ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977
Seria: GÓRNICTWO z. 81 Nr kol. 548

KONFERENCJA: MODELOWANIE GÓRNICZYCH MASZYN WYCIĄGOWYCH
9-10.XII.1977

JERZY RŻYSKO, WITOLD LINKE, JAN OLSZEWSKI
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
WARSZAWA

KRYTERIA DOBORU FUNKCJI PRZYBLIŻONYCH SŁUŻĄCYCH DO BUDOWY MODELU DYSKRETNEGO DRGAŃ PODŁUŻNYCH LINY WYCIĄGOWEJ

W pracy przedstawiono sposób budowy modelu dyskretnego dla układu wydobywczego. Sformułowano kryteria pozwalające ocenić "dobroć" funkcji przybliżonych służących do budowy modelu. Przedyskutowano kilka postaci funkcji i uzasadniono celowość użycia funkcji liniowej i sinusoidalnej.

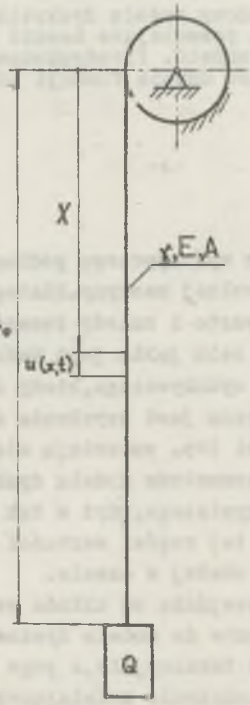
1. Wstęp

Modelowanie procesów dynamicznych układu wydobywczego podlega prawidłowościom postępowania w modelowaniu dowolnej maszyny. Dlatego w zależności od celu w jakim modelujemy układ, warto i należy rozważyć, jak dalece należy upraszczać rzeczywistość. Dla celu jakim jest badanie zjawisk mechanicznych podczas ruchu układu wydobywczego, kiedy długość liny wyciągowej zmienia się w czasie, konieczne jest uzyskanie modelu dyskretnego, w którym wartości mas, sztywności itp. zmieniają się w czasie. Dlatego niecelową jest identyfikacja parametrów modelu dyskretnego na podstawie tylko pomiarów układu rzeczywistego, gdyż w tak uzyskanym modelu nie można oddzielić od siebie tej części wartości parametru, która zmienia się w czasie od części stałej w czasie.

Należy tu zastosować klasyczny sposób przejścia od układu rzeczywistego do układu ciągłego, a dopiero następnie do modelu dyskretnego. Etap pierwszy tego modelowania jest robiony intuicyjnie, a jego wynik, czyli układ ciągły, zależy od wiedzy i doświadczenia modelującego. Natomiast sposób uzyskania modelu dyskretnego z modelu ciągłego można sformalizować, zrobić to metodami ścisłymi. Jednakże nawet na tym etapie niektóre własności modelu jak np. ilość stopni swobody także określa się arbitralnie w zależności od zjawiska, które zamierza się badać.

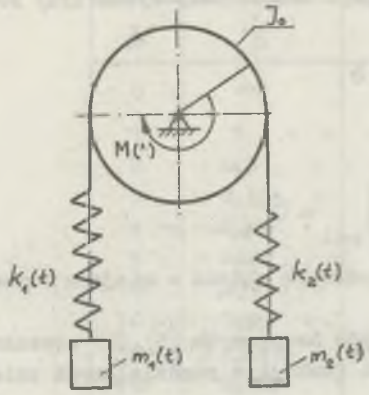
Niniejsza praca dyskutuje zagadnienie otrzymania modelu dyskretnego układu wyciągowego kopalnianego z modelu ciągłego, który jest znany

Rys.1. Model ciągły z liną wyrównawczą o parametrach zmiennych w czasie



Rys.2. Model ciągły o parametrach stałych w czasie

na podstawie wieloletnich badań i wiedzy badaczy zajmujących się tym problemem. Rysunek 1 przedstawia model ciągły, liniowy, o parametrach zmiennych w czasie, typowego układu wydobywczego typu Koepe, stosowanego w polskim przemyśle węglowym. Jego ruch opisuje równanie różniczkowe cząstkowe, przy czym przestrzeń, w której należy analizować równanie, zmienia się w czasie. Nie znamy, jak dotychczas, metod dokładnych analizy tego typu równań różniczkowych cząstkowych. Model dyskretny tego układu też będzie posiadał parametry zmienne w czasie, a jego opis matematyczny dokonany będzie równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, liniowymi, parametrycznymi. Równania te można analizować np. przy użyciu maszyn analogowych. Jak wynika z pomiarów prowadzonych na rzeczywistym układzie wyciągowym, układ ten realizuje drgania z pierwszą najniższą częstotliwością dla danej /lewej lub prawej/ liny wraz z naczyniem wydobywczym. Dzieje się tak przypuszczalnie z powodu silnych własności tłumiących liny. Dlatego poszukiwano modelu dyskretnego o 1-nym stopniu swobody dla jednej liny z zamocowanym w jej końcu naczyniem wydobywczym /rys.2/. W tej pracy wpływ liny wyrównawczej uwzględniono przez zwiększenie ciężaru naczynia wydobywczego, aby nie komplikować obliczeń matematycznych. Oczywiście dla uzyskania modelu zbliżonego do rzeczywistości, można przeprowadzić analizy podobne do poniższych z uwzględnieniem sztywności liny wyrównawczej.



Rys.3. Model dyskretny o 3-ch stopniach swobody

Mając model dyskretny dla jednej liny wydobywczej, możemy analizować ruch całego układu wydobywczego na modelu o trzech stopniach swobody /rys.3/, jeżeli nie dopuszczamy posunięć liny po kole wyciągowym.

J_o - moment bezwładności koła

$M(t)$ - moment sił od silnika

$k_1(t)$, $k_2(t)$ - sztywności zredukowane lin

$m_1(t)$, $m_2(t)$ - masy zredukowane lin i naczyń

Zmiana parametrów modelu w czasie jest zależna od rodzaju ruchu jaki wykonuje koło napędowe napędzane silnikiem.

2. Rozwiązanie drgań podłużnych układu lina-naczynie wydobywcze przy stałej długości liny

Drgania wzdłużne układu lina-naczynie wydobywcze, poruszającego się wzdłuż szybu, opisane są równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych, wyprowadzonym z warunków równowagi elementu liny

$$\frac{q}{g}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = q\left(1 \pm \frac{\dot{v}_t}{g}\right) \tag{1}$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$u(l,t) = 0 \tag{2}$$

$$\left[\frac{Q}{g}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{x=l} = Q\left(1 \pm \frac{\dot{v}_t}{g}\right), \tag{3}$$

gdzie: q - ciężar jednostki długości liny w $[daN\ m^{-2}]$

Q - ciężar naczynia wydobywczego w $[daN]$

$\dot{v}_t$ - przyśpieszenie styczne punktu na obwodzie koła linowego w $[m\ s^{-2}]$

E - moduł sprężystości liny w $[daN\ m^{-2}]$

A - przekrój poprzeczny liny w $[m^2]$

x - odległość rozważanego przekroju liny od początku układu ruchomego /rys.2/ w położeniu równowagi statycznej

$u(x,t)$ - odchylenie rozważanego przekroju od położenia równowagi statycznej /rys.2/

Rozwiązując drgania układu przy stałej długości, wstawiamy do (1) i (3)

$\dot{v}_t = 0$. Częstość drgań własnych układu przy stałej długości i założeniu idealnej sztywności koła linowego i jego zamocowania wyznaczymy rozwiązując równanie jednorodne

$$\frac{q}{g}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0 \tag{5}$$

$$\left[\frac{Q}{g}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{x=l} = 0 \tag{6}$$

W tym przypadku dla wygody przyjęto początek układu w miejscu styku liny z kołem linowym.

Rozwiązania równania (4) dla warunków brzegowych (5),(6) poszukujemy jako sumy całek szczególnych w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(t) \tag{7}$$

Stosując metodę Fouriera [a] uzyskamy "n-tą" funkcję własną w postaci

$$X_n(x) = \sin\left(z'_n \frac{x}{l}\right) \tag{8}$$

a "n-tą" postać własną w postaci

$$\omega_n = z'_n \cdot \sqrt{\frac{EAg}{ql^2}} \tag{9}$$

Wartości współczynnika z'_n uzyskuje się z równania

$$z' \operatorname{tg} z' = \frac{ql}{Q} \tag{10}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\beta = \frac{Q}{ql}\ ; \qquad B = \sqrt{\frac{EAg}{ql^2}} \tag{11}$$

wyznaczono częstości drgań własnych dla różnych wartości współczynnika ciężaru β. Wyniki zestawiono w tabeli 1.

Rozwiązania (9) i (8) równania jednorodnego (4),czyli jego wartości własne,i odpowiadające im funkcje własne określają własności dynamiczne układu mechanicznego lina-naczynie wydobywcze,dla określonych wartości współczynnika β czyli w zależności od długości liny.Wyznaczone dokładne wartości częstości drgań i funkcje własne posłużą do sprawdzenia dokładności tych wielkości uzyskanych z przybliżonych modeli matematycznych.Ponieważ drgania poprzeczne i skrętne zależą od siły wzdłużnej w linie N, wyznaczmy dokładną wartość tej siły uwzględniając dwie pierwsze postacie własne

$$N = EF\frac{\partial u}{\partial x} = EF\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}T_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x}T_2\right) \tag{12}$$

Z (12) wynika,że konieczne jest takie dobranie funkcji przybliżonych

Tabela 1

β	$\frac{1}{\beta}$	z_1^d	z_2^d
0	∞	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$
1	1	0,86033	3,42562
2	0,5	0,65327	3,2923
3	0,333	0,54710	3,24398
4	0,25	0,48010	3,2191
5	0,20	0,43284	3,20393
10	0,1	0,31105	3,173099
20	0,05	0,2217	3,15743
30	0,0333	0,1815	3,15216
40	0,025	0,1574	3,14953
50	0,020	0,14095	3,14791
60	0,0166	0,1287	3,14688
∞	0	0	π

aby funkcje czasu $T_1(t)$ i $T_2(t)$ oraz pochodne $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ i $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ były jak najbardziej zbliżone do nieznanych rozwiązań dokładnych. Staramy się zapewnić to przez dobre odwzorowanie częstości ω_1 i ω_2, funkcji własnych $X_1(x)$ i $X_2(x)$ oraz kształtu funkcji $\frac{\partial X_1}{\partial x}$ i $\frac{\partial X_2}{\partial x}$. W tabeli 2 i 3 podano wartości funkcji $\frac{\partial X_1(x)}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial X_2(x)}{\partial x}$ dla dokładnego rozwiązania równania (4).

3. Modele dyskretne drgań podłużnych układu lina-naczynie wydobywcze przy stałej długości liny

Modele dyskretne budować będziemy w oparciu o zmodyfikowaną metodę Galerkina. W tej metodzie funkcje kształtu dobieramy "a priori" kierując się obserwacją obiektów rzeczywistych, pomiarami na obiektach zbliżonych. W tym przypadku przy wyborze funkcji kierowano się rozwiązaniem dokładnym.

Przypadek a. Zakładamy rozwiązanie równania (4) w postaci

$$u(x,t) = u_1(x)T_1(t) = \frac{x}{l}T. \tag{13}$$

To znaczy odkształcenie liny jest proporcjonalne do odległości od punktu mocowania liny i przy naczyniu wydobywczym wynosi:

$$u(l,t) = T(t).$$

Odpowiada to przypadkowi nieważkiej nici obciążonej na końcu ciężarem Q. Wyznaczając odpowiednie pochodne i podstawiając do równania (4) i warunków brzegowych (5) i (6) uzyskano

$$\frac{q}{g}\,\frac{x}{l}\,\ddot{T} \neq 0 \tag{14}$$

$$\frac{Q}{g}\,\ddot{T} + EA\,\frac{1}{l}\,T \neq 0 \tag{15}$$

Tabela 2

Wartości $a_1(x) = l\,\dfrac{\partial X_1(x)}{\partial x} = z_1 \cos\dfrac{z_1 x}{l}$ oraz $b_1(x) = \dfrac{\dfrac{\partial X_1(x)}{\partial x}}{\dfrac{\partial X_1(0)}{\partial x}}$

β	z_1		$x = l$	$x=0{,}8\,l$	$x=0{,}5\,l$	$x=0{,}3\,l$	$x = 0$
0	3,1415	$a_1(x)$	0	0,4854	1,1107	1,3996	1,5708
		$b_1(x)$	0	0,3090	0,7071	0,8910	1,0000
1	0,86033	$a_1(x)$	0,5109	0,6448	0,7819	0,8318	1,0000
		$b_1(x)$	0,5939	0,7494	0,9077	0,9669	1,0000
2	0,65327	$a_1(x)$	0,5188	0,5660	0,6187	0,6408	0,6533
		$b_1(x)$	0,7941	0,8665	0,9471	0,9809	1,0000
3	0,5471	$a_1(x)$	0,4672	0,4954	0,5266	0,5396	0,5471
		$b_1(x)$	0,8540	0,9058	0,9628	0,9866	1,0000
4	0,4801	$a_1(x)$	0,4258	0,4451	0,4663	0,4751	0,4801
		$b_1(x)$	0,8869	0,9271	0,9713	0,9896	1,0000
5	0,4328	$a_1(x)$	0,3929	0,4071	0,4227	0,4312	0,4328
		$b_1(x)$	0,8859	0,9271	0,9713	0,9896	1,0000
10	0,31105	$a_1(x)$	0,2961	0,3015	0,3073	0,3097	0,3111
		$b_1(x)$	0,9520	0,9692	0,9879	0,9956	1,0000
20	0,2217	$a_1(x)$	0,2163	0,2182	0,2203	0,2212	0,2217
		$b_1(x)$	0,9755	0,9843	0,9933	0,9977	1,0000
30	0,1815	$a_1(x)$	0,1785	0,1796	0,1807	0,1812	0,1815
		$b_1(x)$	0,9836	0,9895	0,9958	0,9985	1,0000
40	0,1574	$a_1(x)$	0,1554	0,1562	0,1569	0,1572	0,1574
		$b_1(x)$	0,9876	0,9921	0,9969	0,9989	1,0000
50	0,14095	$a_1(x)$	0,1395	0,1401	0,1406	0,1408	0,1409
		$b_1(x)$	0,9901	0,9936	0,9975	0,9991	1,0000
60	0,1287	$a_1(x)$	0,1276	0,1280	0,1284	0,1286	0,1287
		$b_1(x)$	0,9917	0,9947	0,9979	0,9992	1,0000
	0	$a_1(x)$	0	0	0	0	0
		$b_1(x)$	1	1	1	1	1

Mnożąc zgodnie z algorytmem metody równanie (14) przez $u_1 = \frac{x}{l}$ i całkując w granicach 0, l, zaś równanie (15) przez wartość funkcji u_1 w punkcie l czyli przez $u_1\big/_{x=l} = 1$ oraz żądając aby suma reszt była równa zero, otrzymamy

$$\ddot{T}\left(\frac{Q}{g} + \frac{qL}{3g}\right) + T\frac{EF}{L} = 0 \tag{16}$$

Tabela 3

Wartości $a_2(x) = l\,\frac{\partial X_1 x}{\partial x} = z_2 \cos\left(z_2 \frac{x}{l}\right)$ oraz $b_2(x) = \frac{\frac{\partial X_2(x)}{\partial x}}{\frac{\partial X_2(0)}{\partial x}}$

β	z_2		x = 1	x=0,8 l	x=0,5 l	x=0,3 l	x = 0
0	4,712388	$a_2(x)$	0	-3,84240	-3,33216	0,73718	4,71239
		$b_2(x)$	0	-0,80902	-0,70711	0,15643	1
1	3,42562	$a_2(x)$	-3,28837	-3,15374	-0,48485	1,77036	3,42562
		$b_2(x)$	-0,95993	-0,92063	-0,14154	0,51680	1
2	3,3293	$a_2(x)$	-3,25499	-2,87694	-0,24785	1,81280	3,3293
		$b_2(x)$	-0,98866	-0,87383	-0,07528	0,55061	1
3	3,24398	$a_2(x)$	-3,22691	-2,77164	-0,16599	1,82526	3,24398
		$b_2(x)$	-0,99476	-0,85439	-0,05117	0,56266	1
4	3,2191	$a_2(x)$	-3,2094	-2,71655	-0,12472	1,83107	3,2191
		$b_2(x)$	-0,99699	-0,84389	-0,03874	0,56882	1
5	3,20393	$a_2(x)$	-3,19770	-2,60268	-0,09984	1,83442	3,20393
		$b_2(x)$	-0,99805	-0,83731	-0,03116	0,57255	1
10	3,173099	$a_2(x)$	-3,17152	-2,61328	-0,04998	1,84075	3,1709
		$b_2(x)$	-0,99950	-0,82357	-0,01575	0,58011	1
20	3,15743	$a_2(x)$	-3,15170	-2,57772	-0,02500	1,84373	3,15743
		$b_2(x)$	-0,99987	-0,81639	-0,00791	0,58393	1
30	3,15216	$a_2(x)$	-3,15198	-2,56572	-0,01665	1,84469	3,15216
		$b_2(x)$	-0,99993	-0,81396	-0,00528	0,58521	1
40	3,14953	$a_2(x)$	-3,14943	-2,55972	-0,01249	1,84517	3,14953
		$b_2(x)$	-0,99997	-0,81273	-0,00397	0,58585	1
50	3,14791	$a_2(x)$	-3,14785	-2,55603	-0,00994	1,84546	3,14791
		$b_2(x)$	-0,99998	-0,81197	-0,00316	0,58625	1
60	3,14688	$a_2(x)$	-3,14683	-2,55568	-0,00831	1,84565	3,14688
		$b_2(x)$	-0,99999	-0,81149	-0,00264	0,58650	1
∞	π	$a_2(x)$	$-\pi$	-2,54160	0	1,84658	π
		$b_2(x)$	-1	-0,80902	0	0,58778	1

Równanie to zapiszemy w postaci

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\frac{EAq}{l\left(Q + \frac{ql}{3}\right)}} \tag{17}$$

Wyrażenie to znane jest w literaturze [2] jako wzór Reyleigh'a. Wykorzystując oznaczenia (11), zapiszemy

$$\omega = B\sqrt{\frac{1}{\beta + \frac{1}{3}}} = B z_1$$

Wartości współczynnika częstości z_1 w funkcji β zestawiono w tabeli 4.

Tabela 4

β	z_1
0	1,73205
1	0,866025
2	0,654653
3	0,547722
4	0,480384
5	0,433013
10	0,311085
20	0,221766
30	0,181568
40	0,157459
50	0,140952
60	0,128742
∞	0

Natomiast $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ = const, co oznacza stałą wartość siły wzdłuż liny.

Przypadek b. Zakładamy rozwiązanie równania (4) w postaci

$$u(x,t) = u_1(x) \cdot T_2(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cdot T \tag{18}$$

U góry przy kole linowym funkcja $u_2(0) = 0$ a przy naczyniu wydobywczym $u_1 = 1$, a więc $u(l,t) = T(t)$. Postępując jak uprzednio uzyskamy równanie

$$\ddot{T}\left(\frac{Q}{g} + \frac{ql}{2g}\right) + \frac{\pi}{8}\frac{EF}{l} T = 0 \tag{19}$$

czyli

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{20}$$

gdy

$$\omega = \sqrt{\frac{EAg}{ql^2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2}{4(2\beta+1)}} \tag{21}$$

Wartości $z_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2\beta + 1}}$ dla różnych β zestawiono w tabeli 5.

Tabela 5

β	z_1
0	$\frac{\pi}{2}$
1	0,906899
2	0,702481
3	0,593705
4	0,523599
5	0,473613
10	0,342776
20	0,245317
30	0,201120
40	0,174533
50	0,156300
60	0,142799
∞	0

Pochodna $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\pi}{2l} \cos\left(\frac{\pi}{2l} x\right)$ daje rozkład siły zgodny z dokładnym rozwiązaniem tylko dla przypadku $\beta = 0$, kiedy funkcja przybliżona u_1 zgadza się z pierwszą postacią własną modelu ciągłego. Z porównania przybliżonych wartości własnych /tab.4/ z dokładnymi wartościami pierwszej postaci /tab.1/ wynika dobra ich zgodność dla $\beta \in \langle 1 \div 8)$. Można uzyskać dobrą zgodność przybliżonej funkcji $u_1(x)$ z funkcją własną z zależności (8) a więc i ich pochodnych po współrzędnej x wstawiając do zależności (18) w miejsce $\frac{\pi}{2}$ przybliżoną wartość z_1 z tab.4

$$u(x,t) = \sin\left(z_1 \frac{x}{l}\right) \cdot T_1(t)$$

Tak wyznaczona funkcja u(x,t) zapewnia dobrą zgodność rozkładu siły normalnej N wzdłuż liny porównaj zależność (12).

Przypadek c. Rozwiązanie równania (4) założono w postaci sumy

$$u(x,t) = u_1 T_1 + u_2 T_2 = \frac{x}{l} T_1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2l} x\right) T_2 \tag{22}$$

Pierwsza funkcja kształtu $u_1 = \frac{x}{l}$ odwzorowuje ciężar zawieszony na nieważkiej nici, natomiast drugą funkcję kształtu przyjęto w postaci $u_2 = \sin \frac{3\pi}{2l} x$ dlatego, że spodziewano się wystąpienia węzła w drugiej postaci własnej.

Wyznaczając odpowiednie pochodne i postępując zgodnie z algorytmem metody Galerkina, otrzymano układ równań sprzężonych

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{T}_1\left(\frac{Q}{g}+\frac{ql}{3g}\right)-\ddot{T}_2\left(\frac{Q}{g}+\frac{4}{9\pi^2}\frac{ql}{g}\right)+T_1\frac{EA}{l}-T_2\frac{EA}{l}=0\\ &-\ddot{T}_1\left(\frac{Q}{g}+\frac{4}{9\pi^2}\frac{ql}{g}\right)+\ddot{T}_2\left(\frac{Q}{g}+\frac{ql}{2g}\right)-T_1\frac{EA}{l}+T_2\frac{9\pi^2}{8}\frac{EA}{l}=0\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Zakładając, że nieznane funkcje czasu są okresowe $T_1 = A_1 \sin \omega t$ i $T_2 = A_2 \sin \omega t$ otrzymuje się, po wyznaczeniu odpowiednich pochodnych i podstawieniu do (23), układ jednorodnych liniowych równań algebraicznych o stałych współczynnikach, który ma tylko wtedy nie zerowe rozwiązanie, gdy wyznacznik charakterystyczny równa się zero. Otrzymano równanie dwukwadratowe

$$\omega^4 K_1-\omega^2 B K_2+B^2 K_3=0 \tag{24}$$

gdzie

$$K_1=\left(\frac{5}{6}-\frac{8}{9\pi^2}\right)\beta+\frac{1}{6}-\left(\frac{4}{9\pi^2}\right)^2$$

$$K_2=\left(\frac{9\pi^2}{8}-1\right)\beta+\frac{3\pi^2+4}{8}-\frac{8}{9\pi^2}$$

$$K_3=\left(\frac{9\pi^2}{8}-1\right)$$

Rozwiązaniem równania (24) jest

$$\omega^2_{1/2}=B\cdot\frac{K_2\mp\sqrt{K_2^2-4K_1K_3}}{2K_1} \tag{25}$$

W tabeli 7 zestawiono wartości bezwymiarowych współczynników częstości z_1 i z_2 wyznaczone z zależności

$$z_{1/2}=\sqrt{\frac{K_2\mp\sqrt{K_2^2-4K_1K_2}}{2K_1}}$$

Tabela 7

1	2	3	4	5
β	z_1	z_2	$\mu(\omega_1)$	$\mu(\omega_2)$
0	1,662358	4,712389	0,090063	∞
1	0,863923	3,86132	0,022039	1,294799
2	0,654134	3,781475	0,012696	1,145968
4	0,480277	3,736220	0,006652	1,072558
10	0,311073	3,707132	0,002766	1,028910
60	0,128742	3,690300	0,007649	1,004807

Bezwymiarowy współczynnik amplitud postaci drugiej do pierwszej drgań własnych układu zależny jest od współczynnika β i odpowiadających mu częstości drgań

$$\mu(\omega_i)=\frac{1-z_i^2(\beta+\frac{1}{3})}{1-z_i^2(\beta+\frac{4}{9\pi^2})} \tag{26}$$

Otrzymane wartości współczynnika $\mu(\omega_1)$ i $\mu(\omega_2)$ naniesiono w tabeli 7 rubryka 4 i 5. Analizując przebieg wartości stwierdzamy, że $\mu_1(\omega_2) \to 1$ a $\mu(\omega_2) \to 0$. Znaczy to, że pierwsza funkcja własna

$$\Phi_1(x)=\mu_1(x)+\mu(\omega_1)\cdot u_2(x) \tag{27}$$

dla $\beta \geqslant 2$ może być z dobrą dokładnością przybliżona funkcją $\mu_1(x)$ z powodu małych wartości współczynnika $\mu(\omega_1)$

$$\phi_1(x)=u_1(x) \tag{28}$$

Druga funkcja własna

$$\phi_2(x)=u_1(x)+\mu(\omega_2)\,u_2(x) \tag{29}$$

może być z dobrą dokładnością przybliżona funkcją

$$\phi_2(x)=u_1(x)+u_2(x) \tag{30}$$

Wartość siły w linie wyrażona będzie sumą

$$N=EF\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_1(x)\,T(\omega_1)+\Phi_2(x)\,T(\omega_2)\right] \tag{31}$$

Aby porównać otrzymane wartości sił z siłami uzyskanymi z dokładnego rozwiązania w tabelach 8 i 9 zestawiono wartości pochodnych względem argumentu x funkcji $\Phi_1(x)$ i $\Phi_2(x)$

Tabela 8

$$a_1 = l\,\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \mu(\omega)\,\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2\,l}\,x + 1\ ;\quad b_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_1(0)}$$

β	μ_1		x = l	x=0,8 l	x=0,5 l	x=0,3 l	x = 0
4	0,006652	$a_1(x)$	1	0,97464	0,97783	1,00490	1,03135
		$b_1(x)$	0,96961	0,94501	0,94811	0,97436	1
10	0,002766	$a_1(x)$	1	0,98945	0,99078	1,00201	1,01303
		$b_1(x)$	0,98713	0,97672	0,97803	0,98915	1
60	0,000765	$a_1(x)$	1	0,99708	0,99745	1,00056	1,00360
		$b_1(x)$	0,99641	0,99350	0,99387	0,99697	1
∞	0	$a_1(x)$	1	1	1	1	1
		$b_1(x)$	1	1	1	1	1

Tabela 9

$$a_2(x) = l\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu(\omega_2)} + \frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2l}x\,; \qquad b_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_2(0)}$$

β	$\frac{1}{\mu(\omega_2)}$		$x = l$	$x = 0{,}8\,l$	$x = 0{,}5\,l$	$x = 0{,}3\,l$	$x = 0$
4	0,933505	$a_2(x)$	0,933505	-2,880052	-2,399811	1,669530	5,644739
		$b_2(x)$	0,165171	-0,5102188	-0,425141	0,295767	1
10	0,971902	$a_2(x)$	0,971902	-2,840500	-2,360260	1,709082	5,684291
		$b_2(x)$	0,170980	-0,499710	-0,415225	0,300667	1
60	0,995215	$a_2(x)$	0,995215	-2,817187	-2,336946	1,732395	5,707604
		$b_2(x)$	0,174367	-0,493585	-0,409444	0,303524	1
∞	1	$a_2(x)$	1	-2,812402	-2,331622	1,737180	5,712388
		$b_2(x)$	0,175058	-0,492333	-0,408264	0,304107	1

4. Wnioski końcowe

Przedstawione analizy pokazują, że dla uzyskania dobrego modelu dyskretnego liny układu wydobywczego konieczne jest, aby funkcja przybliżona $u_1(x)$, odtwarzająca pierwszą postać własną układu, zapewniała dobrą zgodność wartości własnej z_1, oraz pochodnej $\frac{\partial u_1(x)}{\partial x}$ z analogicznymi wielkościami dokładnymi.

Dla praktycznie spotykanych w kopalniach wartości współczynnika $\beta = \frac{Q}{ql}$ do obliczenia wartości z_1 oraz wyznaczenia ruchu naczynia wydobywczego podczas jazdy wystarczy zakładać funkcję przybliżoną $u_1(x)$ w postaci $u_1 = \frac{x}{l}$. Natomiast dla uzyskania dobrej zgodności rozkładu siły normalnej w linie należy zakładać funkcję przybliżoną $u_1(x)$ w postaci $u_1 = \sin\left(z_1 \frac{x}{l}\right)$ przy czym wartość z_1 trzeba brać ze wzoru Rayleigh'a (17).

Założenie rozwiązania w postaci sumy dwóch funkcji /przypadek c/ $u(x,t) = \frac{x}{l}T_1 + T_2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)$ pozwala na uzyskanie modelu o dwu stopniach swobody odtwarzającego dwie pierwsze postacie własne. Tak uzyskane modele wykazują dobrą zgodność z rzeczywistym układem wydobywczym dla ruchu tego układu przy zahamowanym kole napędowym. Wydaje się więc celowe ich użycie do analizy ruchu układu wydobywczego.

Literatura

Z.Dżygadło,S.Kaliski,L.Solarz,E.Włodarczyk: Drgania i fale w ciałach stałych. Praca zbiorowa pod ogólną redakcją naukową S.Kaliskiego. PWN Warszawa 1966.

G.N.Sawin,O.A.Goroszko Dinamika niti pieremiennoj dliny.Izdatielstwo Akademii Nauk Ukrainskoj SSR. Kijew 1962.

CRITERIA TO DETERMINE THE APPROXIMATED FUNCTIONS NECESSARY WHEN CONSTRUCTING A DISCRETE MODEL OF THE LONGITUDINAL VIBRATIONS IN THE HOIST ROPES

The work presents the comparison between the approximate solution obtained by the Galerkin's modified method and the precise solution of longtitudinal non-damped vibrations of a heavy rope loaded with concentrated weight on one side and fixed on the other.The analysis has been conducted for various values $\beta = \frac{Q}{ql}$ of the weight suspended from the rope Q to the dead weight ql.For different values of β the tables give the exact solution for the first and second natural frequencies and the corresponding self functions as well as the longtitudinal force in the rope occuring during the vibrations with these frequencies.
Then the method of approximate solution for the assumed approximate self function u x has been given,where x - coordinate of the element of the rope,measured from the attached end.The approximate solution has been made for the following approximate functions:

a/ linear $u_1 = \frac{x}{l}$

b/ sinus $u_1 = \sin \frac{\pi}{2l} x$

c/ kombinowana $u_1 = \frac{x}{l}$; $u_2 = \sin \frac{3\pi}{2l} x$

The approximate solution has been compared with the precise solution and the conclusions have been given.

КРИТЕРИИ ПОДБОРА АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИИ СЛУЖАЩИХ ДЛЯ ПОСТРОЙКИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОДЪЁМНОГО КАНАТА

В работе проведено сравнение приближенного решения, полученного модифицированным методом Галеркина, с точным решением продольных незатухающих колебаний тяжелого каната, нагруженного с одной стороны сосредоточенной нагрузкой и укрепленного с другой стороны. Анализ проведен для разных значений $\beta = \frac{Q}{ql}$ груза, подвешенного на канате Q к его собственному весу ql.
Для разных значений β представлено в таблице точное решение для первой и второй собственной частоты, а также соответствующих им собственных функций, кроме того для продольной силы в канате, выступающей во время колебаний с этими частотами.
Далее представлен метод получения приближенного решения для заданной, приближенной собственной функции $u(x)$, где x - координата элемента каната, измеряемая от укрепленного кочца. Приближенное решение проведено для следующих приближенных функций:

а/ канатная $u_1 = \frac{x}{l}$

б/ синус $u_1 = \sin \frac{\pi}{2l} x$

в/ комбинированная $u_1 = \frac{x}{l}$; $u_2 = \sin \frac{3\pi}{2l} x$

Приближенное решение было сравнено с точным решением и были представлены выводы.