ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 66 Nr kol. 752

Leon LASEK

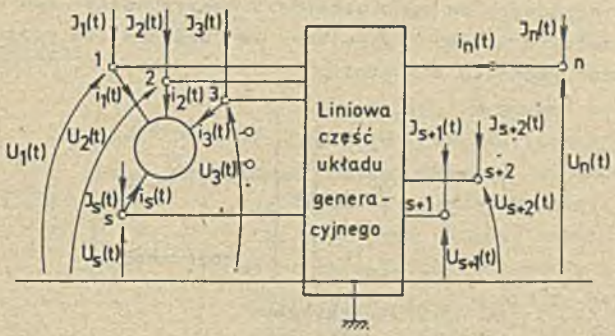
Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

QUASI-LINIOWY WIELOBIEGUNNIK W UKŁADACH GENERACYJNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono quasi-liniowe przybliżenie elementów nieliniowych, jakie występują w układach generacyjnych. Podstawą do określenia parametrów tego wielobiegunnika jest metoda bilansu harmonicznych. Podano sposób tworzenia macierzy admitancyjnej całego układu oraz warunki, jakie muszą być spełnione, aby powstały drgania. Z warunku tego można określić częstotliwość i amplitudy napięć węzłowych, które ustalą się w generatorze.

Pełną informację o układzie generacyjnym możemy uzyskać tylko wówczas, gdy do obliczeń przyjmiemy nieliniowy model układu. Pozwala on na wyznaczenie (obok częstotliwości) wartości amplitud poszczególnych napięć, jakie się w nim ustalą. Mimo że mówimy o modelu nieliniowym, to jednak większa część takiego układu składa się z elementów liniowych. Najczęściej tylko jeden element jest nieliniowy. Przystępując do analizy układu generacyjnego, rozdzielimy go na dwie części (rys. 1) - część liniową oraz wielobiegunnik nieliniowy, który łączy się z częścią liniową kolejnymi s zaciskami. Równania prądów źródłowych układu z rys. 1 mają postać:

$$J = \frac{d}{dt}\left\{C\cdot u\right\} + \int_0^t \ldots dt\left\{\Gamma\cdot u\right\} + \left\{G\,u\right\} + i \qquad (1)$$



Rys. 1. Układ generacyjny z wydzielonym wielobiegunnikiem nieliniowym

gdzie: przez $\mathbf{J}$ oznaczono wektor prądów źródłowych, a przez $\mathbf{u}$ wektor napięć węzłowych o postaciach:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1(t) \\ J_2(t) \\ \vdots \\ J_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{G}$ - macierze kwadratowe n-tego stopnia o elementach składających się kolejno z pojemności, odwrotności indukcyjności i przewodności. Reprezentują one liniową część układu generacyjnego. W ich skład może oczywiście wchodzić również i element czynny, o ile jego liniowy model stanowi wystarczająco dokładne przybliżenie w danym układzie generacyjnym.
Przez $\mathbf{i}$ oznaczono wektor prądów płynących do wielobiegunnika nieliniowego

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ i_s(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Aby układ z rysunku 1 był generatorem, to równanie (1) musi posiadać niezerowe rozwiązanie ze względu na $\mathbf{u}$ dla

$$\mathbf{J} = 0 \quad (J_k(t) = 0 \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

Podstawiając (4) do (1) otrzymujemy układ równań różniczkowych nieliniowych, który rozwiążemy korzystając z metody bilansu harmonicznych [4, 6, 7, 8, 11, 12, 15]. W metodzie tej zakłada się rozwiązanie. W naszym przypadku składowe wektora napięcia $\mathbf{u}$ będą przebiegami harmonicznymi. W pracy ograniczymy się tylko do tych układów generacyjnych, w których przebiegi napięć węzłowych są sinusoidalne o bardzo małej zawartości harmonicznych. W związku z tym przyjmujemy, że rozwiązaniem równań (1) i (4) może być wektor napięcia o postaci:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ U_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Podstawiając (4) i (5) do (1) otrzymamy:

$$\left\{-\omega \mathbf{C} + \frac{1}{\omega}\mathbf{\Gamma}\right\}\bar{\mathbf{U}} + \left\{\mathbf{G}\right\}\mathbf{U} + \mathbf{i} = 0 \tag{6}$$

gdzie:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U_1 \sin(\omega t+\varphi_1) \\ U_2 \sin(\ t+\ _2) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \sin(\ t+\ _n) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Pozostał do określenia wektor $\dot{I}$, określający prądy dopływające do wielobiegunnika nieliniowego.

Wielobiegunnik quasi-liniowy

Do budowy układów generacyjnych, szczególnie tych które wytwarzają napięcia zmienne bardzo mało zniekształcone, używa się pewnych szczególnych elementów nieliniowych. Elementy te świadomie wprowadzone do układu pozwalają minimalizować zawartość harmonicznych w przebiegach generowanych. Nasze dalsze rozważania ograniczymy do elementów nieliniowych, które spełniają dwie następujące własności:

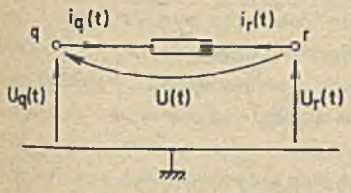
Własność 1. Wielobiegunnik nieliniowy, niezależnie od tego ile posiada zacisków, ma tylko jedną nieliniowość ($I = f(U)$) dominującą.

Własność 2. Nieliniowość ta (wyróżniona własnością 1) jest nieliniowością rezystancyjną, a więc przebieg funkcji $I = f(U)$ jest linią cienką bez histerezy, albo:

$$\oint I \, dU = 0$$

Wszystkie elementy spełniające te własności będziemy nazywali wielobiegunnikami quasi-liniowymi. Do najczęściej stosowanych wielobiegunników quasi-liniowych należą dwójniki i trójniki nieliniowe.

Dwójnik nieliniowy



Rys. 2. Dwójnik nieliniowy

Jako dwójniki stosowane są elementy bezwładnościowe (żarówka, termistor) oraz wszelkiego rodzaju układy diodowe obcinające. Wszystkie te elementy spełniają własności 1 i 2. Tego typu element nieliniowy przedstawiono na rysunku 2. Zgodnie z równaniem (5) napięcia $U_q(t)$ i $U_r(t)$ są napięciami sinusoidalnymi, a więc i $U(t)$ jest sinusoidalne o postaci:

$$U(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi_{qr}) \tag{8}$$

Przez rezystor nieliniowy pobudzony napięciem (8) płynie prąd [1, 13]

$$i_q(t) = -i_r(t) = g(U_M)U_M \sin(\omega t + \varphi_{qr}) + I^h(t) \tag{9}$$

gdzie:

$g(U_M)$ - ma wymiar konduktancji i zależy wyłącznie od amplitudy napięcia U_M, a nie zależy od fazy tego napięcia,

$I^h(t)$ - suma prądów harmonicznych płynących przez dwójnik.

Ponieważ

$$U(t) = U_q(t) - U_r(t)$$

więc:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_q(t) \\ i_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(U_M) & -g(U_M) \\ -g(U_M) & g(U_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_q(t) \\ U_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I^h(t) \\ -I^h(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

lub

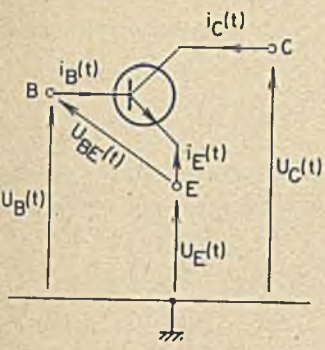
$$\mathbf{i} = \mathbf{g}(U_M)\mathbf{U} + \mathbf{I}(h) \tag{11}$$

przez $\mathbf{g}(U_M)$ oznaczono macierz admitancyjną dwójnika quasi-liniowego,

$$\mathbf{g}(U_M) = \begin{array}{c|c|c|} q & g(U_M) & -g(U_M) \\ r & -g(U_M) & g(U_M) \end{array} \tag{12}$$

Trójniki

Do tej grupy należą lampy, tranzystory polowe i bipolarne [6, 11, 15, 16, 17]. Szczególnie tranzystor bipolarny nie spełnia dokładnie własności 1. Mamy w nim jedną nieliniowość dominującą $I_C = f(U_{BE})$ (prąd kolektora jako funkcja napięcia baza - emiter), ale obok niej występują jeszcze inne nieliniowości [2, 14]. W pracach [3, 17] udowodniono, że uwzględnienie tylko nieliniowości głównej daje wystarczająco dokładne wyniki, przy czym powinna ona być uzupełniona o odcięcie prądowe na określonej wartości prądu kolektora. Rozważania zostaną ograniczone do tranzystora bipolarnego (rys. 3). Lampa i tranzystor polowy dokładnie spełniają własność 1. Dominujące są w nich nieliniowości: prąd anodowy jako funkcja napięcia siatka - katoda dla lampy oraz prąd drenu funkcji napięcia bramka - dren dla



Rys. 3. Tranzystor jako trójnik nieliniowy

tranzystora polowego. W związku z tym macierze admitancyjne tych wielobiegunników quasi-liniowych będą miały taką samą postać, jak tranzystora bipolarnego.

Podobnie jak i dla dwójnika, również i w tranzystorze napięcie

$$U_{BE}(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi_{BE})$$

a wektor prądowy $\mathbf{i}$ (rys. 3) wyznacza układ równań:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_B(t) \\ i_C(t) \\ i_E(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ g(U_M) & 0 & -g(U_M) \\ -g(U_M) & 0 & g(U_M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B(t) \\ U_C(t) \\ U_E(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I^h(t) \\ \\ -I^h(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

czyli:

$$\mathbf{i} = \mathbf{g}(U_M)\mathbf{U} + \mathbf{I}(h) \tag{14}$$

gdzie przez $\mathbf{g}(U_M)$ oznaczono macierz admitancyjną wielobiegunnika quasi-liniowego o postaci:

$$\mathbf{g}(U_M) = \begin{array}{c|c|c|c|} & B & C & E \\ \hline B & & & \\ \hline C & g(U_M) & & -g(U_M) \\ \hline E & -g(U_M) & & g(U_M) \\ \hline \end{array} \tag{15}$$

Należy tu wyraźnie zaznaczyć, że przedstawiona tu macierz $\mathbf{g}(U_M)$ wielobiegunnika reprezentuje tylko efekty nieliniowe występujące w tranzystorze. Pozostałe jego parametry (y_{11}, y_{12}, y_{22}) jako liniowe należy dopisać do części liniowej układu generacyjnego.

Tranzystor polowy jako rezystancja sterowana napięciem

Tranzystor polowy, oprócz tego, że może być użyty jako element czynny w układzie generacyjnym (patrz trójnik), posiada również własność pozwalającą wykorzystać go jako zmienną przewodność (rezystancję). Jeżeli napięcie zmienne $U_{DS}(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_{DS})$ przyłożone do tranzystora polowego (rys. 4) nie przekracza kilkudziesięciu mV, to można uważać ten element (widziany z zacisków D, S) za rezystancję (przewodność g) sterowaną napięciem stałym przyłożonym do zacisków GS [5]. Należy tu wyraźnie za-

o częstotliwości podstawowej do zera, otrzymamy wówczas układ równań o następującej postaci:

$$\left\{-\omega C + \frac{1}{\omega}\Gamma\right\}\bar{U} + \left\{G + g(U_M)\right\}U = 0 \qquad (20)$$

Dokonując podstawienia $\sin x = -j\,\mathrm{sh}\,jx$ oraz $\cos x = \mathrm{ch}\,jx$ w (20) otrzymamy po uporządkowaniu:

$$\left\{\left[j\omega C + \frac{1}{j\omega}\Gamma + G\right] + g(U_M)\right\}\hat{U} + \left\{\left[-j\omega C - \frac{1}{j\omega}\Gamma + G + g(U_M)\right\}\check{U} = 0 \qquad (21)$$

lub:

$$\left\{Y + g(U_M)\right\}\hat{U} + \left\{\bar{Y} + g(U_M)\right\}\check{U} = 0 \qquad (22)$$

gdzie:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} U_1 \exp\left[j(\omega t + \varphi_1)\right] \\ U_2 \exp\left[j(\omega t + \varphi_2)\right] \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \exp\left[j(\omega t + \varphi_n)\right] \end{bmatrix} \qquad \check{U} = \begin{bmatrix} U_1 \exp\left[-j(\omega t + \varphi_1)\right] \\ U_2 \exp\left[-j(\omega t + \varphi_2)\right] \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \exp\left[-j(\omega t + \varphi_n)\right] \end{bmatrix}$$

Y - jest macierzą admitancyjną liniowej części układu generacyjnego,
$\bar{Y}$ - jest macierzą sprzężoną do macierzy Y.

Układ równań będzie miał niezerowe rozwiązanie w przypadku, gdy:

$$\det\left\{Y + g(U_M)\right\} = 0 \qquad (23)$$

oraz

$$\det\left\{\bar{Y} + g(U_M)\right\} = 0 \qquad (24)$$

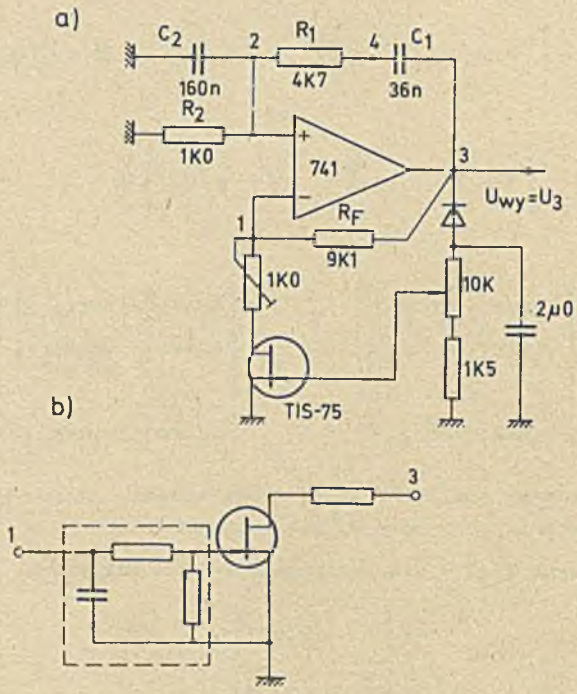
Z (23) wynika (24). Równanie (23) zawiera tylko dwie niewiadome. Niewiadomymi tymi są: napięcie U_M na elemencie quasi-liniowym oraz częstotliwość drgań układu generacyjnego. Często jednak interesuje nas wartość innego napięcia niż U_M. Wówczas jednak wystarczy obliczyć transmitancję napięciową od napięcia U_M do interesującego nas napięcia. Obliczenie to jest ułatwione faktem, że dysponujemy pełną macierzą admitancyjną układu generacyjnego. Wyznaczenie więc interesującej nas transmitancji sprowadza się do wyliczenia dwóch dopełnień algebraicznych z macierzy $\left\{Y + g(U_M)\right\}$.

Przykład. Dla generatora RC z mostkiem Wiena (rys. 5) wydzielono wielobiegunnik quasi-liniowy (rys. 5b). Dla tak wydzielonego wielobiegunnika zdjęto doświadczalnie charakterystyki statyczne, które następnie aproksymowano wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Dodatkowo pominięto prądy

detekcji dopływające do zacisku 3. Otrzymano następującą wartość przewodności:

$$g(|U_{GS}^{=}|) = g(U_3) = 1{,}02654 - 0{,}0045066\,U_3 + 0{,}00048935\,U_3^2 -$$

$$- 0{,}00003850196\,U_3^3 \text{ w } [\text{mS}] \text{ gdy } U_3 \text{ w } [\text{V}]$$



Rys. 5. Generator RC z mostkiem Wiena

W rozpatrywanym układzie napięcie U_3 jest równocześnie napięciem wyjściowym i węzłowym). Macierz admitancyjna całego układu generacyjnego, pozbawionego parametrów wzmacniacza scalonego, ma postać:

$$Y + g\,U_3 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & g(U_3)+G_F & & -G_F & \\ 2 & & G_1+G_2+j\omega C_2 & & -G_1 \\ 3 & -G_F & & G_F+j\omega C_1 & -j\omega C_1 \\ 4 & & -G_1 & -j\omega C_1 & G_1+j\omega C_1 \end{array}$$

gdzie:

$$G_1 = \frac{1}{R_1}; \quad G_2 = \frac{1}{R_2}; \quad G_F = \frac{1}{R_F}$$

Przyjmując, że wzmacniacz ten jest wzmacniaczem idealnym [10], możemy obliczyć:

$$\det\left\{Y + g(U_3)\right\} = \Delta_{3(1+2)} = 0$$

z tego

$$\mathrm{Im}\left\{\Delta_{3(1+2)}\right\} = g(U_3) - \frac{1}{R_F}\left[\frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2}\right] = 0$$

lub po podstawieniu danych:

$$-0{,}3850196\, U_3^3 + 4{,}8935\, U_3^2 - 45{,}066\, U_3 + 216{,}56 = 0$$

Układ ten ma jedno rozwiązanie rzeczywiste równe

$$U_3 = 7{,}2592786 \text{ V}$$

Jest to równocześnie wartość amplitudy napięcia węzłowego, jaka ustali się na wyjściu układu.

LITERATURA

[1] Antonow O.E., Ponkratow B.C.: Jeszczo raz o wozdjejstwji sumy garmoniczjeskih kolebanji na njelinjejnyje eljementy. Radiotechnika i elektronika. Tom XIX, z. 2, 1974.

[2] Bussgang J., Ehram L., Graham J.: Analysis of nonlinear system with multiple inputs, Proc. IEEE, vol 62, No 8, 1974.

[3] Bondarjenko B.G.: RC generatory sinusoidalnych koljebanji. Swjaz, Moskwa 1976.

[4] Cunningham W.J.: Analiza układów nieliniowych, PWN, Warszawa 1962.

[5] Eimbinder J.: Zastosowanie układów scalonych liniowych. WNT, Warszawa 1974.

[6] Groszkowski J.: Wytwarzanie drgań elektrycznych. PWN, Warszawa 1958.

[7] Hayashi Chihiro: Drgania nieliniowe w układach fizycznych. WNT, Warszawa 1968.

[8] Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT, Warszawa 1970.

[9] Leon O. Chua, Pen-Min Lin: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981.

[10] Lasek L., Witkowski J.J.: General approach to the analysis of networks having ideal operational amplifiers. IEE Journal on Electronic Circuits and Systems, July 1977.