ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Elektryka z. 52 Nr kol. 488

Zygmunt GARCZARCZYK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O PEWNYM WSKAŹNIKU WRAŻLIWOŚCI OBWODU

Streszczenie. W artykule pokazano, że uzasadnione jest przyjęcie wskaźnika $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^{T}\right|^2$ jako kryterium minimalizacji wrażliwości układu na zmiany wszystkich jego elementów. Wykazano, że wskaźnik ten stanowi przypadek szczególny ogólniejszej miary wrażliwości.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie wrażliwości funkcji charakterystycznej obwodu na zmiany jego parametrów posiada istotne znaczenie praktyczne w syntezie układów pasywnych i aktywnych. Odchylenie od wartości nominalnej elementu może zniekształcić odpowiedź obwodu lub spowodować, że układ stanie się niestabilny. Wynika stąd konieczność minimalizacji tych niepożądanych efektów. Optymalizacja wrażliwości układu musi być oparta o pewne kryterium. Wyboru tego kryterium dokonujemy często w sposób subiektywny. Jednym z częściej stosowanych kryteriów optymalizacji wrażliwości jest wskaźnik zaproponowany przez Schoefflera [1, 2]

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^{T}\right|^2 \tag{1}$$

gdzie:

$S_{x_i}^{T} = \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{x_i}{T}$ - wrażliwość funkcji obwodu na zmiany i-tego elementu,

n - liczba elementów obwodu,

T - funkcja obwodu-transmitancja, immitancja,

x_i - i-ty element obwodu.

Zależność (1) przyjmuje się dotąd jako definicję tej miary. Artykuł niniejszy stanowi próbę uzasadnienia przyjęcia tego wskaźnika jako kryterium minimalizacji wrażliwości układu na zmiany wszystkich jego elementów w oparciu o elementy teorii estymacji.

2. Estymator optymalny

Wybór estymatora optymalnego dokonany w oparciu o ryzyko bayesowskie błędu estymacji [4].
Błąd estymacji q określamy jako różnicę między oszacowaniem $\hat{b}$ zmiennej losowej a jej prawdziwą wartością b

$$q = \hat{b} - b \tag{2}$$

Niech $f(b,\hat{b})$ będzie funkcją, która dla prawdziwej wartości zmiennej b i jej oszacowania oznacza stratę. Będziemy rozważali funkcję straty posiadającą następujące własności

$$\begin{aligned} & f(q) = 0 \quad \text{jeśli} \quad q = 0 \\ & f(q_2) \geqslant f(q_1) \quad \text{jeśli} \quad q_2 \geqslant q_1 \geqslant 0 \quad \text{(monotomiczność)} \\ & f(q) = f(-q) \quad \text{(symetria)} \\ & f(p_1 q_1 + p_2 q_2) \leqslant p_1\, f(q_1) + p_2\, f(q_2) \quad \text{(wypukłość)} \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

p_1, p_2 dowolne stałe takie, że

$$p1,\ p_2 \geqslant 0 \qquad p_1 + p_2 = 1$$

Funkcję ryzyka $R(b)$ określamy jako wartość oczekiwaną funkcji straty, wziętą po wszystkich dopuszczalnych wartościach błędu

$$R(b) = E\left\{f(q)\right\} \tag{4}$$

Zgodnie z uwagą na wstępie zakładamy, że istnieje rozkład a priori błędów q, a estymator optymalny minimalizuje funkcję ryzyka $R(b)$.
Można podać następujące

TWIERDZENIE

Jeżeli funkcja straty spełnia warunki (3) a zmienna losowa b posiada symetryczną dystrybuantę $F_b(\beta)$, tzn.

$$F_b(\beta) = P(b \leqslant \beta)$$

$$F_b(\beta - \bar{b}) = 1 - F(\bar{b} - \beta) \tag{5}$$

gdzie

$$\bar{b} = E\left\{b\right\}$$

a ponadto dystrybuanta $F_b(\beta)$ ma w każdym punkcie pochodną, to ryzyko $R(b)$ osiąga wartość minimalną, gdy jako ocenę $\hat{b}$ zmiennej b przyjmiemy wartość oczekiwaną zmiennej b

$$\hat{b} = \bar{b} = E\left\{b\right\} \tag{6}$$

Dowód [4]

$$R(b) = E\left\{f(q)\right\} = E\left\{f(\hat{b}-b)\right\}$$

Z założenia, że $F_b(\beta)$ posiada wszędzie pochodną wynika, że istnieje funkcja gęstości prawdopodobieństwa $g(b)$, przy czym

$$F_b(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} g(b)db$$

zatem

$$\begin{aligned}
R(b) &= \int f(\hat{b}-b)\, g(b-\bar{b})db && \text{definicja}\\
&= \int f(\hat{b}-x-\bar{b})g(x)dx && x = b - \bar{b}\\
&= \int f(\hat{b}+x-\bar{b})g(-x)dx && x = - x\\
&= \int f(-\hat{b}-x+\bar{b})g(-x)dx && \text{symetria } f(\varepsilon)\\
&= \int f(-\hat{b}-x+\bar{b})g(x)dx && \text{symetria } F_x(\beta)\\
&= \int f(2\bar{b}-\hat{b}-b)g(b-\bar{b})db && x = b - \bar{b}\\
&= E\left\{f(2\bar{b}-\hat{b}-b)\right\}
\end{aligned}$$

więc

$$E\left\{f(\hat{b}-b)\right\} = \frac{1}{2} E\left\{f(\hat{b}-b)\right\} + \frac{1}{2} E\left\{f(2\bar{b}-\hat{b}-b)\right\}$$

Z wypukłości funkcji $f(q)$ wynika

$$E\left\{f\left[\frac{1}{2}(\hat{b}-b) + \frac{1}{2}(2\bar{b}-\hat{b}-b)\right]\right\} < \frac{1}{2} E\left\{f(\hat{b}-b)\right\} + \frac{1}{2} E\left\{f(2\bar{b}-\hat{b}-b)\right\}$$

$$E\left\{f(\bar{b}-b)\right\} < E\left\{f(\hat{b}-b)\right\}$$

a więc tylko, jeśli

$$\hat{b} = \bar{b} = E\left\{b\right\}$$

$R(b)$ osiąga minimum.

Zależność (6) przyjmujemy do określenia wskaźnika wrażliwości.

3. Wskaźnik wrażliwości

Dana jest funkcja charakterystyczna obwodu $T(S,X)$ gdzie X wektor kolumnowy, którego składnikami są elementy obwodu. Zmianę funkcji obwodu spowodowaną zmianą parametrów X określamy jako

$$\Delta T = T(s,X+\Delta X) - T(s,X); \quad s=\sigma+j\omega \tag{7}$$

Określimy iloraz

$$b = \left|\frac{\Delta T}{T}\right|^2 \tag{8}$$

Ze względu na przypadkowy charakter zmian wektora ΔX b możemy uważać za zmienną losową. Określenie (8) eliminuje kwestię znaku stosunku $\frac{\Delta T}{T}$.

Na podstawie wzoru (6) wiemy, że najlepszym oszacowaniem zmiennej b będzie jej wartość oczekiwana (przeciętna)

$$W = E\{b\} = E\left\{\left|\frac{\Delta T}{T}\right|^2\right\} \tag{9}$$

Nie znamy na ogół dokładnego związku między zmianą funkcji ΔT a zmianą wektora ΔX.
Korzystając z rozwinięcia funkcji T na szereg Taylora wokół punktu X, otrzymamy

$$\Delta T = \nabla T(X)\Delta X + \frac{1}{2}\Delta X^t\, H\, T(X)\Delta X + \dots \tag{10}$$

gdzie:

$\nabla T(X) = \left[\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial T}{\partial x_n}\right]$ - gradient funkcji $T(X)$

$\Delta X^t = \left[\Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_n\right]$ - wektor odchyleń parametrów

$$HT(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_n^2} & \end{bmatrix}$$ - hesjan funkcji $T(X)$

Zakładając że odchylenia są dostatecznie małe możemy przyjąć aproksymację liniową

$$\Delta T = \nabla T(X)\,\Delta X \tag{11}$$

Czyli

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\nabla T(X)}{T} \Delta X \tag{12}$$

Weźmy pod uwagę odchylenia względne elementów obwodu, tzn. $\frac{\Delta x_i}{x_i}$.
Wtedy

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\nabla T(X)}{T} D\Delta\overline{X} = d^t \Delta\overline{X} \tag{13}$$

gdzie

$$\Delta\overline{X} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\Delta x_n}{x_n} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & x_2 & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & & & & x_n \end{bmatrix}$$

a $d = D \frac{[\nabla T(X)]^t}{T}$ wektor o wymiarze $n \times 1$.

Korzystając z (13) i (8), otrzymamy

$$b = (d^t\Delta\overline{X})^* d^t \Delta X = (d^t \Delta\overline{X})^* \Delta\overline{X}^t d = d^{t*} \Delta\overline{X}^* \Delta\overline{X}^t d = d^{t*} \Delta\overline{X} \Delta\overline{X}^t d \tag{14}$$

$*$ - oznacza wielkość zespoloną sprzężoną,

wtedy (9) będzie

$$W = E\left\{d^{t*} \Delta\overline{X} \Delta\overline{X}^t d\right\} = d^t \mu d \tag{15}$$

gdzie $\mu = E\{\Delta\overline{X}\Delta\overline{X}^t\}$ $n \times n$ macierz kowariancji odchyleń względnych elementów obwodu

$$\mu_{ij} = E\left\{\frac{\Delta x_i}{x_i} \frac{\Delta x_j}{x_j}\right\} \tag{16}$$

Zauważmy, że i-ty element wektora d jest równy

$$d_i = \frac{x_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = S^T_{x_i} \tag{17}$$

Jeżeli założymy, że macierz kowariancji jest diagonalna, tj.

$$\mu_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j \tag{1}$$

to

$$W = \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^T\right|^2 \sigma x_i^2 \tag{19}$$

gdzie

$\sigma_{x_i}^{\;2} = E\left\{\left(\Delta x_i / x_i\right)^2\right\}$ - wariancja odchylenia względnego i-tego elementu obwodu.

Zakładając jednakową wariancję wszystkich odchyleń elementów, otrzymamy

$$W = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^T\right|^2 \tag{20}$$

Porównując (1) i (19) widzimy, że

$$W = \sigma_x^2\, \Phi \tag{21}$$

4. Podsumowanie

Otrzymany wynik wskazuje na to, że wskaźnik (1) jest szczególnym przypadkiem zależności (15), która jest najogólniejszym wskaźnikiem wrażliwości układu, jeśli uwzględnić poczynione założenia. Założenia te nie są zbyt ograniczające. Założenia (3) spełnia szeroka klasa funkcji straty, np. błąd kwadratowy, bezwzględny frakcyjny [4]. Założenie (5) dotyczące dystrybuanty jest słuszne np. przy rozkładzie normalnym, jednostajnym [5] a więc obejmujących dość szeroki zakres zagadnień praktycznych.
Założenie (18) odpowiada przyjęciu do rozważań obwodu zbudowanego z elementów dyskretnych, a zależność (20) jest słuszna, jeśli te elementy posiadają tę samą tolerancję wykonania. W tym przypadku wskaźnik Φ jest zupełnie wystarczający. Wskaźnik (15) może być przydatny przy ocenie wrażliwości układów wykonywanych techniką scaloną, przy założeniu, że będziemy znać wpływ zmian wartości parametrów poszczególnych elementów na siebie.

LITERATURA

[1] Butler W.J., Haykin S.S.: Multiparameter sensitivity problems in network theory. Proc.IEE, December 1970.

[2] Schoefler I.D.: Synthesis of minimum sensitivity networks. IEEE Trans. CT-14, 1967.

[3] Rosenblum A., Ghausi M.S.: Sensitivity minimization in Active RC Networks. Journal of the Franklin Institute. August 1972.

[4] Deutsch R.: Teoria estymacji. PWN, Warszawa 1969.

[5] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.

Przyjęto do druku w październiku 1975.

ОБ ОДНОМ ИНДЕКСЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЦЕПИ

Р е з ю м е

В статье представлены возможности принятия индекса $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^{T}\right|^2$ как критерия минимализации многопараметрической чувствительности цепи. Доказывается, что этот индекс составляет особенный случай общей меры чувствительности

INDEX OF NETWORK SENSITIVITY

S u m m a r y

The article showx that the acceptance of the index $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left|S_{x_i}^{T}\right|^2$ as a criterion of minimalization of network sensitivity to the changes of all its elements is justified. It was proved that this index is a particular case of a more general sensitivity measure.