

Jacek MISIAKIEWICZ

Instytut Automatyki
Politechniki Śląskiej

O SPOSOBACH PRZEDSTAWIANIA ZBIORU ROZWIĄZAŃ NIEZDOMINOWANYCH

Streszczenie. W pracy omówiono te sposoby zapisu zbioru rozwiązań niezdominowanych, które ułatwiają analizę kompromisu w zadaniach optymalizacji wektorowej. Zaprezentowano i zilustrowano przykładami graficzne przedstawienia tego zbioru dla dwóch i trzech kryteriów jakości. Wskazano na możliwość badania kompromisu także w zadaniach o większej liczbie kryteriów.

1. Wstęp

Znane obecnie metody rozwiązywania zadań polioptymalizacji pozwalają w wielu zadaniach na wyznaczanie zbioru rozwiązań niezdominowanych (Pareto- optymalnych). Użyteczność tego zbioru zależy głównie od umiejętności decydenta wykorzystania go do wyboru rozwiązania kompromisowego. Przy dużej liczbie rozwiązań niezdominowanych wybór ten może stanowić poważny problem. Z tego powodu często rezygnuje się z poszukiwania zbioru rozwiązań niezdominowanych i sprowadza się zadanie polioptymalizacji, na podstawie znanych a priori informacji o preferencjach decydenta, do zadania jednokryterialnego lub też stosuje się metody dialogowe [1], [5], [11].

W niniejszej pracy omówiono pewne sposoby przedstawiania zbioru rozwiązań niezdominowanych, które mogą być przydatne do poszukiwania dodatkowych informacji o badanym kompromisie. Ograniczono się do zadań, w których kryteria jakości są ciągłymi funkcjami zmiennych decyzyjnych.

2. Niektóre własności zbioru rozwiązań niezdominowanych

Zbiór rozwiązań niezdominowanych posiada pewne własności, które można wykorzystywać do jego wyznaczania i przedstawiania [7], [9].

W pracy przyjęto oznaczenia: $\underline{x} = [x_1, \dots, x_N]$ - wektor zmiennych decyzyjnych, $k_i = k_i(\underline{x})$, $i = 1, \dots, I$ - kryteria jakości.

W ł a s n o ś ć 1

Dla I ciągłych kryteriów jakości zbiór rozwiązań niezdominowanych jest tworem geometrycznym o wymiarowości $I-1$ lub mniejszej (przy degeneracji) w przestrzeni I wymiarowej.

W ł a s n o ś ć 2

Rozwiązania odpowiadające optimum poszczególnych kryteriów jakości k_i , $i = 1, \dots, I$, należą do zbioru rozwiązań niezdominowanych.

W ł a s n o ś ć 3

Jeżeli \underline{x} jest rozwiązaniem niezdominowanym dla kryteriów $k_1(\underline{x}), \dots, k_I(\underline{x})$, to jest także rozwiązaniem niezdominowanym dla kryteriów $k_1(\underline{x}), \dots, k_I(\underline{x}), k_{I+1}(\underline{x})$.

3. Sposoby graficznego przedstawiania kompromisu

Hiperpowierzchnię rozwiązań niezdominowanych w przestrzeni celu dla ciągłych kryteriów jakości można przedstawić w postaci równania:

$$F(k_1, k_2, \dots, k_I) = 0. \quad (1)$$

Równanie to można rozwiązać dla każdego kryterium k_i :

$$k_i = G_i(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_I). \quad (2)$$

W większości zadań uzyskanie explicite zależności (1) lub (2) jest niemożliwe i dlatego wyznacza się, zwykle metodami programowania wielokryterialnego, skończoną liczbę punktów (rozwiązań niezdominowanych) należących do hiperpowierzchni kompromisu.

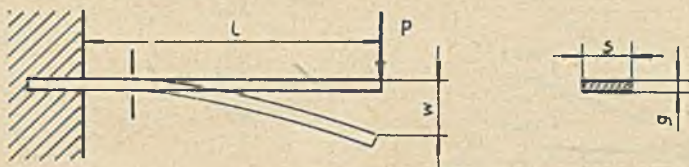
3.1. Kompromis dwukryterialny

Graficzne przedstawienie zbioru rozwiązań niezdominowanych nie sprawia trudności i jest od dawna wykorzystywane do celów popularyzatorskich, jak i do rozwiązywania zadań praktycznych [3], [4], [8], [9], [10], [12].

Kompromis dwukryterialny przedstawia się i analizuje się zazwyczaj w przestrzeni celu (rys. 4). Gdy kryteria są funkcjami tylko dwóch zmiennych decyzyjnych (lub da się je sprowadzić do takiej postaci), zbiór rozwiązań niezdominowanych można wyznaczyć w przestrzeni decyzyjnej stosując metodę graficzną opisaną w pracach [3], [8], [12].

PRZYKŁAD 1

Należy znaleźć optymalną konstrukcję sprężyny taśmowej zginanej (rys.1), pracującej w układzie pomiarowym siłowym.



Rys. 1. Sprężyna taśmowa zginana utwierdzona na jednym końcu

Przyjęto dwa kryteria jakości:

1) maksymalizacja energii sygnału wejściowego (by błąd tarcia układu był jak najmniejszy)

$$k_1 = E_x = \frac{1}{2} P w \rightarrow \max!,$$

gdzie:

P - siła (sygnał wejściowy),
w - strzałka ugięcia końca sprężyny,

2) minimalizacja błędu histerezy

$$k_2 = \delta = f(\sigma, M) \rightarrow \min!,$$

gdzie:

σ - naprężenie w skrajnych włóknach w przekroju utwierdzenia,
M - materiał, z którego wykonana jest sprężyna.

Zmienne decyzyjne

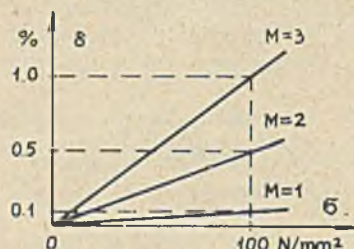
l, s, g, M - gdzie: l, s, g - wymiary sprężyny jak na rys. 1.

Zmienne M i g są dyskretne: dla brązu przyjmujemy M = 1, dla stali M = 2, dla miedzi M = 3; g - grubości wg katalogu blach (zależne od materiału).

Ograniczenia

$l_{\min} < l < l_{\max}$, $g_{\min} < g < g_{\max}$, $s < s_{\max}$ i $\frac{s}{g} > 3$ (stateczność przekroju poprzecznego), $\sigma \leq \sigma_{\max} = k_g = k_g(M)$.

Więzy



Rys. 2. Przebieg funkcji $\delta = f(G, M)$

$$w = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{4Pl^3}{Esg^3}, \quad E = E(M);$$

$$\sigma = \frac{6Pl}{sg^2};$$

$$\delta = f(G, M) = a(M)G$$

wg wykresu na rys. 2.

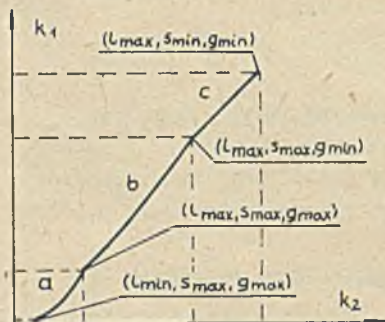
Dana jest maksymalna siła P.

Rozwiązanie

Ponieważ zmienna M przyjmuje tylko trzy wartości (trzy materiały), zadanie rozwiązano dla każdej wartości M osobno. Na użytek niniejszej pracy przyjęto ponadto upraszczające założenie, że zmienna g jest ciągła.

Po uwzględnieniu więzów kryteria mają następującą postać:

$$k_1 = \frac{2p^2 l^3}{Esg^3} \rightarrow \max!; \quad k_2 = \frac{6aPl}{sg^2} \rightarrow \min!$$



Rys. 3. Krzywa kompromisu dla ustalonego materiału ($M = M_1$)

Przebieg kompromisu można wyznaczyć analitycznie. Zbiór rozwiązań niezdominowanych (dla danego materiału) leży na krzywej (rys. 3), której poszczególne części można opisać równaniami:

$$a) \quad k_1 = A k_2^3;$$

$$b) \quad k_1 = B k_2^{3/2};$$

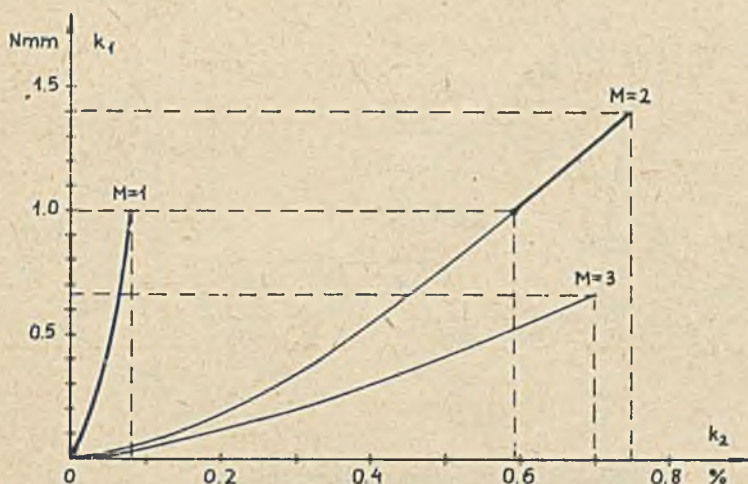
$$c) \quad k_1 = C k_2,$$

gdzie: A, B, C - parametry będące funkcją ograniczeń. Położenie zbioru na tej krzywej zależy od liczbowych wartości ograniczeń (określają one wartość k_{2max}).

Na rys. 3 zaznaczono wartości zmiennych decyzyjnych l, s, g, odpowiadające kompromisowi.

Po przyjęciu konkretnych wartości ograniczeń wykonano obliczenia. Na rys. 4 przedstawiono na wspólnym wykresie przebieg kompromisu dla każdego z trzech rozpatrywanych materiałów. Kryteria jakości, sformułowane w za-

daniu, najlepiej spełnia sprężyna z brązu. Stosując stal można w pewnym zakresie zwiększyć wartość energii kosztem jednak dużego wzrostu błędu histerezy.



Rys. 4. Przykład 1. Graficzne przedstawienie kompromisu dwukryterialnego; M = 1 - brąz BK 31, M = 2 - stal 50 HSA, M = 3 - mosiądz MZN 12

3.2. Kompromis trójkryterialny

Dla trzech kryteriów jakości każde rozwiązanie R jest opisane w przestrzeni celu wektorem $R = [k_1, k_2, k_3]$. W przypadku niezdegenerowanym zbior rozwiązań niezdominowanych jest reprezentowany przez pewną powierzchnię w przestrzeni trójwymiarowej. Graficzne przedstawienie zbioru na płaszczyźnie jest więc trudniejsze. W pracy [12] pokazano możliwości wykorzystania metody graficznego wyznaczania kompromisu w przestrzeni decyzyjnej (punkt 3.1) także dla trzech kryteriów jakości.

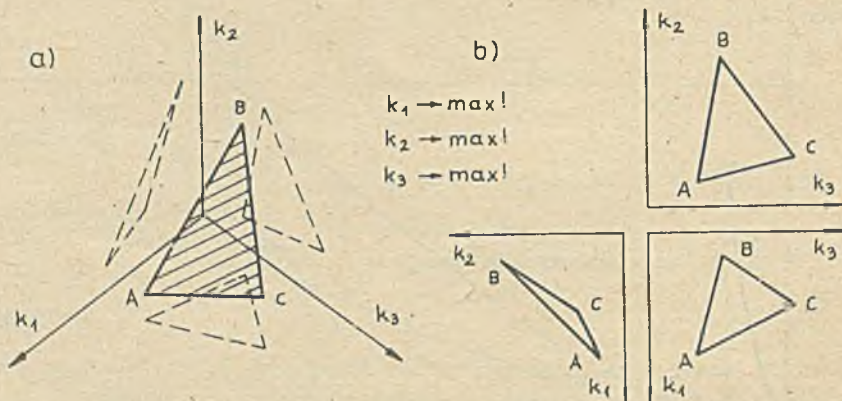
Rzut aksometryczny powierzchni kompromisu

Do przedstawiania zbioru rozwiązań niezdominowanych można posłużyć się rzutem aksometrycznym powierzchni kompromisu (rys. 5a).

Rzut aksometryczny umożliwia uzyskanie informacji jakościowej, a po wprowadzeniu modyfikacji, np. podaniu współrzędnych wyróżnionych punktów powierzchni, także pewnej informacji ilościowej o badanym kompromisie.

Ponieważ zwykle nie potrafimy określić analitycznie powierzchni kompromisu (równanie (1) lub (2)), aproksymuje się ją na podstawie wyznaczonych rozwiązań niezdominowanych, co jest niekiedy dość trudne, np. gdy rozwiązania te nie rozkładają się na niej równomiernie.

Zastosowanie urządzeń graficznych, np. monitora ekranowego, sprzężonych z EMC pozwala na rozszerzenie możliwości analizy kompromisu, np. można obracać rzut, wykonywać przekroje powierzchni.

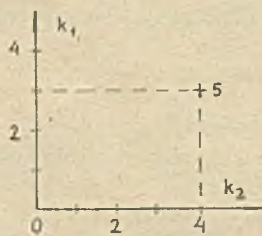


Rys. 5. Kompromis trójkryterialny

a) rzut aksonometryczny powierzchni kompromisu; b) rzut na płaszczyznę par kryteriów

Rzutowanie prostokątne na płaszczyznę par kryteriów

Obraz zbioru rozwiązań niezdominowanych w przestrzeni celu można rzutować na płaszczyzny odpowiadające poszczególnym parom kryteriów. Na rys. 5b przedstawiono rzuty na płaszczyzny par kryteriów powierzchni kompromisu z rys. 5a.

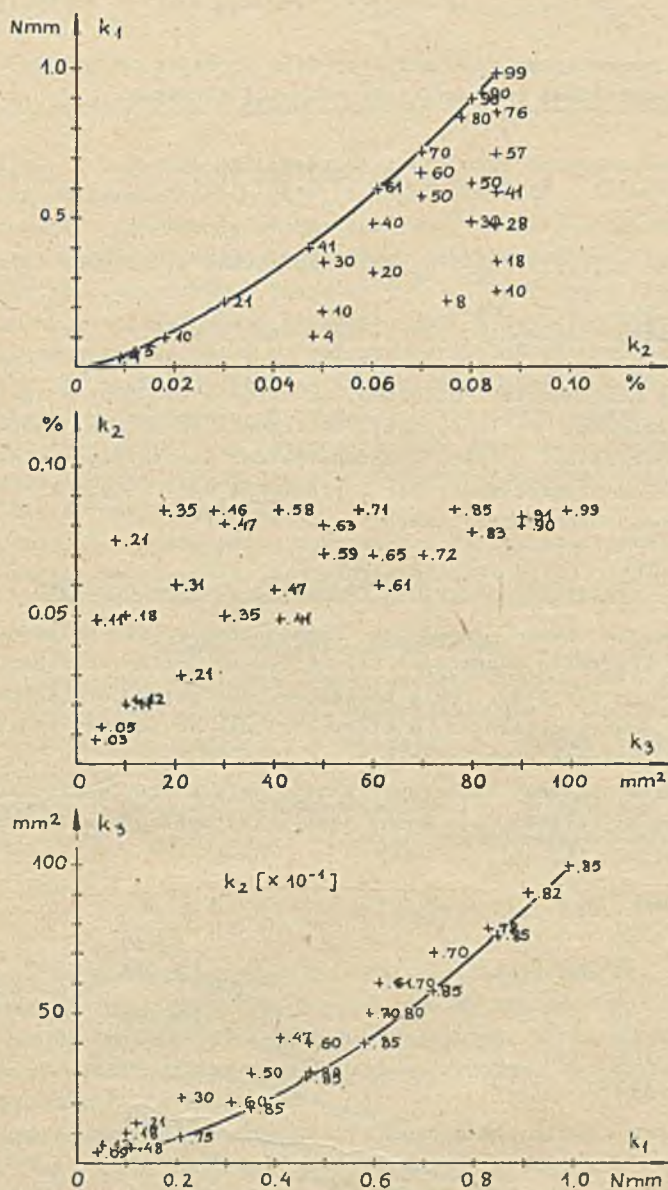


Rys. 6. Rzut obrazu rozwiązania $R = [k_1, k_2, k_3]$ na płaszczyznę k_1-k_2

W pracy [7] zaproponowano, by informację zawartą na płaszczyźnie par kryteriów powiększyć przypisując rzutom punktów powierzchni kompromisu wartość trzeciego "niewidocznego" kryterium, np. rozwiązanie $R = [3, 4, 5]$ opisujemy jak na rys. 6.

Postępując w ten sposób na dowolnej z rzutni umieszczamy wszystkie wygenerowane rozwiązania niezdominowane, uzyskując pełną informację o ich osiągnięciach.

Dla celów analizy kompromisu wygodnie jest narysować rzuty na wszystkie trzy płaszczyzny k_1-k_2 , k_2-k_3 , k_3-k_1 . Czynność ta może być zautomatyzowana. Na każdym z wykresów możemy wyznaczyć kompromis dwukryterialny (zgodnie z własnością 3 podaną w punkcie 2) i badać np. dla dowolnej pary rozwiązań ich odległość od poszczególnych kompromisów dwukryterialnych.



Rys. 7. Przykład 2. Kompromis trójkryterialny: rzutowanie na płaszczyznę par kryteriów

Nakładanie się opisów rozwiązań na rzutach można wyeliminować przez odpowiedni dobór skali rysunków.

PRZYKŁAD 2

Do zadania sformułowanego w przykładzie 1 wprowadzono trzecie kryterium - zażądaną, by sprężyna zajmowała jak najmniej miejsca:

$$k_3 = G = l w = \frac{4Pl^4}{Esg^3} \rightarrow \min! .$$

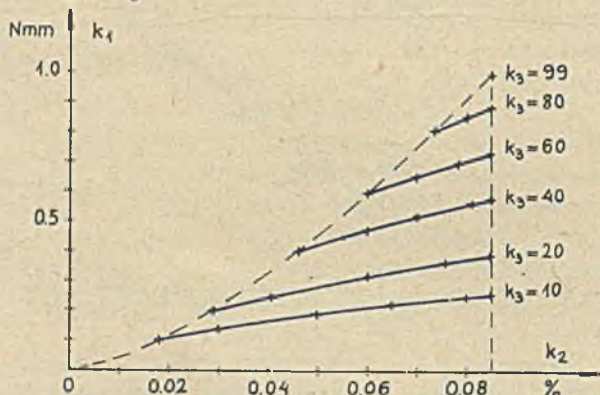
Zauważmy, że kryteria k_2 i k_3 są niesprzeczne i osiągają minimum dla rozwiązania $(l_{\min}, s_{\max}, g_{\max})$.

Zbiór rozwiązań niezdominowanych dla trzech kryteriów ($k_1 \rightarrow \max!$, $k_2 \rightarrow \min!$, $k_3 \rightarrow \min!$) wyznaczono za pomocą metody zmiennych ograniczeń. Podobnie jak w przykładzie 1 założono, że zmienna g jest ciągła i ustalono wartość zmiennej M (materiał). Obliczenia przeprowadzono dla sprężyny wykonanej z brązu. Na rys. 7 przedstawiono wygenerowane rozwiązania niezdominowane na płaszczyznach par kryteriów k_1 - k_2 , k_2 - k_3 , k_3 - k_1 (linią grubą zaznaczono odpowiednie kompromisy dwukryterialne).

Parametryzacja zbioru rozwiązań niezdominowanych

Zbiór rozwiązań niezdominowanych można przedstawić na jednej z płaszczyzn par kryteriów w postaci pęku krzywych parametryzowanych przez trzecie kryterium (rys. 8). Takie przedstawienie zbioru odpowiada rozwiązaniu zadania dwukryterialnego, w którym trzecie kryterium traktuje się jako dodatkowe zmienne ograniczenie.

Uproszczeniem opisanej tu parametryzacji jest poszukiwanie kompromisu pomiędzy dwoma kryteriami, gdy znany jest akceptowalny poziom trzeciego z kryteriów, np. $k_3 \leq k_3^*$ [6].



Rys. 8. Przykład 3. Kompromis trójkryterialny: parametryzacja zbioru rozwiązań niezdominowanych

PRZYKŁAD 3

Na rys. 8 przedstawiono sparametryzowany zbiór rozwiązań niezdominowanych z przykładu 2. Jako parametr przyjęto kryterium k_3 .

4. Kompromis pomiędzy czterema lub większą liczbą kryteriów jakości

Poszukiwanie związków pomiędzy poszczególnymi rozwiązaniami niezdominowanymi przy czterech i większej liczbie kryteriów nie jest łatwym zadaniem. Trudności przysparza zwłaszcza fakt, że przy przejściu od jednego rozwiązania niezdominowanego do drugiego zwykle nie dwa, lecz kilka kryteriów zmienia jednocześnie swoje wartości. Rzutowanie hiperpowierzchni kompromisu na płaszczyzny par kryteriów jest w zasadzie nieużyteczne. Niekiedy przeprowadza się tylko ograniczony przegląd zbioru rozwiązań niezdominowanych, np. szuka się kompromisu pomiędzy dwoma wybranymi kryteriami przy założeniu akceptowalnych poziomów pozostałych kryteriów (wprowadzeniu ich do ograniczeń), co wymaga jednak posiadania pewnej informacji apriorycznej lub też rozpatruje się szereg kompromisów dwukryterialnych pomiędzy kryteriami w zadaniu.

Do badania kompromisu można wykorzystać metody stosowane do analizy zbiorów punktów w przestrzeniach wielowymiarowych, np. analizę clusterową.

Liniowa regresja wielowymiarowa

W celu określenia własności rozpatrywanego kompromisu w pracy [7] zaproponowano dokonanie aproksymacji hiperpowierzchni rozwiązań niezdominowanych (na podstawie znalezionych rozwiązań) za pomocą obszarami ciągłej funkcji liniowej.

Dla każdego rozwiązania niezdominowanego \underline{x} , określonego w przestrzeni celu przez wektor $R = [k_1(\underline{x}), \dots, k_I(\underline{x})]$, aproksymacja liniowa ma postać:

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_I k_I + a_{I+1} = 0. \quad (3)$$

Równanie to można rozwiązać dla dowolnego kryterium k_1 , by określić wpływ zmian wartości pozostałych kryteriów na wartość k_1 ; jest ono prawdziwe tylko dla małych zmian wartości kryteriów. W ten sposób w niewielkim obszarze wokół każdego rozwiązania otrzymujemy explicite liniowy kompromis pomiędzy kryteriami.

Po przeprowadzeniu aproksymacji otrzymuje się grupy rozwiązań niezdominowanych (każda grupa składa się z rozwiązań określonych tym samym lub podobnym kompromisem). Następnie bada się zależności pomiędzy tymi grupami oraz wewnątrz grup, co pozwala na lepsze zrozumienie kompromisu w zadaniu.

Trudności w analizie kompromisu oraz duży nakład obliczeń związanych z wyznaczaniem zbioru rozwiązań niezdominowanych sprawiają, że obecnie w za-

daniach o więcej niż trzech kryteriach jakości stosuje się najczęściej metody pozwalające na bezpośrednie wyznaczenie rozwiązania kompromisowego, np. w [2] przedstawiono przykład jednopunktowej polioptymalizacji kilku charakterystyk częstotliwościowych układu elektronicznego.

5. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano wybrane sposoby przedstawiania zbioru rozwiązań niezdominowanych. Omówiono i zilustrowano przykładami graficzne przedstawienia tego zbioru dla dwóch i trzech kryteriów jakości, mając na uwadze ich dużą przydatność w uzyskiwaniu informacji o badanym kompromisie. Powierzchnię rozwiązań niezdominowanych dla trzech kryteriów jakości pokazano w rzucie aksjonometrycznym, w rzucie prostopadłym na płaszczyznę par kryteriów oraz w postaci parametrycznej. Wybór odpowiedniego sposobu przedstawiania zbioru zależy od decydanta. Wskazano na możliwości analizy kompromisu także dla większej liczby kryteriów oraz na występujące przy tym trudności.

Opisane w pracy sposoby przedstawiania zbioru rozwiązań niezdominowanych mogą być zautomatyzowane i zrealizowane w systemach CAD.

W zakres pracy nie wchodzi metoda wyboru rozwiązania kompromisowego; pewne wskazówki dotyczące wyboru można znaleźć w [3], [4], [6], [7], [9].

LITERATURA

- [1] Ameljańczyk A.: Elementy optymalizacji wielokryterialnej. Zeszyt 2: Wybrane metody rozwiązania. WAT, Warszawa 1981.
- [2] Balik F.: Jednoczesna optymalizacja kilku charakterystyk częstotliwościowych układu elektronicznego. "Archiwum Elektrotechniki", tom XXX, zeszyt 115 - 1/1981, ss. 11-28.
- [3] Bartel D.L., Marks R.W.: The Optimum Design of Mechanical Systems with Competing Design Objectives. Trans. ASME, Ser. B, Vol.96, No 1, February 1974, ss. 171-178.
- [4] Collins D.C.: Applications of Multiple Criteria Evaluation to Decision Aiding. [W:] Multiple Criteria Decision Making (ed. by Cochrane J.S., Zeleny M.). University of South Carolina Press, Columbia 1973, ss. 461-476.
- [5] Konarzewska-Gubała E.: Programowanie przy wielorakości celów. PWN, Warszawa 1980.
- [6] Mayne R.W., Sadler J.P.: Dyskusja do artykułu [3]. Trans. ASME, Ser. B, Vol. 96, No. 3, August 1974, ss. 1103-1104.
- [7] Meisel W.S.: Tradeoff Decisions in Multiple Criteria Decision Making. [W:] Multiple Criteria Decision Making (ed. by Cochrane J.S., Zeleny M.). University of South Carolina Press, Columbia 1973, ss. 461-476.
- [8] Misiakiewicz J., Tarnowski W.: Graficzna metoda polioptymalizacji z zastosowaniem autokreślarki. ZN AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Nr 857, Kraków 1981, ss. 65-72.
- [9] Peschel M., Riedel C.: Polioptymalizacja. WNT, Warszawa 1979.

- [10] Pokojski J., Wróbel J.: Porównanie wybranych metod polioptymalizacji przy badaniu pewnego modelu zawieszenia pojazdu. Materiały XXI Sympozjonu PTMTiS "Modelowania w mechanice", Gliwice-Wisła 1982, ss.377-388.
- [11] Słowiński R.: Metody wielokryterialnego programowania liniowego - próba syntezy. Materiały XXI Sympozjonu PTMTiS "Modelowanie w mechanice", Gliwice-Wisła 1982, ss. 389-424.
- [12] Iarnowski W.: Określenie zbioru rozwiązań nieulepszalnych (Pareto) w procesie optymalizacji w projektowaniu. Materiały IX Sympozjonu PKM, Gliwice 1979, ss. 223-232.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan Szadkowski

Wpłynęło do Redakcji: 20.10.1982 r.

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ИЗОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПОЛИОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Р е з ю м е

В статье обсуждены некоторые способы изображения множества полиоптимальных решений направленные на облегчение анализа компромисса в задачах векторной оптимизации. Представлены и пояснены примерами графические изображения этого множества для двух и трёх критериев качества. Указаны возможности изучения компромисса в задачах, в которых более трёх критериев качества.

SOME WAYS OF PRESENTATION OF A SET OF NONDOMINATED SOLUTIONS

С и ж м а г у

The paper shows some ways of presentation of a set of nondominated (Pareto-optimal) solutions. A few graphical ways, oriented on the decision-making aiding, for two and three criteria are described and illustrated by examples. Possibilities of an examining of the trade-off for more than three criteria are pointed out.