ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 66 Nr kol. 752

Jerzy WITKOWSKI

Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

SKUTECZNA METODA OBLICZANIA WIELOKROTNYCH SUMARYCZNYCH DOPEŁNIEŃ ALGEBRAICZNYCH

Streszczenie. W artykule podano ogólną procedurę obliczania sumarycznych dopełnień algebraicznych, opartą na wstępnym uporządkowaniu ich sumarycznych wskaźników wierszy i kolumn. Pozwala to, w trakcie obliczania tych dopełnień, uniknąć niejednoznaczności powstających przy dodawaniu wiersza (kolumny) do innego wiersza (kolumny) skreślonego już wcześniej.

Przedstawiona metoda rozwiązuje jednoznacznie problem obliczania sumarycznych dopełnień algebraicznych i stanowi podstawę do napisania odpowiedniego programu na maszynę cyfrową.

1. Wstęp

Metoda napięć węzłowych jest szeroko wykorzystywana do analizy układów elektronicznych [1]. Zastosowanie jej np. do analizy układów elektronicznych z idealnymi wzmacniaczami operacyjnymi [2], określenia wpływu zmian temperatury na pracę układów elektronicznych, zawierających przyrządy półprzewodnikowe [3], prowadzi do obliczania wielokrotnych sumarycznych dopełnień algebraicznych.

Weźmy pod uwagę s-krotne sumaryczne dopełnienie algebraiczne o postaci:

$$\Delta_{(p_1+r_1)(k_1+l_1),\ldots,(p_s+r_s)(k_s+l_s)} = \Delta^{p_1+r_1,p_2+r_2,\ldots,p_s+r_s}_{k_1+l_1,k_2+l_2,\ldots,k_s+l_s} ; \qquad (1)$$

występujące w (1) wyrażenia

p_i+k_i, $i = 1,2,\ldots,s$ – będziemy nazywali sumarycznymi wskaźnikami dla wierszy,

zaś

k_i+l_i, $i = 1,2,\ldots,s$ – sumarycznymi wskaźnikami dopełnienia (1) dla kolumn.

Zapis (1) podaje, w jaki sposób z wyznacznika Δ n-tego stopnia, macierzy $\underline{Y}$ obwodu elektronicznego o n węzłach można obliczyć s-krotne ($s<n$)

sumaryczne dopełnienie algebraiczne: elementy wierszy p_i $(i = 1,2,\ldots,s)$ dodajemy do elementów odpowiednich wierszy r_i $(i = 1,2,\ldots,s)$, po czym skreślamy wiersze p_i, natomiast elementy kolumny k_i $(i = 1,2,\ldots,s)$ dodajemy do elementów kolumn l_i $(i = 1,2,\ldots,s)$ i skreślamy kolumny oznaczone numerami k_i. Uzyskany w ten sposób wyznacznik $(n-s)$-tego stopnia należy pomnożyć przez $(-1)^{\sigma+\varkappa}$, gdzie:

$\sigma = \sigma_r + \sigma_c$ - suma numerów skreślonych wierszy i kolumn, tj.

$$\sigma_r = \sum_{i=1}^{s} p_i, \quad \sigma_c = \sum_{i=1}^{s} k_i,$$

zaś

$\varkappa = \varkappa_r + \varkappa_c$ - całkowita liczba przestawień w ciągach skreślonych wierszy i kolumn, potrzebnych do uszeregowania ich w porządku rosnącym, przy czym $\varkappa_r$ oznacza liczbę takich przestawień w ciągu $p_1,p_2,\ldots,p_s$, natomiast $\varkappa_c$ - w ciągu $k_1,k_2,\ldots,k_s$.

Podana powyżej reguła obliczania (1) wynika bezpośrednio z rozważań zawartych w Dodatku 6.1.

W ogólnym przypadku, gdy wyrazy ciągu

$$p_1,r_1,p_2,r_2,\ldots,p_i,r_i,\ldots,p_s,r_s \tag{2}$$

są różne i jeśli podobnie jest w ciągu:

$$k_1,l_1,k_2,l_2,\ldots,k_i,l_i,\ldots,k_s,l_s \tag{3}$$

to obliczenia wielokrotnych sumarycznych dopełnień algebraicznych (1) nie napotykają na trudności. W praktyce jednakże warunki takie nie zawsze są spełnione, co utrudnia obliczenia w przypadku, gdy powstaje konieczność dodania wiersza (lub kolumny) do innego wiersza (kolumny) skreślonego już wcześniej.

W takim przypadku można skorzystać z równości (14) Dodatku 6.1 - ważnej także dla wielokrotnych sumarycznych dopełnień algebraicznych - i wyprowadzonych na tej podstawie dla prostych przypadków, reguł postępowania. Sposób ten nie jest jednak wygodny, gdyż prowadzi np. dla dopełnienia (1) do obliczania 4^s s-krotnych dopełnień algebraicznych (spośród których oczywiście część jest równa zero), co znacznie wydłuża obliczenia.

2. Obliczanie wielokrotnych sumarycznych dopełnień algebraicznych

W artykule zaproponowano nowy sposób podejścia do obliczania wielokrotnych sumarycznych dopełnień algebraicznych, polegający na wstępnym porządkowaniu sumarycznych wskaźników dla wierszy i kolumn. Porządkowanie to można przeprowadzić w kolejnych krokach podanych poniżej.

Rozważmy najpierw np. sumaryczne wskaźniki wierszy wielokrotnego sumarycznego dopełnienia algebraicznego i na początku procesu porządkowania przyjmijmy $i = 1$, wtedy:

1^0 sprawdzamy, czy pierwszy wskaźnik i-tego sumarycznego wskaźnika dla wierszy (tj. p_i w wyrażeniu (1)) powtarza się w następujących po nim wyrazach ciągu (2);

- jeśli nie, to i-ty sumaryczny wskaźnik pozostaje w miejscu, które zajmuje w wyrażeniu (1), ustalamy nową wartość i równą $i + 1$, po czym wracamy na początek kroku 1^0; czynności te wykonujemy tak długo, aż po kolejnym sprawdzeniu będzie $i = s$. Jeśli żaden z wyrazów ciągu (2) następujących po każdym z badanych wskaźników p_i $(i = 1,2,\ldots,s)$ nie równa się wskaźnikowi badanemu, oznacza to, że sumaryczne wskaźniki dla wierszy są - w sensie, jaki nadajemy temu pojęciu w tym artykule - uporządkowane;
- jeśli tak, to mogą wystąpić dwa przypadki:
  a) badany wskaźnik p_i jest identyczny z wyrazem r_i ciągu (2) występującym bezpośrednio po wskaźniku badanym, tj. powtórzenie ma miejsce w i-tym sumarycznym wskaźniku wierszy - oznacza to, że (patrz Dodatek 6.2) rozpatrywane wielokrotne sumaryczne dopełnienie algebraiczne jest równe zero,
  b) powtórzenie występuje w jednym z następnych sumarycznych wskaźników wierszy - wtedy

2^0 należy przestawić wskaźniki występujące w i-tym sumarycznym wskaźniku wierszy, po czym wracamy do kroku 1^0. Jeśli po zmianie kolejności wskaźników i-tego sumarycznego wskaźnika wierszy jego pierwszy wskaźnik (wskaźnik badany) powtórzy się w następujących po nim wyrazach ciągu (2), to rozpatrywany sumaryczny wskaźnik dla wierszy łącznie z sumarycznym wskaźnikiem (k_i+l_i) kolumn przesuwamy w wyrażeniu (1) na koniec, powiększamy wartość i do $i+1$, po czym wracamy do kroku 1^0. Jeśli opisanego procesu porządkowania sumarycznych wskaźników wierszy nie można doprowadzić do końca, tj. jeśli w trakcie wykonywania kroków 1^0 i 2^0 okaże się, że drugi raz ten sam sumaryczny wskaźnik należy przestawić na koniec wyrażenia (1) - oznacza to, że wskaźniki co najmniej dwóch sumarycznych wskaźników wierszy są identyczne. W takim przypadku wartość rozpatrywanego sumarycznego dopełnienia algebraicznego jest równa zero (patrz Dodatek 6.2, Własność c).

Po uporządkowaniu sumarycznych wskaźników wierszy należy podobnie postąpić z sumarycznymi wskaźnikami kolumn wielokrotnego sumarycznego dopełnienia algebraicznego, z tą różnicą, że w 2^{o} przestawienie sumarycznego wskaźnika kolumn na koniec wyrażenia (1) ma miejsce przy ustalonej już i niezmienianej kolejności sumarycznych wskaźników wierszy (gdyż wcześniej zostały one już uporządkowane). Przestawienie i-tego sumarycznego wskaźnika kolumn na koniec wyrażenia (1) wymaga (s-i) przesunięć sumarycznych wskaźników kolumn względem sumarycznych wskaźników dla wierszy.

Podobnie jak w przypadku sumarycznych wskaźników wierszy, jeśli procesu porządkowania sumarycznych wskaźników kolumn nie można doprowadzić do końca, oznacza to również, że wartość rozpatrywanego wielokrotnego dopełnienia algebraicznego jest równa zero. Porządkowanie (uzyskanie pożądanej kolejności) sumarycznych wskaźników wielokrotnego dopełnienia algebraicznego (1) można oczywiście rozpocząć także od sumarycznych wskaźników kolumn - sposób postępowania w takim przypadku nie różni się od podanego powyżej.

Po uporządkowaniu sumarycznych wskaźników wierszy i kolumn dopełnienia (1) można wykonać łatwo dodawanie i skreślenie jego odpowiednich wierszy i kolumn. Uzyskany w ten sposób wyznacznik (n-s)-tego stopnia należy pomnożyć przez czynnik

$$(-1)^{\sigma+\varkappa+\alpha+\beta},$$

gdzie:

$\alpha = \alpha_r + \alpha_c$ - całkowita liczba przestawień dokonanych w sumarycznych wskaźnikach wierszy (α_r) i kolumn (α_c),

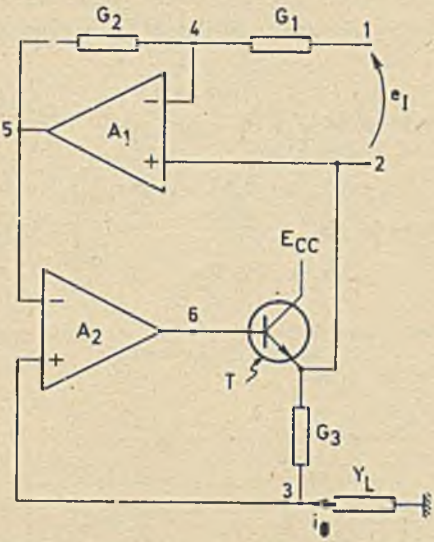
$\beta = \beta_r + \beta_c$ - całkowita liczba przestawień sumarycznych wskaźników wierszy w stosunku do sumarycznych wskaźników odnoszących się do kolumn (β_r) i przestawień sumarycznych wskaźników kolumn w stosunku do sumarycznych wskaźników wierszy (β_c).

Jeśli porządkowanie sumarycznych wskaźników dopełnienia (1) zaczęto od ustalenia właściwej kolejności sumarycznych wskaźników wierszy, to oczywiście: $\beta_r = 0$, zaś $\beta = \beta_c$.

3. Przykłady

Jeśli wzmacniacze operacyjne A_1, A_2 są traktowane jako wzmacniacze rzeczywiste, to transmitancję prądowo-napięciową źródła prądowego (rys. 1) można obliczyć jako:

$$Y_T(s) = -\frac{I_o(s)}{E_I(s)} = \frac{\Delta_{(a+d)b}}{\Delta_{(a+d)(a+d)}} = \frac{\Delta_{(1+2)3}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}. \qquad (4)$$



Rys. 1. Układ elektroniczny realizujący siłę prądo-motoryczną sterowaną napięciem e_I

gdyż zaciski wejściowe czwórnika: a = 1, d = 2; zacisk wyjściowy b = 3. Dla przypadku idealnych wzmacniaczy operacyjnych wzór (4) przybiera postać [2]:

$$Y_T(s) = -\frac{I_0(s)}{E_I(s)} = \frac{\Delta_{(1+2)3,5(4+2),6(5+3)}}{\Delta_{(1+2)(1+2),5(4+2),6(5+3)}}, \tag{5}$$

przy czym sumaryczne dopełnienia algebraiczne występujące w (5) obliczamy z macierzy admitancyjnej obwodu pozbawionego wzmacniaczy operacyjnych:

	1	2	3	4	5	6
1	G_1			$-G_1$		
2		G_3+y	$-G_3$			$-y_{11}-y_{21}$
3		$-G_3$	G_3+Y_L			
4	$-G_1$			G_1+G_2	$-G_2$	
5				$-G_2$	G_2	
6		$-y_{11}-y_{12}$				y_{11}

(6)

gdzie:

$y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ - parametry admitancyjne tranzystora T w układzie OE,

$y = y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}$.

Porządkując sumaryczne wskaźniki dopełnień algebraicznych występujących w (5), zgodnie z procedurą podaną w punkcie 2, otrzymamy:

$$\Delta_{(1+2)3,5(4+2),6(5+3)} = \Delta^{1+2,5,6}_{3,4+2,5+3} = (-1)^{\alpha+\beta}\Delta^{1+2,5,6}_{4+2,5+3,3} =$$

$$= (-1)^{\sigma+\varkappa+\alpha+\beta}\begin{vmatrix} G_1 & G_3-G_1+y & -y_{11}-y_{21} \\ 0 & -G_3 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2 & 0 \end{vmatrix} = G_1G_3(y_{11}+y_{21}), \tag{7}$$

gdyż:

$\sigma = \sigma_r + \sigma_c = 12 + 12 = 24,$

$\varkappa = \varkappa_r + \varkappa_c = 0 + 2 = 2,$

$\alpha = 0,$

$\beta = \beta_r + \beta_c = 0 + 2 = 2,$

a także:

$$\Delta_{(1+2)(1+2),5(4+2),6(5+3)} = \Delta^{1+2,\ 5,\ 6}_{1+2,4+2,5+3} = G_2(y_{11}+y_{21}) \tag{8}$$

ponieważ $\sigma = 22$, $\varkappa = \alpha = \beta = 0$.

Wstawiając (7) i (8) do (5) otrzymamy ostatecznie:

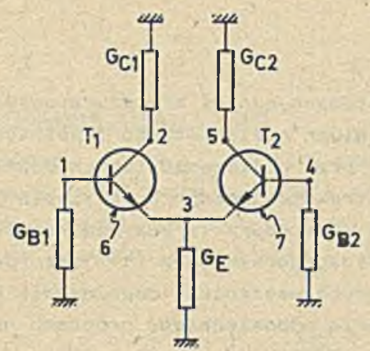
$$Y_T(s) = \frac{G_1G_3}{G_2} = \frac{R_2}{R_1R_3}.$$

Jak widać z przytoczonych obliczeń wyrażenia (5), jedynie dopełnienie algebraiczne występujące w liczniku tego wyrażenia wymagało uporządkowania sumarycznych wskaźników odnoszących się do kolumn.

Jako drugi przykład obliczymy dopełnienie algebraiczne:

$$\Delta_{(6+3)(6+3),(7+3)(7+3),(1+6)(1+6),(4+7)(4+7)} = \Delta^{6+3,7+3,1+6,4+7}_{6+3,7+3,1+6,4+7} \tag{9}$$

potrzebne do analizy wpływu zmian temperatury na pracę wzmacniacza różnicowego [3] (rys. 2), którego macierz dla zmian temperatury ma postać (węzły 6,7 są węzłami wewnętrznymi tranzystorów):



Rys. 2. Schemat do wyznaczenia wpływu zmian temperatury na pracę wzmacniacza różnicowego

	1	2	3	4	5	6	7
1	G_{B1}						
2		G_{C1}					
3			G_E				
4				G_{B2}			
5					G_{C2}		
6							
7							

(10)

Po uporządkowaniu, zgodnie z podaną procedurą, sumarycznych wskaźników dopełnienia (9), otrzymamy:

$$\Delta^{6+3,7+3,1+6,4+7}_{6+3,7+3,1+6,4+7} = (-1)^{\alpha+\beta}\Delta^{1+6,4+7,6+3,3+7}_{1+6,4+7,6+3,7+3} =$$

$$= (-1)^{\sigma+\varkappa+\alpha+\beta}\begin{vmatrix} G_{C1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{C2} \\ 0 & G_E+G_{B1}+G_{B2} & 0 \end{vmatrix} = G_{C1}G_{C2}(G_{B1}+G_{B2}+G_E). \qquad (11)$$

gdyż: $\sigma = \sigma_r + \sigma_c = 14 + 18 = 32$, $\varkappa = \varkappa_r + \varkappa_c = 2 + 0 = 2$, $\alpha = \alpha_r + \alpha_c = 3 + 0 = 3$, $\beta = \beta_r + \beta_c = 0$.

4. Wnioski

W artykule zaprezentowano ogólną procedurę porządkowania sumarycznych wskaźników wierszy i kolumn wielokrotnego dopełnienia algebraicznego o postaci (1), pozwalającą przy obliczaniu takich dopełnień na jednoznaczny sposób postępowania w trakcie dodawania do siebie elementów wierszy (kolumn) i ich skreślaniu; procedura ta pozwala również z góry określić przypadki, dla których wartość dopełnienia (1) jest równa zero. Podany sposób porządkowania sumarycznych wskaźników dopełnienia algebraicznego może być wykorzystany do napisania odpowiedniego programu na elektroniczną maszynę cyfrową [4].

LITERATURA

[1] Sigorski W.P.: Analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1965.

[2] Lasek L., Witkowski J.J.: General Approach to the Analysis of Networks Having Ideal Operational Amplifiers. IEE Electronic Circuits and Systems, 1977, vol. 1, No 4, pp. 133...136.

[3] Witkowski J.J.: Nodal Analysis of D.C. Bias Circuits. Electronics Letters, vol. 14, No 5, 2nd March 1978, pp. 137...139.

[4] Kosek E., Witkowski J.: Maszynowa analiza układów elektronicznych z idealnymi wzmacniaczami operacyjnymi. Prace III Krajowej Konferencji nt.: Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Stawiska k. Gdańska, 1979, ss. 471...475.

6. Dodatki

6.1. Sumaryczne dopełnienie algebraiczne

W celu obliczenia różnicy $\Delta_{pk} - \Delta_{pl}$ dwóch dopełnień algebraicznych, różniących się między sobą tylko jedną kolumną i utworzonych z tego samego wyznacznika Δ n-tego stopnia, rozkładamy dopełnienie Δ_{pk} np. względem elementów ω_{il} l-tej kolumny, a dopełnienie Δ_{pl} względem ω_{ik} k-tej kolumny i otrzymamy:

$$\Delta_{pk} - \Delta_{pl} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq p)}}^{n} \omega_{il}\, \Delta_{pk,il} - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq p)}}^{n} \omega_{ik}\, \Delta_{pl,ik}.$$

Korzystając z własności wyznaczników [1] mamy $\Delta_{pl,ik} = -\Delta_{pk,il}$, zaś z definicji dopełnienia algebraicznego jest:

$$\Delta_{pk} = (-1)^{6}\, M_{pk}.$$

zatem

$$\Delta_{pk} - \Delta_{pl} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq p)}}^{n} (-1)^{6} (\omega_{il} + \omega_{ik})(M_{pk})_{il} = \Delta_{p(k+l)} \qquad (12)$$

gdzie:

$6 = p + k$ – suma numerów skreślonego wiersza i kolumny wyznacznika Δ,

M_{pk} – minor wyznacznika Δ, uzyskany przez skreślenie p-tego wiersza i k-tej kolumny.

Z wyrażenia (12) wynika bezpośrednio sposób obliczania sumarycznego dopełnienia algebraicznego $\Delta_{p(k+l)}$.

Podobnie można wykazać, że

$$\Delta_{p(k+l)} - \Delta_{r(k+l)} = (-1)^{6} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} (\omega_{ri} + \omega_{pi}) \left[M_{p(k+l)}\right]_{ri} = \Delta_{(p+r)(k+l)}, \qquad (13)$$

gdzie:

$6 = p + k$,

$M_{p(k+l)}$ – odpowiedni minor wyznacznika Δ.

Korzystając z (12) oraz (13) otrzymamy dla pojedynczego sumarycznego dopełnienia algebraicznego tożsamość:

$$\Delta_{(p+r)(k+l)} = \Delta_{pk} + \Delta_{rl} - \Delta_{pl} - \Delta_{rk} \tag{14}$$

Obliczenie wielokrotnego sumarycznego dopełnienie algebraicznego różni się od podanego powyżej. Weźmy dla przykładu podwójne sumaryczne dopełnienie algebraiczne

$$\Delta_{(p_1+r_1)(k_1+l_1).(p_2+r_2)(k_2+l_2)}; \tag{15}$$

traktując dopełnienie algebraiczne $\Delta_{(p_1+r_1)(k_1+l_1)}$ wyznacznika Δ n-tego stopnia jako wyznacznik (n-1)-ego stopnia i obliczając sumaryczne dopełnienie algebraiczne tego wyznacznika, otrzymamy wyznacznik (n-2)-ego stopnia. Znak tego wyznacznika będzie określony przez czynnik $(-1)^{\sigma}$ gdzie $\sigma = p_1 + k_1 + p_2 + k_2$.

Będzie tak, jeśli $p_1 > p_2$ oraz $k_1 > k_2$, czyli, gdy wskaźniki podwójnego sumarycznego dopełniania algebraicznego są uporządkowane - w innym przypadku w wyznaczniku (n-1)-ego stopnia wiersz p_2-ty będzie w rzeczywistości wierszem (p_2-1)-ym, zaś k_2-ta kolumna - kolumną (k_2-1)-szą; zmienia to sumę σ o tyle, ile wynosi całkowita liczba przestawień w ciągach pierwszych i drugich wskaźników (tj. o liczbę $\varkappa$). Tak więc znak sumarycznego dopełnienia algebraicznego (15) będzie określony czynnikiem $(-1)^{\sigma+\varkappa}$.

6.2. Własności sumarycznego dopełnienia algebraicznego

Podane niżej własności odnoszą się zarówno do wierszy, jak i do kolumn sumarycznego dopełnienia algebraicznego.

Własność a. Zmiana kolejności wskaźników w nawiasie zmienia znak sumarycznego dopełnienia algebraicznego na przeciwny.

Własność tę można łatwo udowodnić korzystając ze wzoru (13):

$$\Delta_{(p+r)(k+l)} = \Delta_{p(k+l)} - \Delta_{r(k+l)} = -\left[\Delta_{r(k+l)} - \Delta_{p(k+l)}\right] = -\Delta_{(r+p)(k+l)}. \tag{16}$$

Z własności a wynika następujący wniosek:

Jeśli wskaźniki w jednym z nawiasów są identyczne, to wartość sumarycznego dopełnienia algebraicznego równa jest zero.

Wniosek ten jest oczywisty, gdyż po zamianie kolejności wskaźników w takim nawiasie sumaryczne dopełnienie algebraiczne nie ulegnie zmianie, ale z drugiej strony, zgodnie z własnością a, jego znak staje się przeciwny - oba warunki mogą być spełnione tylko wtedy, gdy wartość sumarycznego dopełnienia algebraicznego jest równa zero.

Własność b. Przestawienie dwóch sumarycznych wskaźników zmienia znak rozpatrywanego dopełnienia algebraicznego na przeciwny, tj.:

$$\Delta_{(p_1+r_1)(k_1+l_1).(p_2+r_2)(k_2+l_2)} = -\Delta_{(p_2+r_2)(k_1+l_1).(p_1+r_1)(k_2+l_2)}. \tag{17}$$

Własność tę można udowodnić np. dla dopełnienia (15) korzystając z własności wyznaczników i zależności (14); mamy wówczas:

$$\Delta_{(p_1+r_1)(k_1+l_1).(p_2+r_2)(k_2+l_2)} =$$

$$= \Delta_{p_1(k_1+l_1).p_2(k_2+l_2)} - \Delta_{r_1(k_1+l_1).p_2(k_2+l_2)} -$$

$$- \Delta_{p_1(k_1+l_1).r_2(k_2+l_2)} + \Delta_{r_1(k_1+l_1).r_2(k_2+l_2)} =$$

$$= - \Big[\Delta_{p_2(k_1+l_1).p_1(k_2+l_2)} - \Delta_{r_2(k_1+l_1).p_1(k_2+l_2)} -$$

$$- \Delta_{p_2(k_1+l_1).r_1(k_2+l_2)} + \Delta_{r_2(k_1+l_1).r_1(k_2+l_2)}\Big] =$$

$$= - \Delta_{(p_2+r_2)(k_1+l_1).(p_1+r_1)(k_2+l_2)}.$$

Z własności b wynikają następujące wnioski:

1° Jeśli wskaźniki w dwóch nawiasach odnoszących się do wierszy (kolumn) są identyczne, to wartość sumarycznego dopełnienia algebraicznego jest równa zero.

Jest to oczywiste, gdyż po przestawieniu tych nawiasów dopełnienie algebraiczne nie ulegnie zmianie, a zgodnie z własnością b należy w takim przypadku zmienić znak dopełnienia algebraicznego na przeciwny - oba warunki mogą być spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy sumaryczne dopełnienie algebraiczne będzie równe zero.

2° Jednoczesne przestawienie sumarycznych wskaźników wierszy i kolumn nie zmienia znaku dopełnienia algebraicznego, tj.:

$$\Delta_{(p_1+r_1)(k_1+l_1).(p_2+r_2)(k_2+l_2)} = \Delta_{(p_2+r_2)(k_2+l_2).(p_1+r_1)(k_1+l_1)}. \tag{18}$$

Wniosek ten wynika wprost z własności b zastosowanej do sumarycznego wskaźnika dla wierszy i sumarycznego wskaźnika kolumn.

Własność c. Jeśli uporządkowanie sumarycznych wskaźników dopełnienia algebraicznego nie jest możliwe, czyli jeśli okaże się, że jeden z sumarycznych wskaźników wierszy (kolumn) musi być po raz drugi przeniesiony na koniec ciągu sumarycznych wskaźników, to wartość rozpatrywanego dopełnienia algebraicznego jest równa zero.

Sytuacja taka może mieć miejsce, gdy:

- przynajmniej dwa sumaryczne wskaźniki wierszy (kolumn) są identyczne (patrz własność b, wniosek 1^o),
- kilka sumarycznych wskaźników różni się między sobą jednym z sumujących się wskaźników, tworząc dopełnienie algebraiczne o postaci:

$$\Delta_{(p+r)X,(r+a)Y,(a+p)Z} \tag{19}$$

gdzie:

X, Y, Z - sumaryczne wskaźniki kolumn.

Dowód, że dopełnienie (19) ma wartość równą zero można łatwo przeprowadzić, wykorzystując tożsamość (14) i korzystając z własności a.

$$\Delta_{(p+r)X,(r+a)Y,(a+p)Z} = -\Delta_{(r+p)X,(r+a)Y,(a+p)Z} =$$

$$= -\Delta_{rX,(r+a)Y,(a+p)Z} - \Delta_{pX,(a+r)Y,(a+p)Z} =$$

$$= -\Delta_{rX,aY,pZ} - \Delta_{pX,aY,(a+p)Z} = \Delta_{pX,rY,(a+p)Z} =$$

$$= -\Delta_{rX,aY,pZ} + \Delta_{pX,rY,aZ} = 0.$$

Recenzent: Doc. dr M. Jastrzębska

Wpłynęło do Redakcji 1.VII.1982 r.

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОКРАТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе представлено общую процедуру вычисления суммарных алгебраических дополнений, основанную на предварительном упорядочению суммарных показателей строк и столбцов. Это позваляет м.и. устранить во время вычисления этих дополнений, неоднозначности возникающие при прибавлении строки (столбца) к другой строке (столбцу) вычеркнутой уже раньше.

Представленый метод решает однозначно проблему вычисления суммарных алгебраических дополнений и является основой составления соответственной программы на цифровую машину.

AN EFFECTIVE METHOD OF CALCULATING MULTIPLE SUMMARY COFACTORS

S u m m a r y

The paper deals with the general procedure used in the process of determining multiple summary cofactors. This procedure - based on a preliminary arranging of the summary subscripts of rows and columns of the multiple summary cofactor - makes possible, among others, to avoid difficulties arising for example in the case of adding the elements of a row (or column) to some other row (column) previously deleted.

The presented method solves explicitly the problem of calculating summary cofactors and may be used in a suitable programme for computer-aided network design.