliczenia należy uwzględnić pole elektromagnetyczne źródła zasilania.

LITERATURA

- [1] Cholewicki T.: Elektryczne linie długie i układy drabinkowe niejednorodnie. PWN, Warszawa 1974.
- [2] Galiński B.: O zakresie stosowalności teorii skońnika. Arch. Elektr. 21, 1972, z. 2, 289-297.
- [3] Jakubowski J.L.: Podstawy teorii przepięć w układach energoelektrycznych. PWN, Warszawa 1968.
- [4] Tozoni O.W.: Integralnyje urawnienia nieodnorodnej linii. Izv. WUZ Elektromechanika, 1970, nr 4, 370-375.
- [5] Dearholt D.W., Mc Spadden W.R.: Electromagnetic Wave Propagation Mc Graw-Hill Book Comp., New York 1973.
- [6] Michlin S.G., Smolicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1972.
- [7] Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.
- [8] Suffczyński M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.
- [9] Mitchell A.R.: Computational Methods in Partial Differential Equations. John Wiley, New York 1969.
- [10] Korn G., Korn T.: Sprawocznik po matematykce. Izd. Nauka, Moskwa 1973
- [11] Bajorek J.: Analiza stanu nieustalonego w bezstratnej półograniczonej linii długiej. Praca doktorska, Gliwice - Rzeszów 1975.
- [12] Panow D.J.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, PWN, Warszawa 1955.
- [13] Collin R.E.: Prowadzenie fal elektromagnetycznych. WNT, Warszawa 1966.
- [14] Litwin R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1968.

Przyjęto do druku w styczniu 1976 r.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В
ИЗБРАННОЙ СИСТЕМЕ ВЕДУЩЕЙ ВОЛНЫ ТЭМ

Р е з ю м е

В работе решены уравнения Максвелла в избранной системе ведущей волны ТЭМ, которая состоит из источника тока и концентрического кабеля. В полученных результатах подчеркивается неместный характер функции потенциалов элект-

тромагнитного поля вблизи источника в первой фазе переходного процесса. Указана тоже вытекающая из этого факта неместная интерпретация коэффициентов в уравнениях длинной линии.

SPACE ANALYSIS OF TRANSIENTS IN ONE STRUCTURE WITH TEM WAVE

S u m m a r y

The Maxwell's equations for one TEM structure, which consists of the current source and the lossless coaxial transmission line, have been solved in the paper. In the interpretation of the obtained results special emphasis has been put in the non-local character of the electromagnetic field potentials near the source in the first phase of the transient. The non-local interpretation of the coefficients in the telegraphers' equations, which is connected with the non-local character of the potentials, has also been presented in the paper.