ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 67 Nr kol. 760

Jarosław WARCZYŃSKI

Instytut Automatyki
Politechnika Poznańska

ZASTOSOWANIE METODY MALEJĄCYCH ELIPSOID W DIALOGOWYM ROZWIĄZYWANIU ZADANIA WIELOKRYTERIALNEGO PROGRAMOWANIA LINIOWEGO[1)]

Streszczenie. W pracy przedstawiono dialogową metodę typu STEM rozwiązywania wielokryterialnego zadania programowania liniowego wykorzystującą zmodyfikowany algorytm malejących elipsoid w każdej fazie obliczeń. Zastosowanie algorytmu malejących elipsoid pozwoliło na wyeliminowanie niektórych wad oryginalnej metody STEM, wykorzystującej algorytm sympleksów. W szczególności zapewnia się, że każde rozwiązanie otrzymane proponowaną metodą jest sprawne oraz eliminuje się dodatkowe obliczenia związane z analizą wrażliwości.

1. Wstęp

Jeżeli pod pojęciem rozwiązania wielokryterialnego problemu optymalizacyjnego będziemy rozumieli znalezienie sprawnego rozwiązania dopuszczalnego zapewniającego najlepszy, w przyjętym sensie, kompromis pomiędzy kryteriami, to, generalnie metody polioptymalizacji można podzielić na dwie rozłączne grupy. Mianowicie, na takie, w których a priori ustanawia się relację całkowitego porządku w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych (metody z agregacją kryteriów) oraz takie, które relację tę definiują sukcesywnie w toku badania tego zbioru (metody dialogowe) [4, 6, 7, 8, 9].

Wydaje się, że na szczególną uwagę zasługują metody drugiej grupy, które ze względu na swą istotę uniksją trudności związanych z apriorycznym określeniem funkcji użyteczności (kompromisu). Pozwalają one decydentowi na dynamiczne definiowanie swoich preferencji dzięki istnieniu sprzężenia zwrotnego między fazą obliczeń, w której otrzymuje się rozwiązanie sprawne a fazą decyzyjną, w której decydent dokonuje oceny tego rozwiązania - stąd określenie tych metod jako dialogowych. Część spośród nich wymaga od decydenta informacji explicite o funkcji użyteczności w otoczeniu aktualnie ocenianego rozwiązania sprawnego, inne natomiast jedynie implicite, co zna-

[1)] Praca ta jest częścią szerszego opracowania [10] na temat zastosowania algorytmu malejących elipsoid w dialogowej metodzie STEM dla wielokryterialnego programowania liniowego.

cznie upraszcza zadanie decydenta oraz eliminuje źródło potencjalnych deformacji rzeczywistych zależności pomiędzy kryteriami [4]. Typowymi reprezentantami tych podgrup metod dialogowych w wielokryterialnym programowaniu liniowym (WPL) są, odpowiednio, metoda Geoffriona i metoda STEM [1].

Niniejsza praca poświęcona jest tej ostatniej i proponuje pewne jej modyfikacje zmierzające do usunięcia niektórych jej wad metodologicznych. Idea tej metody oparta jest na wykorzystaniu, w sposób sukcesywny, informacji o minimalnie zadowalających poziomach wartości poszczególnych funkcji - kryteriów. Akceptacja bądź dezaprobata osiągniętych, w danym rozwiązaniu sprawnym, wartości tych funkcji determinuje kierunek poszukiwań optymalnego rozwiązania kompromisowego. W celu ułatwienia decydentowi podjęcia właściwej decyzji w tej kwestii, w stosunku do danego rozwiązania, zalecane jest przedstawienie decydentowi dodatkowych informacji o zależnościach pomiędzy kryteriami w otoczeniu rozpatrywanego rozwiązania poprzez tzw. analizę wrażliwości. Analiza ta jednak, w metodzie STEM, przeprowadzana jest kosztem dodatkowych nakładów obliczeniowych. Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że zastosowanie algorytmu malejących elipsoid w fazie obliczeń metody STEM pozwala na wyeliminowanie tych dodatkowych obliczeń. Wykazano ponadto, że w odróżnieniu od oryginalnej metody STEM, opartej na algorytmie sympleksów, każde rozwiązanie otrzymane zmodyfikowaną metodą, wykorzystującą algorytm malejących elipsoid, jest sprawne. Oba te fakty przemawiają za przydatnością metody malejących elipsoid do rozwiązania problemu WPL.

2. Metoda STEM - uwagi krytyczne na temat wersji oryginalnej

Metoda STEM Benayouna i in. została zaprojektowana jako metoda dialogowa, która w kolejnych iteracjach, składających się z fazy obliczeniowej i fazy decyzyjnej, powinna przechodzić od jednego rozwiązania sprawnego do drugiego, zachowując kierunek poszukiwań rozwiązania kompromisowego nadawany jej, w fazie decyzyjnej, przez decydenta. Zakończenie obliczeń związane jest z usatysfakcjonowaniem decydenta lub też wskazaniem na niemożność dalszego prowadzenia obliczeń.

Dyferencjacja rozwiązań dopuszczalnych względem wektora funkcji - kryteriów dokonywana jest przy zastosowaniu funkcji dystansowej:

$$d_p\left[\underline{F}(\underline{x})\right] = \left(\sum_{k=1}^{s} \left|F_k^{\wedge} - F_k(\underline{x})\right|^p\right)^{1/p} \tag{2.1}$$

gdzie:

$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\underline{x}) \\ F_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ F_s(\underline{x}) \end{bmatrix}$$ jest wektorem wartości funkcji - kryteriów,

$p = \infty$, co odpowiada tzw. metryce Czebyszewa w analizie matematycznej. Funkcja ta ocenia odległość w przestrzeni kryteriów między punktem utopijnym $\underline{F}^{\wedge} = \underline{F}_1^{\wedge}, \underline{F}_2^{\wedge}, \ldots, \underline{F}_s^{\wedge}$ a projekcją w przestrzeń kryteriów danego rozwiązania dopuszczalnego. Jak wiadomo, z własności metryki Czebyszewa, odległość ta

$$d_\infty = \max_{1 \leq i \leq s} \left\{ \left| F_i^{\wedge} - F_i(\underline{x}) \right| \right\}. \tag{2.2}$$

W fazie obliczeniowej metody problem WPL jest transponowany do jednokryterialnego problemu PL:

$$LP^i \begin{cases} \text{Minimalizować } d_\infty \\ \text{przy ograniczeniach } \pi_k \left[F_k^{\wedge} - F_k(\underline{x}) \right] - d_\infty \leq 0 \\ \underline{x} \in D^i, \quad d_\infty \geq 0, \quad k = 1,2,\ldots,s \end{cases} \tag{2.3}$$

gdzie D^i jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych w i-tej iteracji metody.

π_k jest wagą określoną w sposób następujący:

$$\pi_k = \frac{\alpha_k}{\sum_k \alpha_k}, \quad \text{gdzie } \alpha_k = \frac{F_k - f_k}{F_k^{\wedge}} \left[\sum_{j=1}^{n} (c_j^k)^2 \right]^{-1/2} \tag{2.4}$$

f_k jest minimalną wartością k-tego kryterium z tzw. macierzy wypłat. c_j są współczynnikami k-tej funkcji celu.

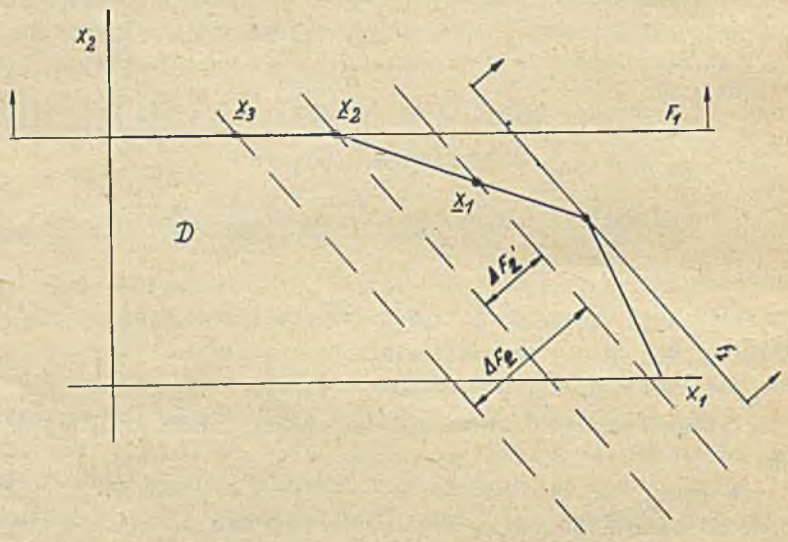
Wagi π_k oznaczają lokalne, względne znaczenie odległości (w sensie metryki Czebyszewa) wartości poszczególnych kryteriów od ich wartości maksymalnych.

W fazie decyzyjnej rozwiązanie zadania (2.3) zostaje przedstawione decydentowi do oceny. Jeśli rozwiązanie nie satysfakcjonuje decydenta, to powinien on określić wartość relaksacji ΔF_1 dla jednej z funkcji (np. dla F_1), aby zgodnie z regułą Pareta uzyskać nowe rozwiązanie z polepszonymi wartościami funkcji, które go nie satysfakcjonują. Następnie następuje powrót do fazy obliczeniowej ze zmodyfikowanym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych:

$$D^{i+1} = \left\{ \underline{x}: \underline{x} \in D_i; \quad \forall_k \neq 1 \; F(\underline{x}) \geq F_k(\underline{x}^i); \quad F_1(\underline{x}) > F_1(\underline{x}^i) - \Delta F_1 \right\} \tag{2.5}$$

Parametrom α_1 i π_1 zostaje nadana wartość zero, pozostałe wagi zostają określone jak w kroku poprzednim.

Opisana powyżej metoda STEM posiada kilka słabych punktów. Zwróćmy uwagę, że zastosowanie metryki Czebyszewa może prowadzić do uzyskiwania rozwiązań niesprawnych. Rozwiązanie zadania (2.3) będzie rozwiązaniem sprawnym, jeśli będzie ono rozwiązaniem jedynym. Minimalna wartość d_∞ w (2.3) jest wartością, która nie może być przekroczona jednocześnie przez wszystkie funkcje celu. Mogą jednak istnieć funkcje celu, które nie pogarszając wartości innych funkcji, poprawią swoje wartości. Jest to odpowiednikiem sytuacji, gdy dana nierówność spełniona jest jako równość dla wszystkich $\underline{x} \in D$, a jednocześnie lewe strony pozostałych nierówności tego układu mogą przyjmować różne wartości [6]. Otrzymujemy wtedy zbiór rozwiązań optymalnych, który nie spełnia warunku Pareta. Innymi słowy można powiedzieć, że jest to konsekwencja nieprawdziwości twierdzenia odwrotnego od twierdzenia Zelenego, które mówi, że dowolne rozwiązanie sprawne jest wypukłą, liniową kombinacją bazowych rozwiązań sprawnych [11].



Rys. 1. Mechanizm niesprawności jako wynik strategii przydziału wag

Niesprawność rozwiązania otrzymanego w fazie obliczeniowej może być również wynikiem strategii przydziału wag. Rozpatrzmy następującą sytuację. Mamy dwie funkcje celu F_1 i F_2. W wyniku fazy obliczeniowej otrzymano rozwiązanie $\underline{x}_1$ (rys. 1). Rozwiązanie to nie satysfakcjonuje decydenta ze

względu na wartość pierwszej funkcji celu - definiuje więc relaksację ΔF_2. Zadanie, które należy teraz rozwiązać ma postać następującą:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimalizować } d_\infty \\
&\pi_1 \left[F_1^{\wedge} - F_1(\underline{x})\right] - d_\infty \leq 0 \\
&0 \cdot \left[F_2^{\wedge} - F_2(\underline{x})\right] - d_\infty \leq 0 \\
&F_1(\underline{x}) \geq F_1(\underline{x}_1) \qquad (2.6) \\
&F_2(\underline{x}) \geqslant F_2(\underline{x}_1) - \Delta F_2 \\
&\underline{x} \in D^1 = D
\end{aligned}
$$

Nietrudno zauważyć, że jedynym rozwiązaniem sprawnym tego zadania jest $\underline{x}_2$. Ze względu jednak na przydział wagi $\pi_2 = 0$ do nierówności z drugą funkcją celu, w wyniku obliczeń, możemy otrzymać rozwiązanie położone pomiędzy $\underline{x}_2$ i $\underline{x}_3$. Jedynym sposobem uniknięcia takiej sytuacji, w ramach oryginalnej STEM, byłoby takie określenie relaksacji, aby wyżej opisana sytuacja nie mogła zaistnieć. Zamiast ΔF_2 należałoby wybrać $\Delta F_2'$. Jak wiadomo, w praktyce jest to prawie niemożliwe ze względu na brak informacji o zależnościach pomiędzy kryteriami. W celu otrzymania pewnej informacji o tych zależnościach możliwe jest przeprowadzenie poza algorytmem metody specjalnej analizy wrażliwości, która wymaga jednak dodatkowych obliczeń związanych z rozwiązaniem dodatkowego zadania programowania liniowego.

3. Algorytm malejących elipsoid jako główna procedura obliczeniowa metody STEM

Pokażemy obecnie, że zastosowanie, jako głównej procedury obliczeniowej metody STEM, pewnej wersji zmodyfikowanego algorytmu malejących elipsoid pozwala na przezwyciężenie, opisanych powyżej, niedogodności tej metody. Jak wiadomo, wielomianowy algorytm malejących elipsoid przeznaczony do rozwiązania zadania programowania liniowego został opublikowany w 1979 roku przez L.G. Chacijana [3]. Od tego czasu wprowadzono do tego algorytmu wiele usprawnień znacznie polepszających jego globalną efektywność [1].

Na teoretycznych podstawach tego algorytmu skonstruowaliśmy algorytm rozwiązania (w sensie podanym we wstępie) zadania WPL. Idea jego jest następująca: Podobnie jak w oryginalnym algorytmie generowany jest ciąg elipsoid, których objętości maleją, w postępie geometrycznym. Natomiast w każdym kroku algorytm bada, czy środek kolejnej elipsoidy jest rozwiązaniem

dopuszczalnym. Jeśli nie, to dana elipsoida jest "cięta" przez hiperpłaszczyznę związaną z jednym z naruszonych ograniczeń. Kolejna elipsoida otacza tę część poprzedniej, w której znajdują się rozwiązania spełniające wszystkie ograniczenia. Natomiast w przypadku, gdy środek elipsoidy jest rozwiązaniem dopuszczalnym, elipsoida zostaje podzielona przez hiperpłaszczyznę związaną z jedną z funkcji celu. Algorytm zatrzymuje się, gdy objętość kolejnej elipsoidy jest mniejsza od zadanej dokładności algorytmu. Zadanie WPL zostaje więc tutaj przekształcone w zadanie rozwiązania układu nierówności:

$$\operatorname{Max}\left[\underline{c}_1^T \underline{x},\ \underline{c}_2^T \underline{x}, \ldots, \underline{c}_s^T \underline{x}\right] \quad \underline{x} \in D \qquad (3.2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \underline{c}_1^T \underline{x}^k \geq \underline{c}_1^T \underline{x}^{k-1} & \\ \underline{c}_2^T \underline{x}^k \geq \underline{c}_2^T \underline{x}^{k-1} & (3.1) \\ \vdots & \\ \underline{c}_s^T \underline{x}^k > \underline{c}_s^T \underline{x}^{k-1} & (3.2) \\ \underline{x} \in D & \end{array}\right\}$$

gdzie $\underline{x}^k$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym na k-tej iteracji algorytmu. Algorytm ten prowadzi do rozwiązań sprawnych, ponieważ rozwiązanie dopuszczalne jest polepszane, ze względu na każde z kryteriów, dopóty dopóki nie prowadzi to do pogorszenia wartości pozostałych funkcji - kryteriów, a zatem działa on zgodnie z regułą Pareto.

Funkcja użyteczności, zadawana niejawnie przez decydenta w fazach decyzyjnych, jest kształtowana poprzez uwzględnienie wag π_j przy określaniu wskaźnika funkcji celu, z którą związana będzie hiperpłaszczyzna tnąca:

$$1 = f(d_{max}) = f(\max_j \left\{ \pi_j \left| F_j^* - F_j \right| \underline{x}^k \right\}) \qquad (3.3)$$

Wagi π_j obliczane są jak w (2.4).

Aby wykluczyć niesprawność rozwiązania jako wynik strategii przydziału wag, proponujemy przydzielanie do zrelaksowanych funkcji nie wagi $\pi_1=0$, lecz $\pi_1 = \varepsilon, \varepsilon \to 0$, gdzie ε może być zadaną dokładnością metody. W takim wypadku, jeśli np. kolejnym pośrednim rozwiązaniem, znalezionym przez procedurę obliczeniową, będzie rozwiązanie $\underline{x}_3$ (rys. 1), to ponieważ

$$d_{max} = d_2 = \varepsilon \cdot \left| F_2 - F_2(\underline{x}_3) \right| > 0 \Rightarrow f(d_{max}) = 2,$$

możliwa będzie dalsza poprawa wartości F_2 bez obniżenia wartości F_1. Krok ten będzie powtarzany aż do osiągnięcia rozwiązania $\underline{x}_2$, które jest rozwiązaniem sprawnym. Jak zostało więc pokazane, sprawność rozwiązań nie jest zależna od wartości wprowadzanych przez decydenta relaksacji. Stąd można wyprowadzić wniosek, że wymagania stawiane ewentualnej analizie wrażli-

wości nie będą miały na celu określenia dokładnych wartości relaksacji, a jedynie uzyskanie informacji określającej ogólne zależności pomiędzy funkcjami celu. Zadaniu temu może sprostać analiza wrażliwości prowadzona w ramach głównej procedury obliczeniowej - umożliwia to skonstruowana przez nas wersja algorytmu malejących elipsoid. Wersja ta wykorzystuje dla celów analizy wrażliwości dopuszczalne rozwiązania pośrednie. W toku obliczeń dokonywanych przez algorytm zostaje zapamiętanych s (liczba kryteriów) niezdominowanych (w sensie pewnej relacji $\mathfrak{R}$ częściowego porządku) wektorów wartości funkcji - kryteriów. Relacja częściowego porządku $\mathfrak{R}$ pozwala zapamiętywać jako wektor wartości funkcji-kryteriów Z^i, $i=1,2,\ldots,s$, punkty przestrzeni kryteriów, których i-ta współrzędna minimalizuje wskaźnik:

$$w^i = \left| F^i(\hat{\underline{x}}^{k-1}) + 1 - F^i(\underline{x}) \right|,$$

gdzie $\hat{\underline{x}}^{k-1}$ jest optymalnym rozwiązaniem zadania LP^{k-1}, a w drugiej kolejności pozostałe współrzędne są niezdominowane z punktu widzenia porządku generowanego przez wektor pozostałych funkcji celu. Po zakończeniu fazy obliczeniowej zapamiętane wektory zostają uporządkowane w tablicy, która pozwala zorientować się, jakie wartości przyjmują poszczególne funkcje celu, gdy chcemy daną funkcję zwiększyć o jednostkę w stosunku do rozwiązania z poprzedniej iteracji.

4. Wnioski

Zastosowanie nowej wersji algorytmu malejących elipsoid jako głównej procedury obliczeniowej dialogowej metody STEM pozwala na wyeliminowanie jej podstawowych wad. Zaproponowana w pracy metoda charakteryzuje się bezwzględną sprawnością uzyskiwanych rozwiązań. Zbędne staje się także przeprowadzanie dodatkowej analizy wrażliwości, gdyż informacja pomagająca w ocenie wartości poszczególnych kryteriów i w zorientowaniu się w zależnościach pomiędzy tymi kryteriami uzyskiwana jest bezpośrednio w fazie obliczeniowej. Niezależnie od tego zastosowanie nowej wersji algorytmu malejących elipsoid pozwala decydentowi na obserwację całego procesu dochodzenia do rozwiązań sprawnych. Dodatkową korzyść daje również możliwość zatrzymania obliczeń w chwili uzyskania rozwiązania, różniącego się od rozwiązania sprawnego o zadaną wartość, gdyż informacja o dokładności danego rozwiązania znana jest w każdym kroku algorytmu.

LITERATURA

[1] Benayoun B., de Montgolfier J., Teregny J., Laritchev O.: Linear programming with multiple objective functions: Step method STEM. Math. Programming 13 (1981).

[2] Bland K.G., Goldfarb D., Todd M.J.: The ellipsoid method. Op. Res. 2 (1981).

[3] Chaĉjan L.G.: Polinomialnyj algoritm w liniejnom programmirowanii. Dokłady Akademii Nauk CCCP, 5 (1979).

[4] Hwang C.L., Masud A.S.M.: Multiple objective decision making-methods and applications: a survey. Springer Verlag, Berlin 1979.

[5] Hwang C.L., Paidy S.R., Yoon K., Masud A.S.M.: Mathematical programming with multiple objectives. Tutorial of Computations and Operations Research, Vol. 7, 1980.

[6] Konarzewska-Gubała E.: Programowanie przy wielorakości celów. PWN Warszawa 1980.

[7] Laricew O.: Czełowieko-maszinnyje procedury rieszenia mnogokritierjalnych zadacz matematiczeskowo programmirowania. Ekonomika i matematiczeskie metody, tom 16, Nr 1, 1980.

[8] Roy B.: Problems and methods with multiple objective functions. Math. Programming 1.2 (1979).

[9] Słowiński R.: Metody wielokryterialnego programowania liniowego - próba syntezy. XXI Sympozjon "Modelowanie w mechanice", Gliwice maj 1982.

[10] Słowiński R., Warczyński J.: On certain advantages of using STEM with ellipsoid algorithm for multiobjective linear programming. Przedstawiona do druku.

[11] Zeleny M.: Linear multiobjective programming. Springer Ver. Berlin 1974.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan Szadkowski

Wpłynęło do Redakcji 10.11.1982 r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОТСЕЧЕНИЯ С РАСТЯЖЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВА В ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОМ РЕШЕНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р е з ю м е

Представлен человеко-машинный метод решения многокритериальных задач линейного программирования. В качестве основной вычислительной процедуры применён некоторый вариант полиноминального метода отсечения с растяжением пространства в линейном программировании. В статье широко рассмотрены полученны этим применением преимущества.

APPLICATION OF THE ELLIPSOID METHOD
FOR INTERACTIVE SOLVING OF MULTIOBJECTIVE LINEAR
PROGRAMMING PROBLEM

S u m m a r y

A certain version of the ellipsoid algorithm for the linear programming has been applied as a main computational procedure of the STEM method. The advantages yielded from this application are extensively shown.