ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 67 Nr kol. 760

Andrzej AMELJAŃCZYK

Wydział Cybernetyki
Wojskowa Akademia Techniczna

OGÓLNE WŁASNOŚCI ROZWIĄZAŃ DOMINUJĄCYCH I NIEZDOMINOWANYCH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono ogólne zadanie optymalizacji sformułowane w przestrzeni z relacją. Szczególnym przypadkiem tak sformułowanego zadania jest zadanie optymalizacji wielokryterialnej. Korzystając z ogólnych twierdzeń dotyczących przestrzeni z relacją udowodniono szereg własności rozwiązań dominujących i niezdominowanych sformułowanych zadań optymalizacji. Własności te mogą być wykorzystane w konstruowaniu nowych algorytmów rozwiązywania zadań polioptymalizacji.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie wyboru elementu "optymalnego" ("najlepszego") nierozłącznie się wiążą z tzw. przestrzeniami z relacją [4], [5], [7], [10]. Pod pojęciem przestrzeni z relacją będziemy rozumieli parę uporządkowaną (B,R) gdzie:

B - dowolny zbiór$^{(*)}$,

$R \subset B \times B$ - dowolna, dwuczłonowa relacja w B.

Sformułowanie zagadnienia wyboru optymalnego elementu w kategoriach przestrzeni z relacją umożliwia bardzo ogólne potraktowanie optymalizacji, obejmując jej zakresem dowolną "regułę wyboru".

W tradycyjnym ujęciu zadanie optymalizacji można sformułować następująco [1], [5]:

A - przestrzeń decyzji (rozwiązań),

B - przestrzeń ocen rozwiązań,

$F: A \rightarrow B$ - funkcja kryterium, przyporządkowująca każdemu rozwiązaniu $x \in A$ jego ocenę $F(x) \in B$.

W praktyce najczęściej nie interesuje decydenta cały zbiór A, lecz tylko pewien jego podzbiór X (tzw. zbiór rozwiązań dopuszczalnych). Obiek-

(*) W szczególnym przypadku może być:

a) $B = \mathcal{R}$ - zadanie maksymalizacji (minimalizacji) funkcji rzeczywistej (programowanie matematyczne),

b) $B = \mathcal{R}^N$ - zadanie optymalizacji wielokryterialnej (np. w sensie Pareto, leksykografii itp.).

tem procesu wyboru "elementów najlepszych" nie jest bezpośrednio zbiór rozwiązań X, lecz zbiór Y ocen, odpowiadających rozwiązaniom dopuszczalnym, czyli obraz zbioru X

$$Y = F(X) = \{F(x) \in B \mid x \in X\} \tag{1}$$

Ażeby można było mówić o wyborze "elementu optymalnego", należy określić pojęcie "element lepszy" ("element niegorszy") od pewnego zadanego elementu $y \in Y$. Można tego dokonać wprowadzając tzw. relację dominowania $R \in B \times B$ [1], [2], [4], [5], [9]. Po określeniu zbioru X, odwzorowania F i relacji R można uważać, że zostało sformułowane zadanie optymalizacji (X,F,R) [1]. W samej rzeczy, do dalszych rozważań wystarczy określić tylko (Y,R), gdyż $Y = F(X)$. Dysponując relacją dominowania R można wyznaczyć zbiór ocen "najlepszych w sensie R" $\overset{*}{Y}(R) \subset Y$, a następnie wyznaczając jego przeciwobraz $\overset{*}{X}(R) = F^{-1}(\overset{*}{Y}(R)) = \{x \in X \mid F(x) \in \overset{*}{Y}(R)\}$ - określić odpowiadający mu zbiór decyzji "najlepszych".

W ten sposób każde zadanie wyboru elementu optymalnego można sprowadzić do analizy pewnej przestrzeni B z relacją $R \in 2^{B \times B}$ wraz z zadanym pewnym jej podzbiorem $Y \subset B$ [4], [5]. Stąd w dalszej części pracy nie będziemy się już zajmować ani zbiorem $X \subset A$, ani też odwzorowaniem $F: A \to B$ lecz jedynie przestrzenią B, pewnym jej podzbiorem Y oraz relacją $R \in 2^{B \times B}$. Zbiory B, Y, R mogą być dowolnymi (w tym sensie) zbiorami [4], [5].

2. Elementy ekstremalne zbioru w przestrzeni z relacją

Dana jest przestrzeń z relacją (B,R) oraz zbiór $Y \subset B$.

Określenie 1

Element $y \in Y$ nazywać będziemy elementem najmniejszym zbioru Y, jeśli $(y,z) \in R$ dla każdego $z \in Y \setminus \{y\}$. Zbiór wszystkich elementów najmniejszych zbioru Y oznaczać będziemy symbolem Y^R_{inf}. Analogicznie będziemy definiować i oznaczać zbiór elementów największych Y^R_{sup} zbioru Y przy relacji R. O relacji R nie musimy nic zakładać.

Określenie 2

Element $y \in Y$ nazywać będziemy elementem minimalnym zbioru Y, jeśli nie istnieje element $z \in Y \setminus \{y\}$, że $(z,y) \in R$. Zbiór wszystkich elementów minimalnych zbioru Y oznaczać będziemy symbolem Y^R_{min} (analogicznie definiujemy zbiór elementów maksymalnych Y^R_{max}). Elementy zbiorów Y^R_{inf}, Y^R_{sup}, Y^R_{min}, Y^R_{max} nazywać będziemy elementami ekstremalnymi zbioru Y. W przypadku gdy relacja R jest relacją porządku własności elementów ekstremalnych, można znaleźć w [7], [8], [10]. Symbolem $Y \overset{*}{\times} Y$ oznaczać będziemy zbiór postaci $\{(y,z) \in Y \times Y \mid y \neq z\}$.

TWIERDZENIE 1. [5]

Niech $R_1, R_2 \in 2^{B \times B}$ i $R_1 \subset R_2$

Dla dowolnego $Y \subset B$ zachodzi wtedy

a) $Y_{inf}^{R_1} \subset Y_{inf}^{R_2}$,

b) $Y_{sup}^{R_1} \subset Y_{sup}^{R_2}$,

c) $Y_{min}^{R_1} \supset Y_{min}^{R_2}$,

d) $Y_{max}^{R_1} \supset Y_{max}^{R_2}$.

TWIERDZENIE 2. [5]

Niech $Y \subset B$ oraz $Y \times Y \subset R \in 2^{B \times B}$

Zachodzi wtedy $Y_{inf}^{R} = Y_{sup}^{R} = Y$

TWIERDZENIE 3. [5]

Niech $Y \subset B$, $\bar{\bar{Y}} > 1$ oraz $Y \times Y \subset R \in 2^{B \times B}$

Zachodzi wtedy $Y_{min}^{R} = Y_{max}^{R} = \emptyset$

TWIERDZENIE 4. [5]

Niech $Y \subset B$, $\bar{\bar{Y}} > 1$, $R \in 2^{B \times B}$ oraz $Y \times Y \cap R = \emptyset$

Zachodzi wtedy $Y_{inf}^{R} = Y_{sup}^{R} = \emptyset$

TWIERDZENIE 5. [5]

Niech $Y \subset B$, $R \in 2^{B \times B}$ oraz $Y \times Y \cap R = \emptyset$

Zachodzi wtedy $Y_{min}^{R} = Y_{max}^{R} = Y$

TWIERDZENIE 6. [5]

Niech $R \in 2^{B \times B}$, $Y \subset B$ oraz $\bar{\bar{Y}}{}_{inf}^{R} > 1$ $(\bar{\bar{Y}}{}_{sup}^{R} > 1)$

Zachodzi wtedy $Y_{min}^{R} = \emptyset$ $(Y_{max}^{R} = \emptyset)$

TWIERDZENIE 7. [5]

Jeśli R-antysymetryczna, to $\bar{\bar{Y}}{}_{inf}^{R} \leqslant 1$ oraz $\bar{\bar{Y}}{}_{sup}^{R} \leqslant 1$.

TWIERDZENIE 8

Jeśli istnieje dokładnie jeden element najmniejszy (największy), to zbiór elementów minimalnych (maksymalnych) składa się co najwyżej z jednego elementu.

D o w ó d

Niech $\overline{\overline{Y^R_{inf}}} = 1$ i $\overset{*}{y} \in Y^R_{inf}$. Niech $y,z \in Y^R_{min}$ i $y \neq z$. Niech $\overset{*}{y} \neq y$ oraz $\overset{*}{y} \neq z$. Wynika stąd, że zbiór $Y^R_{min} = \emptyset$, co przeczy przyjętemu założeniu. Niech zatem $\overset{*}{y} = y$ lub $\overset{*}{y} = z$. Wynika stąd, że $(\overset{*}{y},z) \in R$ lub $(\overset{*}{y},y) \in R$, co wyklucza jednocześnie należenie y i z do Y^R_{min}.

TWIERDZENIE 9

Jeśli R jest relacją porządku oraz $\overline{\overline{Y^R_{inf}}} = 1$ ($\overline{\overline{Y^R_{sup}}} = 1$) to $Y^R_{min} = Y^R_{inf}$ ($Y^R_{max} = Y^R_{sup}$).

D o w ó d

Prawdziwość tego twierdzenia wynika z faktu, że dla relacji porządku $Y^R_{inf} \subset Y^R_{min}$ oraz z twierdzenia 8.

<u>Określenie 3</u>

Ograniczeniem dolnym zbioru Y nazywać będziemy taki element $y \in B$, że $(y,z) \in R$ dla każdego $z \in Y \setminus \{y\}$. Symbolem $l_d(Y,R)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru Y. Analogicznie definiuje się i oznacza zbiór ograniczeń górnych $l_h(Y,R)$ zbioru Y przy relacji R.

<u>Określenie 4</u>

Kresem dolnym zbioru Y w przestrzeni B z relacją R nazywać będziemy taki element $y \in l_d(Y,R)$, że $(z,y) \in R$ dla każdego $z \in l_d(Y,R) \setminus \{y\}$. Zbiór kresów dolnych zbioru Y oznaczać będziemy symbolem $\inf_R Y$. Analogicznie definiuje się zbiór kresów górnych $\sup_R Y$.

UWAGA 1

Z powyższych określeń wynika, że

$$a)\ \inf_R Y = [l_d(Y,R)]^R_{sup}$$

$$b)\ \sup_R Y = [l_h(Y,R)]^R_{inf}$$

TWIERDZENIE 10

Niech $Y \subset B$, $R \in 2^{B \times B}$. Zachodzi wtedy

$$a)\ Y^R_{inf} = \inf_R Y \cap Y$$

$$b)\ Y^R_{sup} = \sup_R Y \cap Y$$

D o w ó d

Łatwo pokazać, że dla dowolnych $Y \subset B$ i $R \in 2^{B \times B}$ zachodzi $Y^R_{inf} \subset \inf_R Y$. Należy wobec tego pokazać, że $\inf_R Y \cap Y \subset Y^R_{inf}$. Niech zatem $y \in \inf_R Y$ i $y \in Y$. Wynika stąd, że $(y,z) \in R$ dla każdego $z \in Y \setminus \{y\}$, czyli że $y \in Y^R_{inf}$.

4. Rozwiązanie zadania optymalizacji

Pozostając przy określeniu zadania optymalizacji w postaci trójki X,F,R zajmiemy się obecnie bardziej szczegółowo relacją dominowania R.

Zagadnienie ustalenia (zdefiniowania) odpowiedniej relacji dominowania jest niewątpliwie zagadnieniem kluczowym w trakcie formułowania zadania optymalizacji. Sformalizowanie zdania "element y jest lepszy od elementu z" (w sensie pewnego decydenta) często jest zadaniem łatwym.

W wielu przypadkach definiując relację dominowania wygodnie jest posłużyć się pojęciem funkcji zdaniowej [1], [8], $\varphi : B \times B \to \{0,1\}$ postaci:

$\varphi(y,z) \equiv$ "element y jest lepszy od elementu z", $(y,z) \in B \times B$.

A oto przykłady takiej funkcji zdaniowej:

Niech $B = R^N$; $y,z \in R^N$; $\mathcal{N} = \{1,2,\dots,N\}$, $\alpha \in [0,1]$, $\Lambda \subset R^N$ – pewien stożek wypukły,

$\varphi(y,z) =$ "$y_n \geqslant z_n$ dla każdego $n \in \mathcal{N}$" (2)

$\varphi(y,z) =$ "$y_n \geqslant z_n$ dla każdego $n \in \mathcal{N}$ oraz istnieje $l \in \mathcal{N}$, że $y_l > z_l$" (3)

$\varphi(y,z) =$ "$y_n \geqslant z_n$ dla każdego $n \in \mathcal{K} \subset \mathcal{N}$, $y_k \leqslant z_k$ dla każdego $k \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{K}$" (4)

$\varphi(y,z) =$ "istnieje $l \in \mathcal{N}$, że $y_l > z_l$ oraz $y_k = z_k$ dla $k < l$ lub $y = z$" (5)

$\varphi(y,z) =$ "$\max\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n \geqslant \max\limits_{n \in \mathcal{N}} z_n$" (6)

$\varphi(y,z) =$ "$\min\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n \geqslant \min\limits_{n \in \mathcal{N}} z_n$" (7)

$\varphi(y,z) =$ "$\alpha \max\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n + (1-\alpha) \min\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n \geqslant \max\limits_{n \in \mathcal{N}} z_n + (1-\alpha) \min\limits_{n \in \mathcal{N}} z_n$" dla ustalonego $\alpha \in [0,1]$ (8)

$\varphi(y,z) =$ "$z \in \{y\} + \Lambda$" (9)

Jak widać z przytoczonych przykładów pojęcie funkcji zdaniowej umożliwia wyrażenie nawet bardzo skomplikowanych (wręcz dowolnych) preferencji decydenta. Korzystając z funkcji φ relację dominowania R_φ zapiszemy następująco:

$$R_{\varphi} = \left\{(y,z) \in B \times B \mid \varphi(y,z)\right\} \tag{10}$$

Niech dane będą B; $Y \subset B$; $R \in 2^{B \times B}$. Interpretując Y jako zbiór ocen dopuszczalnych (zbiór obrazów rozwiązań dopuszczalnych [1]), zaś R jako relację dominowania, otrzymamy zadanie wyboru optymalnych (w sensie R) elementów ze zbioru Y.

Elementem optymalnym (najlepszym w uznaniu decydenta) nazywać będziemy taki element $\overset{*}{y} \in Y$, który jest lepszy w sensie przyjętej relacji dominowania R od wszystkich pozostałych elementów y ze zbioru Y [1], [2]. Własność tę zapiszemy następująco: $(\overset{*}{y}, y) \in R$ dla każdego $y \in Y \setminus \{\overset{*}{y}\}$. Element $\overset{*}{y}$ nosi nazwę elementu dominującego [1], a zbiór wszystkich elementów dominujących jest oznaczany symbolem Y_D^R

$$Y_D^R = \left\{\overset{*}{y} \in Y \mid (\overset{*}{y}, y) \in R \text{ dla każdego } y \in Y \setminus \{\overset{*}{y}\}\right\} \tag{11}$$

W przypadku gdyby zbiór Y_D^R był zbiorem pustym, co często się zdarza, decydent musi się zadowolić elementem $\overset{\circ}{y} \in Y$, od którego nie ma lepszego w zbiorze Y. Element ten nazywany jest elementem niezdominowanym w sensie R [1], [5], [9], [11], a zbiór takich elementów oznaczać będziemy symbolem Y_N^R

$$Y_R^N = \left\{\overset{\circ}{y} \in Y \mid \text{nie istnieje } y \in Y,\ y \neq \overset{\circ}{y}, \text{ że } (y, \overset{\circ}{y}) \in R\right\}. \tag{12}$$

Elementy dominujące i niezdominowane bywają ogólnie nazywane "elementami "optymalnymi".

W sytuacji, gdy zarówno Y_D^R, jak i Y_N^R są zbiorami pustymi, można skorzystać z tzw. rozwiązań kompromisowych [3], [11], [12] lub subrozwiązań [1], [9].

Analizując definicje zbiorów Y_D^R i Y_N^R łatwo zauważyć, że Y_D^R to nic innego, jak zbiór elementów najmniejszych Y_{inf}^R zbioru Y, zaś Y_N^R to zbiór elementów minimalnych zbioru Y. W ten sposób wszystkie twierdzenia, lematy, wnioski i uwagi sformułowane dla ogólnych przestrzeni z relacją [4, 6, 10] obowiązują również w zagadnieniach optymalizacji w tym ujęciu. Dotyczy to w szczególności zadań optymalizacji z różnego rodzaju relacjami porządku, a więc przestrzeni z porządkiem [5, 6, 10].

4. Optymalizacja w przestrzeniach z porządkiem

Zadania tej klasy charakteryzują się tym, że relacja dominowania R jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.

Wśród zadań tej klasy bardzo istotną rodzinę stanowią zadania sformułowane w liniowych przestrzeniach z porządkiem, zadanym odpowiednim stożkiem wypukłym [5, 10, 12].

W charakterze przykładu rozpatrzymy przypadek liniowej przestrzeni B (np. $B = \mathcal{R}^N$) z relacją R, generowaną wypukłym stożkiem $\Lambda \subset B$

$$R_\Lambda = \{(y,z) \in B \times B \mid z \in \{y\} + \Lambda\} \tag{12}$$

W praktyce inżynierskiej i ekonomicznej największe zastosowania znalazły relacje generowane stożkiem

$$\Lambda = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots,\lambda_N) \in \mathcal{R}^N \mid \lambda_n \leqslant 0, n \in \mathcal{N}\} \tag{13}$$

Stożek tego typu prowadzi do zadań optymalizacji wielokryterialnej [1, 5, 11], z relacją "$\geqslant$", zwaną relacją Pareto. Z uwagi na fakt, że bardzo często w tych przypadkach zbiór $Y_D^{R\Lambda}$ elementów dominujących jest zbiorem pustym, w literaturze tego zagadnienia najwięcej miejsca zajmuje problematyka związana z istnieniem i metodami wyznaczania elementów niezdominowanych (tzw. elementów optymalnych w sensie Pareto [5, 11, 12]).

Innym, często w praktyce spotykanym przypadkiem zadania optymalizacji w przestrzeni z porządkiem jest tzw. optymalizacja leksykograficzna (hierarchiczna). Relację $\propto_\geqslant$ dominowania leksykograficznego generuje odpowiedni stożek $\Lambda_{\propto_\geqslant} \subset \mathcal{R}^N$ Dla N = 2 możemy go zapisać następująco:

$$\Lambda_{\propto_\geqslant} = \{(\lambda_1,\lambda_2) \in R^2 \mid \lambda_1 < 0 \text{ lub } (\lambda_1 \leqslant 0 \text{ i } \lambda_2 \leqslant 0)\}$$

Relację $\propto_\geqslant$ można wprowadzić, korzystając z odpowiedniej funkcji zdaniowej φ (patrz wzór (5)) w następujący sposób:

$$\propto_\geqslant = \{(y,z) \in R^N \times R^N \mid \varphi(y,z)\} \tag{14}$$

Zadanie optymalizacji z relacją $\propto_\geqslant$ często nazywane jest zadaniem optymalizacji hierarchicznej. Wynika to stąd, że sytuacja ta odpowiada przypadkowi, gdy kryteria cząstkowe są uporządkowane od najważniejszego do najmniej ważnego. W celu uzyskania rozwiązania optymalnego, dokonuje się kolejnych kroków optymalizacyjnych (w postaci odpowiednich zadań programowania matematycznego), poczynając od zadania z kryterium najważniejszym. W ten sposób uzyskuje się bardzo prosty algorytm określenia zbioru $Y_D^{\propto_\geqslant}$ jako zbioru Y_N, danego rekurencyjnie

$$Y_n = \{y \in Y_{n-1} \mid Y_n = \sup_{y \in Y} Y_n\}, \quad n \in \mathcal{N}, \quad Y_0 = Y \tag{15}$$

Z zapisu (15) wynikają warunki na istnienie niepustego zbioru $Y_D^{\propto_\geqslant}$. Zbiór Y_N na ogół nie jest pusty.

Ogólnie w przypadku N wskaźników jakości F_n, $n \in \mathcal{N}$, można otrzymać N! leksykografii (tzn. różnych sposobów uporządkowań kryteriów cząstkowych). Oznaczmy symbolem $\mathcal{T}$ zbiór wszystkich funkcji następującej postaci:

$$\pi : \mathcal{N} \xrightarrow{na} \mathcal{N}$$

Relację dominowania leksykograficznego o numerze $\pi \in \Pi$ oznaczać będziemy symbolem $\alpha_{>}^{\pi}$, a odpowiadający jej stożek - $\Lambda_{\alpha_{>}}^{\pi}$. Łatwo pokazać, że dla każdego $\pi \in \Pi$ $> \subset \alpha_{>}^{\pi}$, [5]. Korzystając z twierdzenia 1 możemy zapisać:

$$a)\ Y_D^{\alpha_{>}^{\pi}} \supset Y_D^{>}$$

$$b)\ Y_N^{\alpha_{>}^{\pi}} \subset Y_N^{>}$$

Ponadto można pokazać, że dla każdego $\pi \in \Pi$ $Y_D^{\alpha_{>}^{\pi}} = Y_N^{\alpha_{>}^{\pi}}$.

Z wniosku tego wypływa bardzo praktyczna uwaga co do metody wyznaczania rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Można bowiem je wyznaczać jako rozwiązania leksykograficzne, korzystając N! razy z bardzo prostego algorytmu rekurencyjnego.

Do identycznych wniosków dochodzimy również rozpatrując zadania z dowolnym stożkiem Λ, zawierającym się w stożku $\Lambda_{\alpha_{>}}^{\pi}$ dla pewnego dowolnego $\pi \in \Pi$

TWIERDZENIE 11

Jeśli $Y \subset \mathcal{R}^N$ - zbiór skończony, to dla każdego $\pi \in \Pi$ $Y_D^{\alpha_{>}^{\pi}} \neq \emptyset$.

D o w ó d

Prawdziwość tego twierdzenia wynika bezpośrednio ze wzoru (15).

TWIERDZENIE 12

Jeśli $Y \subset \mathcal{R}^N$ - zbiór skończony oraz istnieje $\pi \in \Pi$ takie, że $R \subset \alpha_{>}^{\pi}$ lub $R \subset \alpha_{>}^{\pi}$, to $Y_N^R \neq \emptyset$.

D o w ó d

Wobec powyższych założeń mamy $Y_N^R \supset Y_N^{\alpha_{>}^{\pi}}$. Z twierdzenia 11 i faktu, że dla każdego $\pi \in \Pi$ $Y_D^{\alpha_{>}^{\pi}} = Y_N^{\alpha_{>}^{\pi}}$ wynika, że $Y_N^R \neq \emptyset$.

<u>Wniosek 1</u>

Dla każdego zadania ze skończonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych zawsze istnieje rozwiązanie optymalne w sensie Pareto.

5. Optymalizacja decyzji w warunkach niepewności

Zagadnienia optymalizacyjne tego typu tworzą specyficzną klasę zadań optymalizacji [3, 7]. Dalej zajmiemy się jedynie wąską grupą zagadnień tej klasy. Specyfiką zadań tego typu jest to, że efekt podjętej decyzji $x \in X \subset A$ zależy nie tylko od x, lecz również od warunków, w jakich decyzja ta będzie realizowana. Rozpatrzmy najprostszą wersję takiego zadania. Niech $\mathcal{N} = \{1,\dots,n,\dots,\mathcal{N}\}$ to zbiór numerów typów warunków, w jakich może się odbywać realizacja wybranej decyzji $x \in X$. Załóżmy, że nie jest znane prawdopodobieństwo p_n występowania poszczególnych warunków $n \in \mathcal{N}$. Załóżmy, że znane są wartości warunków pewnej funkcji zysku g w zależności od wyboru x i realizacji warunków n

$$g : X \times \mathcal{N} \to \mathcal{R} \tag{16}$$

gdzie $g(x,n) \in \mathcal{R}$ oznacza wielkość zysku (efekt końcowy) z podjętej decyzji, o ile byłaby ona realizowana w warunkach typu n. Zamiast warunkowej oceny decyzji $x \in X$, można wprowadzić jej wektorową ocenę $F : X \to R^N$ w postaci funkcji $F(x) = (F_1(x),\dots,F_n(x),\dots,F_N(x))$, $x \in X$ gdzie $F_n(x) = g(x,n)$ oznacza wartość decyzji x w przypadku występowania warunków typu n.

Powstaje wobec tego problem decyzyjny wyboru podzbioru elementów najlepszych $\overset{*}{Y} \subset Y = F(X)$, a zatem również problem wyboru odpowiedniej relacji dominowania R. W literaturze tego zagadnienia można spotkać bardzo wiele różnych propozycji wartościowania elementów zbioru Y [3, 7].

Rozpatrzmy relację R, którą można zdefiniować korzystając z funkcji zdaniowej (8). Niech $y,z \in R^N$, zaś $\alpha \in [0,1]$, tzw. współczynnik optymizmu decydenta. Jeśli decydent wybierze decyzję x, to jej oceną będzie $y = F(x)$. Decydent - optymista może się spodziewać zysku w kwocie $y_{\overset{*}{n}} = \max\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n$ (spodziewa się wystąpienia najkorzystniejszych dla siebie warunków $\overset{*}{n}$) - zatem liczba $y_{\overset{*}{n}}$ - będzie jego oceną decyzji x. Decydent - pesymista oceni tę samą decyzję x liczbą $y_{\overset{o}{n}} = \min\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n$, gdyż założy najgorsze warunki, tzn. $\overset{o}{n}$. Umiarkowany optymista (umiarkowany w stopniu $\alpha \in [0,1]$) decyzję x oceni liczbą $\alpha \max\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n + (1-\alpha) \min\limits_{n \in \mathcal{N}} y_n$.

Relacją Hurwitza $R_{H\alpha}$ nazywać będziemy realcją postaci:

$$R_{H\alpha} = \Big\{(y,z) \in R^N \times R^N \Big| \alpha \max_{n \in \mathcal{N}} y_n + (1-\alpha) \min_{n \in \mathcal{N}} y_n \geqslant \alpha \max_{n \in \mathcal{N}} z_n + (1-\alpha) \min_{n \in \mathcal{N}} z_n\Big\} \tag{17}$$

Zauważmy, że dla $\alpha = 1$ otrzymujemy tzw. relację optymisty R_o (patrz funkcja zdaniowa (6), zaś dla $\alpha = 0$ - relację pesymisty R_p (patrz (7)).

Przestrzenie z relacjami R_{H_α}, $\alpha \in [0,1]$ stanowią ciekawy przypadek przestrzeni quasi-uporządkowanych. Przestrzenie te nie są przestrzeniami stożkowymi, tzn. relacje R_{H_α} nie są generowane stożkami wypukłymi.

TWIERDZENIE 13. [3]

Dla każdego $\alpha \in [0,1]$ zachodzi $> \subset R_H$.

<u>Wniosek 2</u>

Dla każdego $\alpha \in [0,1]$ zachodzi:

$$a)\ Y^D_{>} \subset Y_D^{R_{H_\alpha}}$$

$$b)\ Y_N^{>} \supset Y_B^{R_{H_\alpha}}$$

<u>Wniosek 3</u>

Można łatwo pokazać, że zadanie wyznaczania elementów dominujących w sensie R_{H_α} sprowadza się w prosty sposób do zadania programowania matematycznego, którego rozwiązanie na ogół istnieje [3].

Wobec tych spostrzeżeń, praktycznie większą rolę w tym przypadku odgrywają rozwiązania dominujące nie zaś rozwiązania niezdominowane. W praktyce inżynierskiej bardzo ważnym zagadnieniem jest fakt czy otrzymane rozwiązania są optymalne w sensie Pareto. W przypadku rozważanej klasy zadań rozstrzyga to następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 14. [3]

Niech Y - zbiór ograniczony i domknięty. Zachodzi wtedy $Y_D^{R_{H_\alpha}} \cap Y_N^{>} \neq \emptyset$ dla każdego $\alpha \in [0,1]$. Oznacza to, że wśród rozwiązań zadania uwarunkowanego z relacją R_{H_α} istnieje rozwiązanie optymalne w sensie Pareto.

6. <u>Wnioski</u>

W pracy przedstawiono ogólne zagadnienia optymalizacji jako zadanie wyznaczania elementów ekstremalnych pewnych podzbiorów przestrzeni z relacją [4].

W ten sposób większość twierdzeń i wniosków dotyczących przestrzeni z relacją można bezpośrednio przenieść do optymalizacji. Takie ujęcie optymalizacji pozwala objąć jej zakresem bardzo szeroką klasę zadań wyboru "optymalnych elementów" z ustalonego podzbioru elementów dopuszczalnych. Omówiono niektóre przykłady optymalizacji dla wybranych typów relacji dominowania. Podano też szereg twierdzeń dotyczących własności otrzymanych rozwiązań. Szczególnie dużo miejsca poświęcono przykładom optymalizacji w przestrzeniach z porządkiem. Pokazano przy tym - w jaki sposób można w niektórych przypadkach korzystając z pewnych ogólnych twierdzeń, wyznaczyć rozwiązanie optymalne zadania, rozwiązując inne prostsze zadanie optymalizacji.

Interesujących przykładów optymalizacji dostarczają zadania formułowane na gruncie podejmowania decyzji w warunkach niepewności. Są to zadania optymalizacji z quasi-porządkiem. Interesującym zagadnieniem jest fakt, że odpowiadające tym zadaniom optymalizacji relacje dominowania nie są generowane przez stożki wypukłe. Zadania tej klasy są również interesujące ze względu na to, że na ogół odpowiadający im zbiór rozwiązań dominujących nie jest pusty (zbiór rozwiązań niezdominowanych natomiast często jest zbiorem pustym).

W praktyce inżynierskiej, a głównie projektowej bardzo ważną rolę odgrywają zadania ze skończonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych i wieloma kryteriami jakości. Własnościom rozwiązań dominujących i niezdominowanych tego typu zadań poświęcono część punktu 4. Pokazano, że zadania te zawsze mają rozwiązania leksykograficzne (hierarchiczne) i optymalne w sensie Pareto. Z przedstawionych tam własności wynika również metoda wyznaczania rozwiązań optymalnych w sensie Pareto tej klasy zadań.

LITERATURA

[1] Ameljańczyk A.: Rozwiązania dominujące i niezdominowane zadań optymalizacji wielokryterialnej. Przegląd Statystyczny, tom 25, Nr 3, 1978.

[2] Ameljańczyk A.: Multicriterial Solutionss of N-person cooperative game and their properties. Systems Science, vol. 6, no 3, 1980.

[3] Ameljańczyk A.: Wielokryterialne rozwiązania kompromisowe i ich zastosowania w zagadnieniach decyzyjnych uwarunkowanych przy znanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Praca dla IM PAN (powielona), cz. I i cz. II, Warszawa 1980, 1981.

[4] Ameljańczyk A.: O pewnych własnościach przestrzeni z relacją. Biul. WAT XXXI, 7, 1982.

[5] Ameljańczyk A.: Optymalizacja w przestrzeniach z relacją. Biul. WAT, XXXI, 7, 1982.

[6] Bergstressen K., Chnes A., Yu P.L.: Generalization of Domination Structures and Nondominated Solutions in Multicriteria Decision Making. JOTA, vol. 18, No 1, 1976.

[7] Kantorowicz L.: Sur les proprietes des espaces semiordonnes lineaires. C.R. Acad. Scienc. 202, 1936.

[8] Rasiowa H.: Wstęp do matematyki współczesnej. Warszawa 1971.

[9] Roth A.E.: Subsolutions and the Supercore of Cooperative Games. Mathematics of Operations Research, vol. 1, No 1, 1976.

[10] Wulich Z.: Wwiedienije w tieoriju połuporjdieczennych prostranstw. Moskwa 1961.

[11] Zeleny M.: Compromise Programming in Multiple Criteria Decision Making. Uniwersytet of South Carolina Press, 1976.

[12] Yu P.L., Leitmann G.: Compromise Solutions, Domination Structures and Salukwadze's Solution. JOTA, vol. 13, No 3, 1974.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Jan Szadkowski

Wpłynęło do Redakcji: 10.11.1982 r.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДОМИНИРУЮЩИХ И НЕДОМИНИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрена общая задача оптимизации сформулирована в пространстве с отношением. Частным случаем такой формулировки является задача многокритериальной оптимизации. Используя общие теоремы касающиеся пространств с отношением приведено ряд свойств доминирующих и недоминированных решений сформулированных задач оптимизации. Свойства эти могут быть употреблены при создавании новых алгоритмов решения задач многокритериальной оптимизации.

GENERAL PROPERTIES OF DOMINANT AND NONDOMINATED SOLUTIONS

S u m m a r y

In the paper a general optimization problem is formulated in the space with a relation. The multicriteria optimization problem is a particular case of this. A procedure is presented for proving a number of properties of dominant and nondominated solutions to the formulated optimization problems, by using general theorems concerning the spaces with a relation. These properties may be used to constructing new algorithms for solving polyoptimization problems.