ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 67 Nr kol. 760

Roman SŁOWIŃSKI

Instytut Automatyki
Politechnika Poznańska

MODELOWANIE PREFERENCJI W WIELOKRYTERIALNYCH PROBLEMACH DECYZYJNYCH

Streszczenie. W pracy podjęto próbę syntetycznego przeglądu metod modelowania preferencji decydenta w wielokryterialnych problemach decyzyjnych z deterministycznym opisem konsekwencji. Przedstawiono modele preferencji w postaci jednej lub kilku relacji binarnych określonych na zbiorze decyzji dopuszczalnych oraz modele w postaci funkcji zdefiniowanych na tym zbiorze. Następnie omówiono metody syntezy globalnego modelu preferencji polegające na niekompensacyjnej agregacji preferencji (model z poziomami aspiracji, model leksykograficzny), agregacji do pojedynczej funkcji użyteczności lub pojedynczej relacji binarnej oraz agregacji dialogowej. Omówiono także powiązanie globalnego modelu preferencji z podstawowymi regułami decyzyjnymi.

1. Wstęp

Ogólnie mówiąc, problem decyzyjny jest problemem analizy zbioru decyzji dopuszczalnych A (rozwiązań dopuszczalnych), mającej na celu:

(i) albo wybór jednej decyzji uznanej za "najlepszą",

(ii) albo wyodrębnienie podzbioru decyzji uznanych za "dobre",

(iii) albo uszeregowanie decyzji od "najlepszej" do "najgorszej".

Zbiór A może być przy tym dany explicite, w formie listy, lub implicite, za pomocą ograniczeń matematycznych.

Przed pojawieniem się analizy wielokryterialnej definicja "dobrej" lub "najlepszej" decyzji wynikała z jednego tylko punktu widzenia (kryterium) reprezentowanego przez funkcję celu g. Funkcja g przypisuje każdej decyzji a liczbę w ten sposób, że $\forall a, b \in A$: a jest lepsze od $b \Leftrightarrow g(a) > g(b)$. W tym kontekście problem decyzyjny jest dobrze zdefiniowany matematycznie - zdefiniowawszy zbiór A i funkcję g, możemy badać istnienie i jednoznaczność rozwiązania najlepszego (optymalnego), a także skonstruować algorytm jego wyznaczania; leży to w zakresie klasycznych badań operacyjnych.

Rzadko jednak w realnym problemie decyzyjnym wystarczy ograniczyć się do jednego punktu widzenia, by wykorzystać wszystkie istotne informacje. Wynika stąd potrzeba analizy wielokryterialnej, która jednak napotyka na szereg trudności, zarówno na etapie formułowania problemu wielokryterialnego, jak i na etapie jego rozwiązywania. Główna trudnośc polega na tym, że problem wielokryterialny nie jest dobrze zdefiniowany matematycznie. W ogólności różne punkty widzenia są sobie przeciwstawne w tym sensie, że decyzja a może być "lepsza" od decyzji b ze względu na jedno kryterium i "gorsza" ze względu na inne. W tej sytuacji zarówno pozostawienie decydentowi całkowitej swobody, jak i wprowadzanie (świadome lub nie) założeń ograniczających w celu rozwiązania problemu metodę "jednokryterialną" będzie całkowicie bezowocne. W celu rozwiązania wielokryterialnego problemu decyzyjnego należy zastosować podejście leżące między tymi ekstremami, to znaczy zarówno wprowadzić pewne niezbędne założenia matematyczne, jak i wykorzystać informacje pochodzące od decydenta. W tym sensie analiza wielokryterialna stanowi przykład ewolucji roli nauki w procesie rozwiązywania problemów decyzyjnych: od zastępowania decydenta matematycznym modelem optymalizacji do wspomagania decydenta przez dostarczanie mu formalnego opisu możliwości na różnych etapach procesu [23].

B. Roy [20] wyróżnił cztery podstawowe etapy składające się na proces rozwiązywania wielokryterialnych problemów decyzyjnych:

(1) Definicja zbioru A i określenie typu problemu: (i), (ii) lub (iii).

(2) Analiza konsekwencji (atrybutów) i opracowanie kryteriów.

(3) Modelowanie i agregacja preferencji decydenta, czyli synteza globalnego modelu preferencji.

(4) Zastosowanie globalnego modelu preferencji w ramach odpowiedniej reguły decyzyjnej.

Zależnie od specyfiki konkretnego problemu istnieje możliwość powtarzania lub omijania niektórych etapów.

Szczególnie ważnym etapem powyższej procedury jest modelowanie i agregacja preferencji, bowiem od niego zależy zgodność otrzymanego rozwiązania problemu decyzyjnego z oczekiwaniami decydenta. W pracy tej dokonujemy przeglądu stosowanych modeli matematycznych preferencji (rozdział 2) i metod ich agregacji (rozdział 3). W zakończeniu pracy (rozdział 4) omawiamy także powiązanie globalnego modelu preferencji z podstawowymi regułami decyzyjnymi.

Zanim przejdziemy do zasadniczego tematu tej pracy, zauważmy, że decydent definiuje swoje preferencje wobec decyzji dopuszczalnych w oparciu o informacje o konsekwencjach tych decyzji. Z uwagi na ten związek scharakteryzujmy tu bliżej pojęcie konsekwencji.

Jednym z podstawowych założeń teorii decyzji jest to, że dwie różne decyzje mogą mieć różne konsekwencje. Natura konsekwencji stanowi o charakterze danej teorii decyzji. Konsekwencje mogą być:

- jednowymiarowe lub wielowymiarowe.

- zdeterminowane, przypadkowe lub niepewne,
- jednorazowe lub rozłożone w czasie.

Oznaczmy przez X zbiór możliwych konsekwencji, a przez $\underline{x} = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k]$ element tego zbioru. $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_i \times \ldots \times X_k$ jest k-wymiarową przestrzenią konsekwencji, $x_i \in X_i$, $i = 1,2,\ldots,k$. W przypadku jednowymiarowym $k = 1$. Ocena decyzji a lub przewidywanie jej konsekwencji może być:

- punktowe: $\underline{x}(a) = [x_1(a),\ldots,x_i(a),\ldots,x_k(a)]$,
- w formie rozkładu: $\{\delta^a(\underline{x})\}$ jest rozkładem wartości zdeterminowanych $\underline{x}(a)$ w przestrzeni konsekwencji X, natomiast $\{p^a(\underline{x})\}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa w przypadku konsekwencji przypadkowych,
- w formie przedziałów: $[x_i^-(a),\ x_i^+(a)]$, $i = 1,2,\ldots,k$.

W historii teorii decyzji konsekwencje przypadkowe i niepewne rozpatrywano znacznie wcześniej niż wielowymiarowe. Rozpatrzmy przypadek jednowymiarowy i oznaczmy przez E zbiór stanów przyrody e wzajemnie wykluczających się. Konsekwencje są zdeterminowane, jeżeli zbiór E zawiera tylko jeden stan. W przypadku konsekwencji przypadkowych zakłada się, że E zawiera co najmniej dwa stany. Każdemu stanowi e przypisane jest prawdopodobieństwo p(e) takie, że $\sum_e p(e) = 1$ lub $\int_e p(e)de = 1$; $x_e(a) \in X$ jest oceną a, jeżeli wystąpi stan e. Ocena decyzji a jest zatem wyrażona za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa $\{p^a(x)\}$ na zbiorze X, zdefiniowanego na podstawie znajomości par $\{x_e(a),\ p(e)\}$. Taką sytuację decyzyjną nazywa się sytuacją ryzyka - jest ona przedmiotem zainteresowania teorii użyteczności von Neumanna [12]. Różnica między konsekwencjami przypadkowymi a niepewnymi polega na tym, że w tym drugim przypadku nieznany jest rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze E. Jest to sytuacja skrajnej niepewności, która leży w zakresie teorii użyteczności Savage'a [24]. Podstawowym zabiegiem stosowanym w tym przypadku jest transformacja problemu decyzyjnego z sytuacji skrajnej niepewności do sytuacji ryzyka za pomocą subiektywnej estymacji prawdopodobieństw. Należy tu także wspomnieć o podejściu bayesowskim wykorzystującym twierdzenie o prawdopodobieństwie warunkowym [15]. W przypadku wielowymiarowym konsekwencje przypadkowe i niepewne są przedmiotem zainteresowania wieloatrybutowej teorii decyzji [9].

Zakres tej pracy jest ograniczony do konsekwencji wielowymiarowych, zdeterminowanych i jednorazowych.

2. Modelowanie preferencji - przegląd podstawowych modeli

Celem tego rozdziału jest przedstawienie podstawowych modeli preferencji, z pominięciem ich związku z konsekwencjami. Związek ten będzie widoczny przy omawianiu agregacji preferencji (rozdział 3), bowiem natura konsekwencji wpływa na metodykę agregacji.

Modele preferencji można ogólnie podzielić na dwie grupy:

- relacje binarne określone na zbiorze A,
- funkcje określone na zbiorze A.

2.1. Modelowanie za pomocą relacji binarnych

Podstawowym modelem dla każdej teorii decyzji wykorzystującej pojęcie preferencji jest relacja binarna zdefiniowana na zbiorze A decyzji dopuszczalnych.

2.1.1. Modele wykorzystujące jedną relację binarną R [3, 25]

Ta grupa modeli jest najbardziej klasyczna. Wykorzystuje ona definicję a R b: a jest co najmniej tak atrakcyjna jak b. Za pomocą tej jednej relacji można zamodelować trzy sytuacje podstawowe:

(i) a R b i nie b R a : a jest preferowana nad b,

(ii) a R b i b R a : a i b są równoważne,

(iii) nie a R b i nie b R a : a i b są nieporównywalne.

Dla wygody, w celu zdefiniowania sytuacji (i) i (ii) wprowadza się relacje P i I:

$$a \; P \; b \Longleftrightarrow a \; R \; b \quad \text{i} \quad \text{nie} \quad b \; R \; a$$

$$a \; I \; b \Longleftrightarrow a \; R \; b \quad \text{i} \quad b \; R \; a$$

Podstawowe właściwości relacji binarnych wykorzystywane przy tworzeniu różnych modeli są następujące:

w_1 : zwrotność : $\forall a$: a R a
w_2 : zupełność : $\forall a, b \in A$: a R b lub b R a
w_3 : przechodniość : $\forall a, b, c \in A$: a R b i b R c $\Rightarrow$ a R c
w_4 : symetria : $\forall a, b \in A$: a R b $\Rightarrow$ b R a
w_5 : asymetria : $\forall a, b \in A$: a R b $\Rightarrow$ nie b R a.

Pierwsza grupa modeli zawiera relacje przechodnie:

- preporządek zupełny jest relacją R spełniającą w_1, w_2, w_3. Jest to najczęściej stosowany model w teorii decyzji. W tym przypadku P (spełniająca w_3, w_5) jest porządkiem częściowym, a I (spełniająca w_1, w_3, w_4) jest relacją równoważności,
- preporządek częściowy jest relacją R spełniającą w_1, w_3.
- porządek zupełny jest preporządkiem zupełnym takim, że $I = \emptyset$, czyli relacją R spełniającą w_2, w_3, w_5.
- porządek częściowy jest relacją R spełniającą w_3, w_5.

Druga grupa modeli zawiera relacje zupełne nieprzechodnie:

- Quasi-porządek jest relacją zupełną R taką, że $P\ I\ P \subset P$, tzn., $\forall a, b, c, d \in A$: $a\ P\ b,\ b\ I\ c,\ c\ P\ d \Longrightarrow a\ P\ d$. $P^2 \cap I^2 = \phi$, tzn., nie $\exists a, b, c, d \in A$ takie, że $a\ P\ b$, $b\ P\ c$ i $a\ I\ d$, $d\ I\ c$. Relacja ta jest szczególnie interesująca z tego względu, że pozwala na wprowadzenie pojęcia progu równoważności (por. par. 2.2).
- Porządek przedziałowy jest relacją zupełną R taką, że $P\ I\ P \subset P$.
- Turniej jest relacją R spełniającą w_2, w_5. Relację tę otrzymujemy wtedy, gdy porównuje się elementy zbioru A parami bez możliwości stwierdzenia równoważności.
- Mecz jest relację R spełniającą w_2.

2.1.2. Modele wykorzystujące więcej niż jedną relację binarną

Niedawno B. Roy [17] zaproponował przyjęcie czterech sytuacji podstawowych przy modelowaniu preferencji, rozróżniając w przypadku dotychczasowej preferencji dwie sytuacje: preferencję silną i preferencję słabą. Każdej z czterech sytuacji podstawowych przypisuje on inną relację, stosując następujące oznaczenia:

P : preferencja silna	I : równoważność
Q : preferencja słaba	R : nieporównywalność

Oprócz relacji wyrażających sytuacje podstawowe Roy wprowadza pojęcie sytuacji zgrupowanych w celu umożliwienia pewnych dwuznaczności przy wyborze jednej z sytuacji podstawowych:

$a \sim b$: brak preferencji : $a\ I\ b$ lub $a\ R\ b$ bez możliwości rozróżnienia,

$a > b$: preferencja : $a\ P\ b$ lub $a\ Q\ b$ bez możliwości rozróżnienia,

$a\ J\ b$: przypuszczenie preferencji : $a\ Q\ b$ lub $a\ I\ b$ bez możliwości rozróżnienia,

$a\ K\ b$: K-preferencja : $a\ P\ b$ lub $a\ R\ b$ bez możliwości rozróżnienia,

$a\ S\ b$: przewyższanie : $a\ P\ b$ lub $a\ Q\ b$ lub $a\ I\ b$ bez możliwości rozróżnienia.

2.1.3. Modele wykorzystujące relację binarną wartościowaną

W tym zakresie najbardziej znane są modele wykorzystujące probabilistyczną relację preferencji [11]. $p(a,b)$ jest prawdopodobieństwem tego, że a jest co najmniej tak atrakcyjne jak b. Modele te zakładają, że preferencja mierzona za pomocą miary probabilistycznej jest zupełna. Dlatego modele te spełniają: $p(a,b) + p(b,a) = 1$, $\forall a,b \in A$. $p(a,b) = 1$ reprezentuje sytuację preferencji zdeterminowanej, $p(a,b) = 1/2$ reprezentuje sytuację równoważności zdeterminowanej.

W [5 rozdz. 3] zastosowano relację wartościowaną zwaną relacją preferencji taką, że:

- $R_{a \succ b}$: stopień preferencji silnej a nad b.
- $R_{a \succ b} + R_{b \succ a} \leqslant 1$.

Wielkość $R_{a \sim b} = 1 - (R_{a \succ b} + R_{b \succ a})$ interpretuje się jako stopień równoważności między a i b. $R_{a \succ b} + R_{a \succ b} = 1$ reprezentuje sytuację zgrupowaną odpowiadającą preferencji, tak jak to ma miejsce w przypadku dominacji stochastycznej (a dominuje b) [6]. Z kolei, $R_{a \succ b} = R_{b \succ a} = 1/2$ reprezentuje silną nieporównywalność. $R_{a \succ b}$ można zdefiniować za pomocą relacji probabilistycznej: $p(a,b) = R_{a \succ b} + 1/2\ R_{a \sim b}$, która spełnia $p(a,b) + p(b,a) = 1$.

Znane są także próby modelowania preferencji za pomocą relacji rozmytych [14, 18].

2.2. Modelowanie za pomocą funkcji

Drugim podstawowym modelem jest funkcja zdefiniowana na zbiorze A nazywana, zależnie od kontekstu, funkcją użyteczności, funkcją wartości lub funkcją kryterialną. Istnieje bogata literatura poświęcona funkcyjnym reprezentacjom preferencji (por. np. [3]).

2.2.1. Funkcje kryterialne, quasi-kryterialne, prekryterialne i pseudokryterialne [17]

g jest pseudokryterium, jeżeli istnieją dwie funkcje progowe q(g) i s(g) takie, że jeżeli $g(a) \geqslant g(b)$, to:

(i) $g(a) > g(b) + s(g(b)) \Longleftrightarrow a\ P\ b$: preferencja silna,

(ii) $g(b) + q(g(b)) < g(a) \leqslant g(b) + s(g(b)) \Longleftrightarrow a\ Q\ b$: preferencja słaba,

(iii) $g(b) \leqslant g(a) < g(b) + q(g(b)) \Longleftrightarrow a\ I\ b$: równoważność.

Ponadto progi muszą spełniać właściwość polegającą na tym, że funkcje $g + q(g)$ i $g + s(g)$ są monotoniczne, niemalejące:

$$g \geqslant g' \Longrightarrow g + q(b) \geqslant g' + q(g') \quad \text{i} \quad g + s(g) \geqslant g' + s(g).$$

Porównywanie a i b za pomocą pseudokryterium daje pięć możliwych odpowiedzi zamiast tradycyjnych trzech (a P b, b P a, a I b). Zbiór relacji binarnych (P,Q,I) wynikających z pseudokryterium nazywa się pseudoporządkiem [22].

Quasi-kryterium jest pseudokryterium takim, że $s(g) = q(g) > 0$. W tym przypadku pseudoporządek redukuje się do quasi-porządku.

Prekryterium jest pseudokryterium takim, że $s(g) = 0$.

Kryterium prawdziwe jest pseudokryterium takim, że $s(g) = q(g) = 0$. W tym przypadku pseudoporządek redukuje się do preporządku zupełnego.

Jedynie ten ostatni przypadek jest szeroko wykorzystywany w teorii decyzji. Wprowadzenie progów jest jednak interesujące w wielu sytuacjach decyzyjnych. Niestety, związana z tym utrata właściwości przechodniości utrudnia stosowanie progów.

2.2.2. Kryterium (użyteczność) porządkowe i kryterium (użyteczność) ilościowe

Kryterium jest porządkowe, gdy relacja binarna przypisana temu kryterium (ewentualnie relacje, patrz powyżej) ma tylko jeden sens. W tym przypadku każda transformacja monotoniczna $f(g)$ dla kryterium prawdziwego g jest modelem równoważnym. Dla quasi-kryterium istnieje transformacja (nieskończona ich liczba) taka, że próg q jest stały.

Kryterium jest ilościowe, gdy pozwala na określenie wartości różnic między elementami zbioru A. Kryterium ilościowe g pozostaje ilościowe przy dodatniej transformacji liniowej: $f = a g + b$. Warunki, jakie musi spełniać kryterium, aby było ilościowe, sformułowano w [10].

3. Agregacja preferencji

Zakładamy, że konsekwencje $\underline{x}(a)$ są wielowymiarowe, zdeterminowane i bezpośrednio powiązane z k funkcjami kryterialnymi $g_1, g_2, \dots, g_k$ pozwalającymi na ocenę każdej decyzji $a \in A$ za pomocą wektora $\underline{g}(a)$ reprezentowanego przez punkt w przestrzeni kryteriów R^k. Dodajmy, że przejście z $\underline{x}(a)$ do $\underline{g}(a)$ wymaga w pewnych przypadkach dodatkowej pracy, o której tutaj nie będziemy mówić (por. [18]).

W rozdziale tym przedstawimy metody agregacji preferencji, których modele omówiliśmy w rozdziale poprzednim. Agregacja preferencji jest równoznaczna z tworzeniem globalnego modelu preferencji. Podstawowym pojęciem wykorzystywanym przy agregacji jest kompensacja (substytucja). Wiąże się ona z odpowiedzią na pytanie: w jakim stopniu polepszenie jednego kryterium pozwala skompensować pogorszenie innego. W pewnych modelach globalnych kompensacja nie jest możliwa - mówimy wtedy o modelach niekompensacyjnych. Wśród modeli kompensacyjnych wyróżnia się modele odrzucające wszelką nieporównywalność i modele akceptujące pewną nieporównywalność. W pierwszym przypadku naturalnym przykładem jest model będący pojedynczą funkcją użyteczności (kryterium zagregowanym), a w drugim przypadku mamy do czynienia z modelem będącym relacją binarną (relacją przewyższania). Modele te mogą być ponadto tworzone w oparciu o informacje dostarczone przez decydenta bądź przed rozpoczęciem procesu przeszukiwania zbioru A (agregacja globalna), bądź w trakcie tego procesu, w trybie dialogowym (agregacja lokalna). Modele agregacji dla przypadku, gdy zbiór A jest zbiorem wypukłym zdefiniowanym przez ograniczenia problemu wielokryterialnego programowania matematycznego (liniowego), zostały szeroko omówione przez autora w [28], a przykłady ich zastosowań m.in. w [26, 27].

3.1. Modele niekompensacyjne

3.1.1. Model z poziomami aspiracji

W modelu tym dla każdego kryterium g_i definiuje się poziom aspiracji g_i^*, a dla każdej decyzji dwie możliwe oceny:

$g_i(a) > g_i^* \quad \forall i \; : \; a \in B$ jest dobra,

$\exists i$ takie, że $g_i(a) < g_i^* \; : \; a \in M$ jest zła.

Jest to model podstawowy przy poszukiwaniu decyzji zadowalających. Jest on wtedy wykorzystywany również jako reguła decyzyjna: wybierz pierwszą napotkaną decyzję a taką, że $g_i(a) \geq g_i^* \; \forall i$ [31]. Interesujące rozszerzenia tego modelu polegają bądź na umożliwieniu zmiany poziomów aspiracji, bądź na poszukiwaniu decyzji nie osiągającej wszystkich poziomów aspiracji, ale "najbliższej" ideałowi reprezentowanemu przez wektor $\underline{g}^*$. To ostatnie rozszerzenie dało miejsce zastosowaniom funkcji dystansowych w przestrzeni kryteriów, do których powrócimy przy omawianiu modeli agregacji do postaci pojedynczej funkcji użyteczności (par. 3.2).

3.1.2. Model leksykograficzny

Ten model agregacji pozwala zdefiniować preporządek zupełny R na zbiorze A, gdy kryteria są kryteriami prawdziwymi. Formalnie, niech $R = P \cup I$ będzie preporządkiem otrzymanym przez agregację leksykograficzną k kryteriów uporządkowanych według wzrastających numerów: $1 > 2 > \ldots > i > \ldots > k$,

$a \, P \, b \Leftrightarrow \exists i_0$ takie, że $a \, I_i \, b$ dla $i = 1,2,\ldots,i_0$ oraz $a \, P_{i_0} \, b$

$a \, I \, b \Leftrightarrow a \, I_i \, b$ dla $i = 1,2,\ldots,n$.

Jeżeli g_i są kryteriami prawdziwymi, to zarówno relacje $R_i = P_i \cup I_i$ jak i $R = P \cup I$ są preporządkami zupełnymi. Jednakże, jeżeli g_i są quasi-kryteriami, to relacje R_i są quasi-porządkami, a relacja R jest dowolną relacją zupełną (meczem).

Model leksykograficzny stosowany jest w wielokryterialnym programowaniu matematycznym w ramach metody hierarchizacji kryteriów (inaczej, priorytetów przywłaszczalnych) [28].

3.2. Agregacja do postaci pojedynczej funkcji użyteczności

Ten sposób agregacji preferencji polega na zdefiniowaniu funkcji wielu zmiennych $U(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ takiej, by U była nową funkcją kryterialną: $U(\underline{g}(a)) \geq U(\underline{g}(b)) \Leftrightarrow a \, R \, b$. Relacja R jest preporządkiem zupełnym na zbiorze A. Funkcję $U(\underline{g})$ nazywa się <u>funkcją użyteczności</u>[1]. Gdy funkcja U jest różniczkowalna, to z faktu, że g_i są kryteriami prawdziwymi, wynika, że $\delta U(\underline{g})/\delta g_i \geqslant 0$ dla każdego g_i i w każdym punkcie $\underline{g}$.

Centralnym pojęciem wielokryterialnej lub wieloatrybutowej teorii użyteczności jest <u>współczynnik substytucji</u>; zdefiniujemy go poniżej. Niech g_r będzie kryterium odniesienia. Według przybliżonej definicji współczynnik substytucji s^g_{ir} oznacza wzrost wartości kryterium odniesienia g_r w punkcie $\underline{g}$, potrzebny do skompensowania zmalenia wartości kryterium g_i o jednostkę:

$$s^g_{ir} : (g_1,g_2,\ldots,g_i-1,\ldots,g_r+s^g_{ir},\ldots,g_k)\ I(g_1,g_2,\ldots,g_k).$$

Bardziej precyzyjna definicja jest możliwa wtedy, gdy $U(\underline{g})$ jest różniczkowalna:

$$s^g_{ir} = \frac{\delta U(\underline{g})}{\delta g_i}\ \frac{\delta U(\underline{g})}{\delta g_r}$$

Funkcja użyteczności jest <u>addytywna</u>, jeżeli można ją przedstawić w postaci:

$$U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^{k} u_i(g_i).$$

gdzie $u_i(g_i)$ oznaczają <u>użyteczności cząstkowe</u>. Jeżeli U jest różniczkowalna, to $\delta U/\delta g_i = du_i/dg_i$. Stąd, jeżeli g_i jest kryterium prawdziwym, to użyteczność cząstkowa związana z g_i jest funkcją monotoniczną niemalejącą.

Gdy użyteczności cząstkowe są ciągłe i różniczkowalne, współczynniki substytucji między dwoma kryteriami, g_i i g_j, zależą wyłącznie od ich użyteczności cząstkowych. Jest to właściwość niezależności współczynnika substytucji od k-2 innych kryteriów. W przypadku addytywnej funkcji użyteczności mamy: $\delta U(g)/\delta g_i = du_i/dg_i$, zatem

$$s^g_{ij} = \frac{du_i}{dg_i}\ \frac{du_j}{dg_j}.$$

[1] Ściśle mówiąc, jest to funkcja użyteczności wielokryterialnej. Analogicznie można zdefiniować funkcję użyteczności wieloatrybutowej jako bezpośrednią funkcję wektora konsekwencji (lub atrybutów) $\underline{x}$. Ponadto, w teorii użyteczności na określenie funkcji agregacji przy konsekwencjach zdeterminowanych używa się raczej określenia funkcja wartości, natomiast funkcja użyteczności jest funkcją agregacji przy konsekwencjach przypadkowych lub niepewnych. To ostatnie określenie upowszechniło się jednak w obu przypadkach na tyle, że obecnie odchodzi się od tego rozróżnienia.

Jest to stosunek nachylenia zboczy obu użyteczności cząstkowych w punktach g_i i g_j.

W przypadku, gdy funkcje użyteczności cząstkowych są liniowe, omawiany model nazywa się <u>sumą ważoną</u> (por. [28] dla przypadku wielokryterialnego programowania liniowego):

$$u_i(g_i) = p_i g_i \Rightarrow U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^{k} p_i g_i$$

W modelu tym współczynniki substytucji są stałe, a krzywe izopreferencji są prostymi, płaszczyznami lub hiperpłaszczyznami w przestrzeni kryteriów. Faktycznie, $s_{ij}^{\underline{g}} = p_i/p_j = \text{const}$. Model sumy ważonej jest modelem klasycznym, bardzo często stosowanym, mimo że warunki poprawności jego stosowania są stosunkowo silne (stałość współczynników substytucji).

Przejdźmy teraz do sprawy <u>niezależności w sensie preferencji</u>, która jest związana z omawianym modelem agregacji [9, 30]. Podzbiór kryteriów L jest niezależny w sensie preferencji od swojego uzupełnienia $\bar{L}$, jeżeli:

$$(\underline{g}'_L, \underline{g}^0_{\bar{L}})\, P(\underline{g}''_L, \underline{g}^0_{\bar{L}}) \qquad (\underline{g}'_L, \underline{g}^1_{\bar{L}})\, P(\underline{g}''_L, \underline{g}^1_{\bar{L}})$$

Oznacza to, że preferencje związane z podzbiorem kryteriów L są niezależne od wartości kryteriów należących do $\bar{L}(g^0_{\bar{L}}$ lub $g^1_{\bar{L}})$. Jeżeli L_1 jest niezależny od $\bar{L}_1$, a L_2 od $\bar{L}_2$, to $L_1 \cap L_2$ jest niezależny od $\overline{L_1 \cap L_2}$, a $L_1 \cup L_2$ od $\overline{L_1 \cup L_2}$. O <u>niezależności wzajemnej</u> mówimy wtedy, gdy każdy podzbiór kryteriów jest niezależny w sensie preferencji od swojego dopełnienia.

Warunek niezależności wzajemnej jest warunkiem koniecznym istnienia addytywnej funkcji użyteczności i jest wystarczający tylko wtedy, gdy $k \geqslant 3$ i g_i są ciągłe. Dla $k = 2$ lub g_i dyskretnych wymagane są inne warunki [9].

Specyficznym przykładem agregacji preferencji do postaci pojedynczej funkcji użyteczności są modele wykorzystujące funkcje dystansowe w przestrzeni kryteriów, w szczególności w ramach tak zwanego programowania celowego [2]. Idea programowania celowego polega na wprowadzeniu zmiennych reprezentujących dodatnie i ujemne odchylenia od poziomów aspiracji i minimalizowaniu funkcji tych odchyleń. Zastosowanie funkcji dystansowych i programowania celowego w wielokryterialnym programowaniu liniowym zostało omówione w [28].

3.3. <u>Agregacja do postaci pojedynczej relacji binarnej</u>

W tego typu modelach dokonuje się agregacji preferencji do postaci pojedynczej relacji binarnej - dominacji lub przewyższania.

3.3.1. Relacja dominacji i zbiór sprawny

Niech $R_1,\dots,R_i,\dots,R_k$ będą k preporządkami zupełnymi odpowiadającymi kryteriom $g_1,\dots,g_i,\dots,g_k$. Relację dominacji $\geqslant$ definiuje się w następujący sposób:

$a \geqslant b \Longleftrightarrow a\ R_i\ b$ dla $i = 1,2,\dots,k$: dominacja słaba,

$a > b \Longleftrightarrow a \geqslant b$ i nie $b \geqslant a$: dominacja silna.

Gdy kryteria są kryteriami prawdziwymi (bez progów), to definicja ta przyjmuje postać:

$a \geqslant b \Longleftrightarrow g_i(a) \quad g_i(b) \geqslant$ dla $i = 1,2,\dots,k$

$a > b \Longleftrightarrow a \geqslant b$ i nie $b \geqslant a$

Relacja dominacji jest często zbyt uboga, w szczególności gdy zbiór A jest dyskretny i mało liczny. Niemniej jest to bardzo użyteczny model przy eliminowaniu decyzji z licznego lub nawet nieskończonego zbioru A.

Zbiór sprawny E jest zbiorem decyzji niezdominowanych:

$a \in E$, jeżeli nie $\exists b \in A : b > a$.

Wyznaczanie zbioru E dało asumpt do powstania wielu prac i algorytmów (tzw. polioptymalizacji zupełnej), szczególnie dla przypadku wielokryterialnego programowania liniowego [28, 33]. W tym przypadku warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $\tilde{a}$ była sprawna, jest istnienie takiego wektora wag $\underline{p}$ złożonego z $p_i > 0$ dla $i = 1,2,\dots,k$, że:

$$V(\tilde{a}) = \max_{a \in A} \sum_{i=1}^{k} p_i g_i(a)$$

Jeżeli zbiór A nie jest wypukły, w szczególności dyskretny, to warunek ten jest dostateczny, ale nie konieczny (por. np. [29]).

3.3.2. Metody porządkowe konstrukcji relacji przewyższania

Pierwszą metodą, w której zastosowano relację przewyższania S, była ELEKTRA I [16]. Dała ona początek wielu pracom dotyczącym zarówno konstrukcji relacji S, jak i wykorzystania tej relacji we wspomaganiu decydenta w procesie rozwiązywania problemów decyzyjnych.

ELEKTRA I wykorzystuje pojęcie jądra w celu wyodrębnienia podzbioru decyzji proponowanych pod rozwagę decydentowi. Jądro N definiuje się w następujący sposób:

$\forall a,b \in N$: nie $a\ S\ b$ i nie $b\ S\ a$ (a i b są nieporównywalne).

$\forall c \notin N$, $\exists a \in N$ takie, że $a\ S\ c$.

to znaczy, że każdy element spoza zbioru N jest przewyższany przez co najmniej jeden element z N oraz że elementy zbioru N nie przewyższają się wzajemnie. Ponieważ S jest bogatsza od $\geq$ (dominacja), jądro N jest w ogólności podzbiorem decyzji sprawnych E: $N(S) \leq E(\geq)$.

Z kolei ELEKTRA II [21] wykorzystuje relację S w celu przedstawienia dwóch możliwie różnych preporządków zupełnych zgodnych z relacją S, aby ostatecznie umożliwić decydentowi częściowe uszeregowanie elementów zbioru A.

Obie te metody wykorzystują pojęcia <u>zgodności</u> i <u>niezgodności</u>, które poniżej zdefiniujemy.

Dla każdej pary decyzji (a,b) kryteria dzieli się na trzy klasy:

- kryteria na korzyść a : $I_{a>b} = \{i : a\ P_i\ b\}$,
- kryteria na korzyść b : $I_{b>a} = \{i : b\ P_i\ a\}$,
- kryteria, dla których a i b są równoważne: $I_{a\sim b} = \{i : a\ I_i\ b\}$.

Następnie określa się wektor wag $\underline{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_k]$ taki, że $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ i rozdziela się go (na wzór głosów w procedurze wyborczej) na powyższe trzy klasy, po czym wylicza się następujące trzy liczby:

$$P_{a>b} = \sum_{i \in I_{a>b}} p_i, \quad P_{b>a} = \sum_{i \in I_{b>a}} p_i, \quad P_{a\sim b} = \sum_{i \in I_{a\sim b}} p_i.$$

Warunek zgodności jest spełniony wtedy, gdy:

$$P_{a>b} + P_{a\sim b} \geq C \quad \text{oraz} \quad P_{a>b} > P_{b>a},$$

gdzie C jest założonym progiem zgodności bliskim jedności. Spełnienie warunku zgodności upoważnia do przyjęcia hipotezy przewyższania, typu aSb. Warunek niezgodności pozwala na odrzucenie tej hipotezy, jeżeli istnieje zbyt silna opozycja ze strony jednego lub wielu kryteriów. W praktyce przyjmuje się często próg niezgodności D_i stały dla każdego kryterium. Jest to równoznaczne z wprowadzeniem relacji niezgodności o strukturze quasi-porządku. W tym sensie pojęcie niezgodności jest pojęciem porządkowym. Relacja przewyższania jest zatem zdefiniowana za pomocą warunku zgodności i nie niezgodności w następujący sposób:

$$a\ S\ b \Leftrightarrow P_{a>b} + P_{a\sim b} \geq C \quad i \quad P_{a>b} > P_{b>a} \quad \text{oraz} \quad \text{nie} \ \exists\, i \ \text{takie, że} \ g_i(b) - g_i(a) > D_i.$$

Istnieje możliwość rozszerzenia tych pojęć na przypadek quasi-kryteriów (por. [5]) lub pseudokryteriów (por. metoda ELEKTRA III [19]).

3.3.3. Metody ilościowe konstrukcji relacji przewyższania

W [21] zaproponowano metodę konstrukcji relacji przewyższania w celu porównania projektów budowy odcinka pewnej autostrady, wychodząc z założenia, że można otrzymać kompromis w przedziale dopuszczalnych wartości współczynników substytucji. Przyjęto, że tak zdefiniowane przedziały są stałe niezależnie od punktu g w przestrzeni kryteriów:

$$m_i \leq s^g_{ir} \leq M_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

$[m_i, M_i]$ jest zatem przedziałem niepewności współczynnika substytucji s^g_{ir}, gdzie r jest numerem kryterium odniesienia.

W ramach tego podejścia relację przewyższania można zdefiniować na wiele różnych sposobów; najprostszy z nich wykorzystuje wskaźnik:

$$\delta(a,b,\underline{s}) = \sum_{i=1}^{k} s^g_{ir}(g_i(a) - g_i(b))$$

w ten sposób, że:

$$a\ S\ b \Longleftrightarrow \min_{\underline{s} \in [\underline{m}, \underline{M}]} \delta(a,b,\underline{s}) \geq 0.$$

Tak zdefiniowana relacja S ma następujące właściwości [5]:

- S jest przechodnia,
- jeżeli $m_i = 0$ i $M_i = +\infty$ dla $i = 1,2,\ldots,k$ (żadnych informacji na temat współczynników substytucji), to S jest relacją dominacji $\geq$,
- jeżeli $m_i = M_i$ dla $i = 1,2,\ldots,k$, to S jest preporządkiem zupełnym związanym z sumą ważoną $U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^{k} p_i g_i$, gdzie $p_i = m_i = M_i$.

Zwężając przedziały współczynników substytucji przechodzimy zatem od relacji dominacji do relacji preporządku zupełnego.

Zasadę konstrukcji relacji przewyższania w oparciu o przedziały niepewności współczynników substytucji można uogólnić. Niech $\mathcal{U} = \{U(\underline{g})\}$ będzie zbiorem funkcji użyteczności przyjętych jako modele preferencji. Wtedy relację przewyższania można zdefiniować jako relację dominacji związaną ze zbiorem funkcji użyteczności, w którym każda funkcja reprezentuje jedno kryterium:

$$a\ S\ b \Longleftrightarrow \min_{U \in \mathcal{U}} \left[U(\underline{g}(a)) - U(\underline{g}(b))\right] \geq 0 \Longleftrightarrow U(\underline{g}(a)) \geq U(\underline{g}(b)) \quad \forall\, U \in \mathcal{U}$$

Definicja ta jest wykorzystywana w metodzie UTA [8], gdzie przyjmuje się model preferencji decydenta w postaci zbioru $\mathcal{U}$ addytywnych funkcji użyteczności. Wariantem tej metody jest propozycja konstrukcji rozmytej relacji przewyższania [7 rozdz. 10].

3.4. Agregacja dialogowa

Wielokryterialne metody dialogowe pojawiły się na początku lat siedemdziesiątych z przeznaczeniem dla wielokryterialnego programowania liniowego. Powstały one w wyniku krytyki metod z globalną agregacją preferencji (kryteriów), które a priori żądają od decydenta informacji o preferencjach wobec elementów zbioru rozwiązań dopuszczalnych, podczas gdy zbiór ten jest nieskończony i znany decydentowi jedynie implicite (określa go układ ograniczeń); na podstawie tej informacji tworzona jest pojedyncza funkcja użyteczności, wobec czego problem wielokryterialny redukuje się do jednokryterialnego, co oczywiście upraszcza aspekt obliczeniowy. W metodach dialogowych preferencje decydenta nie są agregowane a priori przez funkcję użyteczności. Występują w nich na przemian faza obliczeń i faza decyzyjna:

Faza obliczeń. W funkcji informacji uzyskanych w fazie decyzyjnej odpowiednie algorytmy poszukują nowej decyzji, która będzie zaproponowana decydentowi jako potencjalnie kompromisowa. Jest to faza czysto techniczna, w którą decydent nie ingeruje.

Faza decyzyjna. Jeśli decydent uzna zaproponowaną decyzję za kompromisową, to procedura kończy się; w przeciwnym razie zbiera się informacje dotyczące preferencji decydenta. Rodzaj tych informacji zależy od metody. Pytania stawiane decydentowi mogą dotyczyć współczynników substytucji [4], porównania decyzji bieżącej z decyzjami (wektorami $\underline{g}$) fikcyjnymi z jej otoczenia [35], poziomów aspiracji [13, 33], czy wreszcie modyfikacji zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podstawie porównania z punktem idealnym w przestrzeni kryteriów [1], który może również ewoluować [32, 34 rozdz. 6].

Jak widać, preferencje modelowe są jedynie lokalnie (w punkcie $\underline{g}(a)$ iteracji proponującej kompromis a) i dynamicznie, dzięki sprzężeniu zwrotnemu między fazą obliczeń a fazą decyzyjną. Obszernego przeglądu metod dialogowych dokonano ostatnio w [28]. Idea metod dialogowych, mimo swojego pierwotnego przeznaczenia, nie ogranicza się do zastosowań w wielokryterialnym programowaniu liniowym. Zwróćmy tu uwagę na metodę UTA w wersji dialogowej [7 rozdz. 10], adaptacyjną metodę dialogową [17] i metodę dialogową dla problemu wielokryterialnego programowania dyskretnego [29].

4. Zakończenie

Z chwilą, gdy dysponujemy globalnym modelem preferencji, możemy go zastosować w ramach odpowiedniej reguły decyzyjnej. Klasyczne reguły decyzyjne polegają na wyborze jednej decyzji. W przypadku konsekwencji zdeterminowanych reguły te polegają na wyborze decyzji maksymalizującej funkcję użyteczności lub pierwszej napotkanej decyzji zadowalającej. Gdy preferencja globalna jest zamodelowana za pomocą relacji binarnej $R = P \cup I$, niekoniecznie przechodniej i zupełnej, reguły decyzyjne polegają na wyborze pewnego podzbioru decyzji dopuszczalnych. Może to być podzbiór M tzw. decyzji maksymalnych [25] (a ∈ A jest decyzją maksymalną, jeżeli nie $\exists b \in A$ takie, że b P a), podzbiór C tzw. decyzji wyborowych [25] (a ∈ A jest decyzją wyborową, jeżeli $\forall b \in A$, a R b), lub jądro N [16] (por. par. 3.3.2). Łatwo wykazać, że $C \leqslant M \leqslant N$. Relacja binarna (przewyższanie) może być także wykorzystana w regule decyzyjnej mającej na celu uszeregowanie decyzji dopuszczalnych od najlepszej do najgorszej [21].

LITERATURA

[1] Benayoun B., de Montgolfier J., Tergny J., Laritchev O.: Linear programming with multiple objective functions: step method (STEM). Mathematical Programming 1.3 (1971), 366-375.

[2] Charnes A., Cooper W.W.: Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. New York 1961, J. Wiley.

[3] Fishburn P.C.: Utility Theory for Decision-Making. New York 1970, J. Wiley.

[4] Geoffrion A.M., Dyer J.S., Feinberg A.: An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department. Management Sci. 19.4 (1972), 357-368.

[5] Jacquet-Lagreze E.: La Modélisation de Préférences - Préordres, Quasi-Ordres et Relations Floues. Thèse, Université de Paris V, Paris (1975).

[6] Jacquet-Lagrèze E.: Modelling preferences among distributions using fuzzy relations. (W) Jungermann H., de Zeeuw G. (red.): Decision Making and Change in Human Affairs, Amsterdam 1977, D. Reidel.

[7] Jacquet-Lagrèze E.: Systèmes de décision et acteurs multiples: Contribution à une théorie de l'action pour les sciences des organisations. Thèse d'Etat, Université de Paris-Dauphine, Paris (1981).

[8] Jacquet-Lagréze E., Siskos J.: Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method. Europ. J. of Operational Res. 10.2 (1982), 151-164.

[9] Keeney R., Raiffa H.: Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs. New York 1976, J. Wiley.

[10] Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A.: Foundations of Measurement, New York, London 1971, Academic Press.

[11] Marschak J.: Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. Econometrica 18.2 (1950), 111-141.

[12] Von Neumann J., Morgenstern O.: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, N.J. 1947, Princeton University Press.

[13] Nijkamp P., Spronk J.: Interactive multiple goal programming - an evaluation and some results. (W) Fandel G., Gal T. (red.): Multiple Criteria Decision Making Theory and Application, Berlin 1980, Springer-Verlag, 278-293.

[14] Orlovsky S.A.: Decision-making with a fuzzy preference relation. Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), 155-167.

[15] Raiffa H.: Decision Analysis - Introductory Lectures on Choices under Uncertainty, London 1968, Addison Wesley.

[16] Roy B.: Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE). R.A.I.R.O. 2.8 (1968), 57-75.

[17] Roy B.: Vers une méthodologie générale d'aide à la décision. Revue METRA 14.3 (1975), 459-497.

[18] Roy B.: Partial preference analysis and decision-aid - the fuzzy outraking relation concept. (W) Bell D., Keeney R., Raiffa H. (red.): Conflicting Objectives in Decisions, New York 1977, J. Wiley.

[19] Roy B.: ELECTRE III - un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle 20.1 (1978).

[20] Roy B.: L'Aide à la Décision - Critères Multiples et Optimisation pour Choisir, Trier, Ranger. Książka w przygotowaniu.

[21] Roy B., Bertier P.: La méthode ELECTRE II - une application au média-planning. (W) Ross M. (red.): OR 72, Amsterdam 1973, North-Holland.

[22] Roy B., Vincke Ph.: Pseudo-critères et systèmes relationnels de préférence - nouveaux concepts et nouveaux résultats en vue de l'aide à la décision. Cahier du LAMSADE 28, Université de Paris-Dauphine, Paris (1980).

[23] Roy B., Vincke Ph.: Multicriteria analysis: surve and new directions. European J. of Operational Res. 8.3 (1981), 207-218.

[24] Savage L.J.: The Foundations of Statistics, New York 1954, J. Wiley.

[25] Sen A.K.: Collective Choice and Social Welfare, Edinburgh 1970, Oliver and Boyd.

[26] Słowiński R.: Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources. European J. of Operational Res. 7.3 (1981), 265-273.

[27] Słowiński R.: Problèmes d'allocation de moyens limités en présence de critères multiples. Cahier du LAMSADE 36, Université de Paris-Dauphine, Paris (1981).

[28] Słowiński R.: Metody wielokryterialnego programowania liniowego - próba syntezy. Zbiór Referatów XXI Sympozjum nt. Modelowania w Mechanice, Sekcja: Polioptymalizacja. Wisła-Gliwice (1982), 389-424.

[29] Słowiński R., Węglarz J.: Rozdział zasobów różnych kategorii między operacje niepodzielne jako problem wielokryterialnego programowania dyskretnego. ZN Politechniki Śląskiej 63 (1982), 151-164.

[30] Ting H.M.: Aggregation of attributes for multiattributed utility assessment. Technical Report No 66, Operations Research Center, M.I.T. (1971).

[31] Tversky A.: Elimination of aspects: a theory of choice. Psychological Review 79 (1972), 181-199.

[32] Vincke Ph.: Une méthode interactive en programmation linéaire à plusieurs fonctions économiques. R.A.I.R.O. - Recherche Opérationnelle 10.6 (1976).

[33] Winkels H.M.: Complete Efficiency Analysis for Linear Vector Maximum Systems - Theoretical Background and an Algorithm. Document du LAMSADE 13, Université de Paris-Dauphine, Paris (1980).

[34] Zeleny M.: Multiple Criteria Decision Making, New York 1982, McGraw-Hill.

[35] Zionts S., Wallenius J.: An interactive programming for solving the multiple criteria problem. Management Sci. 22.6 (1976), 652-663.

Recenzent: Doc. dr inż. Wojciech Tarnowski

Wpłynęło do Redakcji: 19.10.1982 r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Р е з ю м е

В статье сделана попытка синтетического просмотра методов моделирования предпочитений лица принимающего решение в многокритериальных проблемах принятия решений о детерминистическом определением последствий. Модели предпочтений представлены в виде одного или нескольких бинаров соотношений определённых на множестве допустимых решений, а также в виде функции определённых на этом множестве. В последствии рассмотрены методы синтеза общей модели предпочтений заключающееся в некомпенсирующем объединении предпочтений (модель с порогами удовлетворительности, лексикографическая модель), в объединении в единую функцию полезности или в единое бинарное соотношение а также в человеко-машинной процедуре объединения. Истолькованы также соотношения общей модели предпочтений с основными принципами принятия решений.

MODELLING OF PREFERENCES IN MULTICRITERIA DECISION PROBLEMS

S u m m a r y

This paper attempts to provide a synthetic insight into existing methods of modelling of the decision-maker`s preferences in multicriteria decision problems with a deterministic description of attributes. Models of preferences are presented which are either binary relations defined on a set of feasible decisions or functions defined on this set. Next, methods of synthesis of a global model of preferences are described which consist in the noncompensatory aggregation of preferences (a model with aspiration levels, a lexicographic model), an aggregation into a single utility function, an aggregation into an outranking binary relation, or an interactive aggregation. An application of the global model of preferences tc some basic decision rules is also presented.