ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977

Seria: GÓRNICTWO z. 81 Nr kol. 548

KONFERENCJA: MODELOWANIE GÓRNICZYCH MASZYN WYCIĄGOWYCH
9 - 10.XII.1977

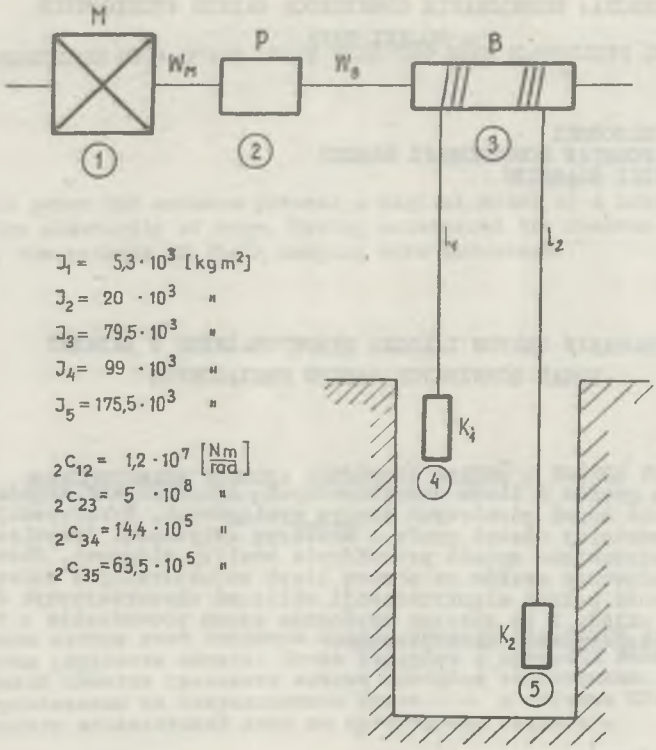
JÓZEF WOJNAROWSKI
INSTYTUT PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE

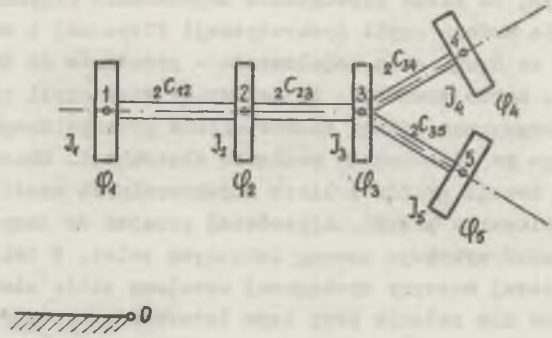
# ZASTOSOWANIE GRAFÓW I LICZB STRUKTURALNYCH W BADANIU DRGAŃ GÓRNICZYCH MASZYN WYCIĄGOWYCH

Za pomocą grafów i liczb strukturalnych, sformułowano zagadnienie badania drgań górniczych maszyn wyciągowych. Wykorzystując pojęcia macierzy odcięć grafu i macierzy sztywności dynamicznych przedstawiono sposób prowadzenia analizy widmowej. Stosując metodę kodowania grafów za pomocą liczb strukturalnych wskazano na możliwość pełnej algorytmizacji obliczeń charakterystyk dynamicznych układu i na znaczne skrócenie czasu prowadzenia z tego zakresu eksperymentu numerycznego.

## 1. Wprowadzenie

Jest znanym, że każde rozwiązanie zagadnienia fizycznego wymaga przyjęcia modelu czyli dyskretyzacji fizycznej i ma decydujący wpływ na drugi etap modelowania - przejścia do danych liczbowych [8]. Łatwo zauważyć, że ten drugi etap czyli tzw. dyskretyzacja numeryczna wymaga konsekwentnie przemyślanego aparatu matematycznego na odpowiednim poziomie abstrakcji. Okazuje się, że formalizm teorii grafów i liczb strukturalnych umożliwia, w procesie modelowania maszyn, najprościej przejść do danych liczbowych a ponadto wykazuje szereg istotnych zalet. W takim ujęciu dla górniczej maszyny wyciągowej ustalamy zbiór elementów i określone na nim relacje przy czym interesują nas wśród nich te, które są jednoznaczne. Pojęcie więc układu jest identyfikowane z relacją strukturalną, a dzięki przyporządkowaniu maszynie wyciągowej, jako układowi konkretnemu, jej modelu abstrakcyjnego można w badaniu drgań tych maszyn wykorzystać teorię grafów. Graf biegunowy bądź blokowy jest podstawą analizy numerycznej za pomocą liczb strukturalnych [1,5].



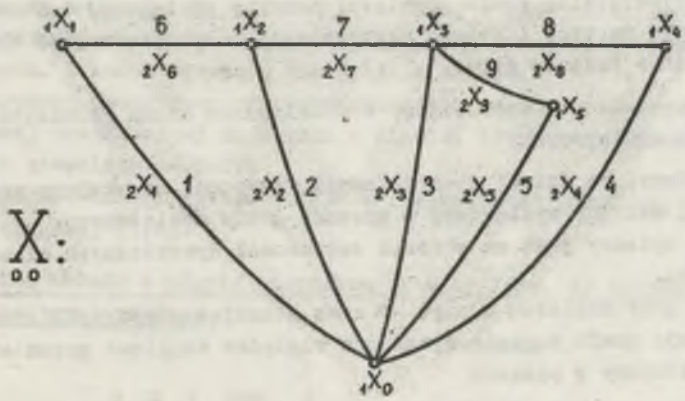




Rys.1 Model i schemat zastępczy górniczej maszyny wyciągowej
M-silnik; P-przekładnia; B-bęben; $K_1$, $K_2$ -naczynia wydobywcze; $l_1$, $l_2$ - liny

## 2. Istota metody modelowania za pomocą grafów i liczb strukturalnych

Rozważmy górniczą maszynę wyciągową, którą w dalszym ciągu będziemy nazywać układem mechanicznym.

Podstawowym krokiem w badaniu drgań układu mechanicznego za pomocą grafów i liczb strukturalnych jest proces retykulacji czyli nadawania układowi /rys. 1/ struktury sieciowej w postaci grafu /rys. 2/




Rys. 2. Graf biegunowy górniczej maszyny wyciągowej zdyskretyzowanej do układu o pięciu stopniach swobody.

W celu uzyskania modelu struktury dynamicznej układu, dokonujemy obciążenia grafu poprzez przyporządkowaniu zbiorowi krawędzi $_2X$ grafu X pary zbiorów zmiennych $[_1S, {}_2S]$ opisujących układ S

$$f : [_2X] \longrightarrow [_1S, {}_2S]. \qquad (1)$$

Graf obciążony $X = [X, f]$ zwany dalej biegunowym opisuje strukturę układu i określa związki między zmiennymi.

Aby przejść do zapisania grafu w pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej można stosować metodę kodowania grafu za pomocą macierzy odcięć $_2B$ lub cyklomatycznej $_3B$ względnie liczby strukturalnej A. W tym ostatnim przypadku analizowany układ wyciągowy opisujemy modelem w postaci częściowo uporządkowanego zbioru elementów liczbowych, z których każdy jest izomorficzny z oznaczeniem krawędzi grafu układu i odwzorowuje jego własności.

Wprowadzając cyfrowe oznaczenie krawędzi grafu liczbę strukturalną zapisujemy w postaci kanonicznej

$$A = \prod_{i=1}^{n_1-1} A_i \qquad (2)$$

gdzie:

$A_i$ jest liczbą strukturalną pierwszą utworzoną z elementów będących oznaczeniami krawędzi incydentnych w wierzchołku i,

$n_1$ - liczbą wierzchołków grafu.

Liczba strukturalna grafu górniczej maszyny wyciągowej i funkcje wprowadzone na tych liczbach ułatwiają zastosowanie maszyn matematycznych w badaniu drgań.

3. Zastosowanie macierzy odcięć w modelowaniu drgań górniczych maszyn wyciągowych

Zakładamy, że dzięki dyskretyzacji fizycznej uzyskujemy model górniczej maszyny wyciągowej w postaci grafu obciążonego. Graf ten opisany jest na zbiorze sztywności dynamicznych elementów układu.
Opisując graf macierzą odcięć $_2\mathbf{B}$ oraz stosując prawa cykliczne i przekroju grafu drgania wymuszone względem amplitud przemieszczeń zapisujemy w postaci

$$\mathbf{Z}\ {}_1\mathbf{S} = \mathbf{F}\ , \qquad (3)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = {}_2\mathbf{B} \cdot \mathbf{W}(p) \cdot {}_2\mathbf{B}^T \qquad (4)$$

jest macierzą sztywności dynamicznych,
**S** - wektorem kolumnowym amplitud przemieszczeń,
**F** - wektorem kolumnowym amplitud wymuszeń,
**W**(p) - diagonalną macierzą równań biegunowych grafu.
Zależność

$$ {}_2\mathbf{B} \cdot \mathbf{W}(p) \cdot {}_2\mathbf{B}^T = 0 \qquad (5)$$

jest podstawą prowadzenia analizy widmowej metodą grafów.

4. Opis programu i wyniki numeryczne

W opracowanym programie WIDMO CZĘSTOŚCI*) zastosowano procedurę wyznaczania wartości własnych do macierzy sztywności dynamicznych. W szczególności wykorzystano procedurę wyznaczania wartości własnych, procedurę transponowania macierzy, procedurę mnożenia macierzy i procedurę mnożenia macierzy przez macierz kolumnową.

*) Program opr. Mgr B.Partyka z CBRDiUT DETRANS Bytom.

Program ten napisany w języku Algol-1204 działa pod kontrolą translatora MTA-1 systemu MT 1204 B.

Danymi wejściowymi są:

$n$ - liczba stopni swobody,

$m$ - liczba krawędzi,

$n_1$ - liczba wskazująca ilość mas wirujących,

$n_2$ - liczba wskazująca ilość sztywności skrętnych,

$e_1, g_1$ - liczby związane z dokładnością obliczeń i niezbędne dla organizacji programu.

Następnie wczytuje się promień r, a dalej w kolejności momenty bezwładności, masy oraz sztywności zgodnie z macierzą równań biegunowych. W końcu wczytują się macierz odcięć..

Eksperyment numeryczny przeprowadzono dla górniczej maszyny wyciągowej zredukowanej do układu o pięciu, trzynastu i dwudziestu pięciu stopniach swobody.

Szczegółowe dane liczbowe wzięto z rzeczywistej górniczej maszyny wyciągowej [3,6].

4.1. Dla układu o pięciu stopniach swobody /rys. 2/ wczytano następujące dane

Tablica 1

5 9

3 2 1 100 1

5300 20000 79500 99000 175000

12000000 500000000 1440000 6350000

1 0 0 0 0 -1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 -1 0 0

0 0 1 0 0 0 1 -1 -1

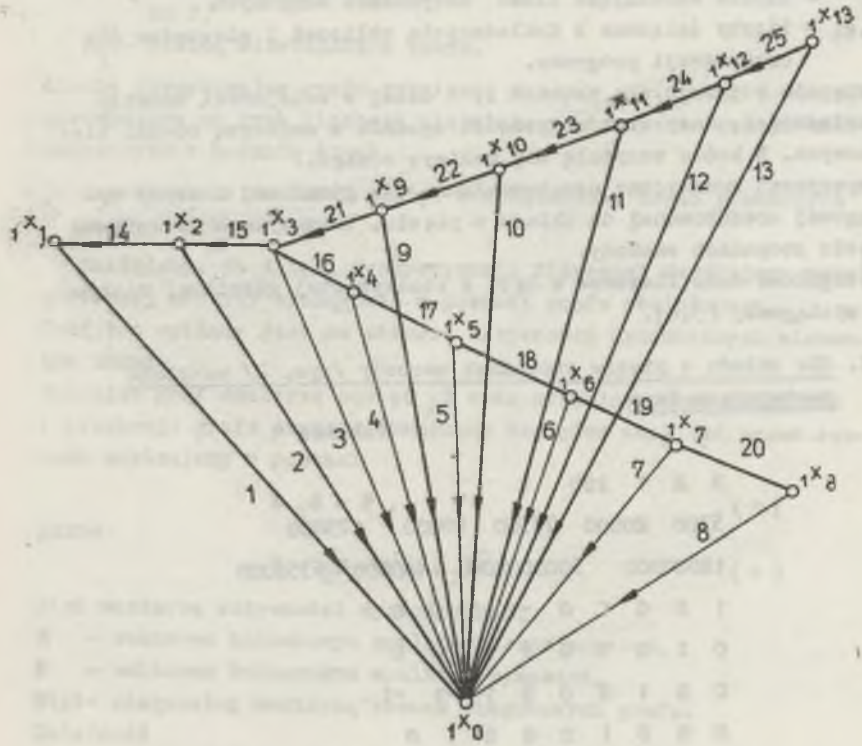
0 0 0 1 0 0 0 1 0

0 0 0 0 1 0 0 0 1

W wyniku obliczeń, którego czas trwał około 2 minut uzyskano następujące wartości

0,00; 4,21; 10,35; 48,48; 178,40.

4.2. Dla układu o trzynastu stopniach swobody /rys. 3/ wczytano następujące dane




Rys. 3 Graf biegunowy górniczej maszyny wyciągowej zdyskretyzowanej do układu o 13 stopniach swobody

13 25 Tablica 2

3 2 1 100 2

5300 20000 52000 5550 5550 5550 19200 1100 3800

32000 5300 5300 5300 12000000 500000000 22000 11000

11000 22000 11600 32000 32000 7200 7200 7200

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

W wyniku obliczeń, których czas trwał około 5 minut uzyskano następujące częstości:
0,00; 0,40; 0,60; 1,10; 1,49; 1,68; 2,11; 2,59; 2,88; 3,36; 4,27; 48,98; 187,30.

4.3. Dla układu o dwudziestupięciu stopniach swobody wczytano następujące dane /tablica 3/

W wyniku obliczeń, którego czas trwał około 12 minut uzyskano następujące wyniki
0,00; 4,02; 6,36; 10,95; 16,78; 17,22; 26,66; 26,71; 29,97; 34,99; 40,79; 41,32; 45,28; 48,31; 50,10; 55,28; 56,78; 64,00; 70,91; 101,76; 107,68; 123,44; 188,28.
Zauważmy, że analiza widmowa metodą grafów sprowadza się do skonstruowania grafu, wyznaczania macierzy odcięć, równań biegunowych i obliczeń na EMC.

Należy podkreślić, że w wielu przypadkach zachodzi konieczność konstruowania grafu dla układu z członami sprzęgającymi[x)] o ce-

x) Człon, w którym następuje wzajemne oddziaływanie fizykalnie różnych wielkości.

Tablica 3

23 45

3 2 1 100 2

5300 20000 52000 2770 2770 2770 2770 2770 2770 17000 1100

1100 1100 1270 1270 1270 32000 2650 2650 2650 2650 2650 2650

12000000 500000000 4400000 2200000 2200000 2200000 2200000 2200000

4400000 3500000 3500000 3500000 9600000 4800000 4800000 9600000

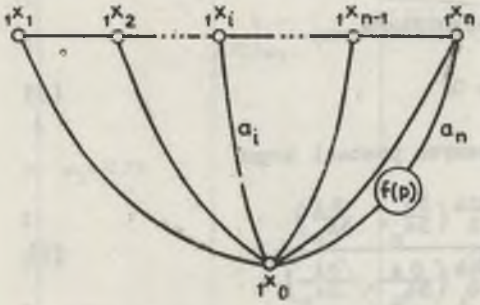
1440000 1440000 1440000 1440000 1440000 1440000

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

chach transformatora lub giratora. Uzyskanie spójnego grafu układu z takimi sprzężeniami wymaga odpowiedniego przekształcenia, które dla giratora ma charakter przekształcenia dualnego części grafu. Dlatego też w ogólności konstruowania spójnego grafu dla układu z liniowymi sprzężeniami jest utrudnione i może prowadzić do grafu nieplanarnego. Trudności te niekiedy można ominąć stosując grafy blokowe [5].

## 5. Badanie drgań maszyn za pomocą liczb strukturalnych pierwszej kategorii

Analizę widmową i modalną można znacznie uprościć /rys. 4/ jeśli graf biegunowy układu mechanicznego przedstawić w reprezentacji kolumn liczby strukturalnej i funkcji wprowadzonych na tych liczbach [5].




Rys. 4 Graf biegunowy górniczej maszyny wyciągowej o n stopniach swobody

W szczególności dla grafu układu /rys. 4/ opisanym zbiorem sztywności dynamicznych Z możemy określić

1° Sztywność dynamiczną i-tego elementu w układzie

$$z_i = \frac{\det_Z \frac{\delta A}{\delta a_n}}{\det_Z \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\delta A}{\delta a_n}\right)}, \qquad (6)$$

gdzie: A - liczba strukturalna grafu,

$a_i$ - element liczby strukturalnej przyporządkowanej i-tej krawędzi grafu,

$a_n$ - element liczby strukturalnej przyporządkowanej krawędzi wymuszenia siłowego,

$\det_Z$ - funkcja wyznacznikowa,

$\frac{\partial A}{\partial a_i}$ $\frac{\delta A}{\delta a_n}$ - symbol pochodnej /przeciwpochodnej liczby strukturalnej względem jej elementu $a_n$.

2° Siłową funkcję przejścia

$$K_f = \frac{\operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial a_i}, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right)}{\det_Z \frac{\delta A}{\delta a_n}} z_{a_i} \tag{7}$$

gdzie: $\operatorname{Sim}_Z$ - symbol funkcji jednoczesności,

$z_{a_i}$ - sztywność dynamiczna przyporządkowana elementowi $a_i$.

3° Równanie charakterystyczne

$$\det_Z \frac{\delta A}{\delta a_n} = 0. \tag{8}$$

4° Współczynniki głównych postaci drgań

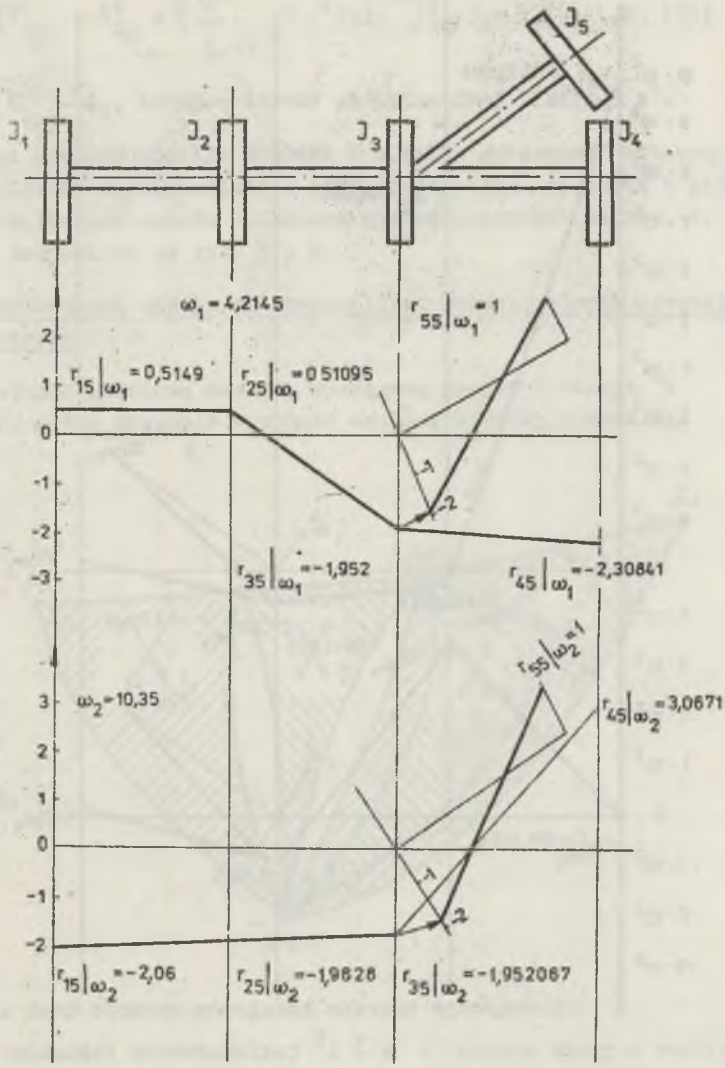
$$r_{s(i)\,t} = \frac{\operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial a_n}, \frac{\partial A}{\partial a_s}\right)}{\operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial a_n}, \frac{\partial A}{\partial a_t}\right)}. \tag{9}$$

W bezpośrednim badaniu drgań górniczych maszyn wyciągowych po dokonaniu redukcji i określeniu współczynników sztywności dynamicznych elementów układu, zagadnienie sprowadza się do obliczania funkcji wyznacznikowych liczby strukturalnej.
Opracowane programy generowania liczb strukturalnych[*] i funkcji wyznacznikowych ułatwiają prowadzenie badania drgań na elektronicznych maszynach cyfrowych.
W takim przypadku najwygodniej zastosować binarną postać $A^D$ naturalnej liczby strukturalnej A. Kolumny jej są zapisanymi w kodzie binarnym sumami postaci[**]

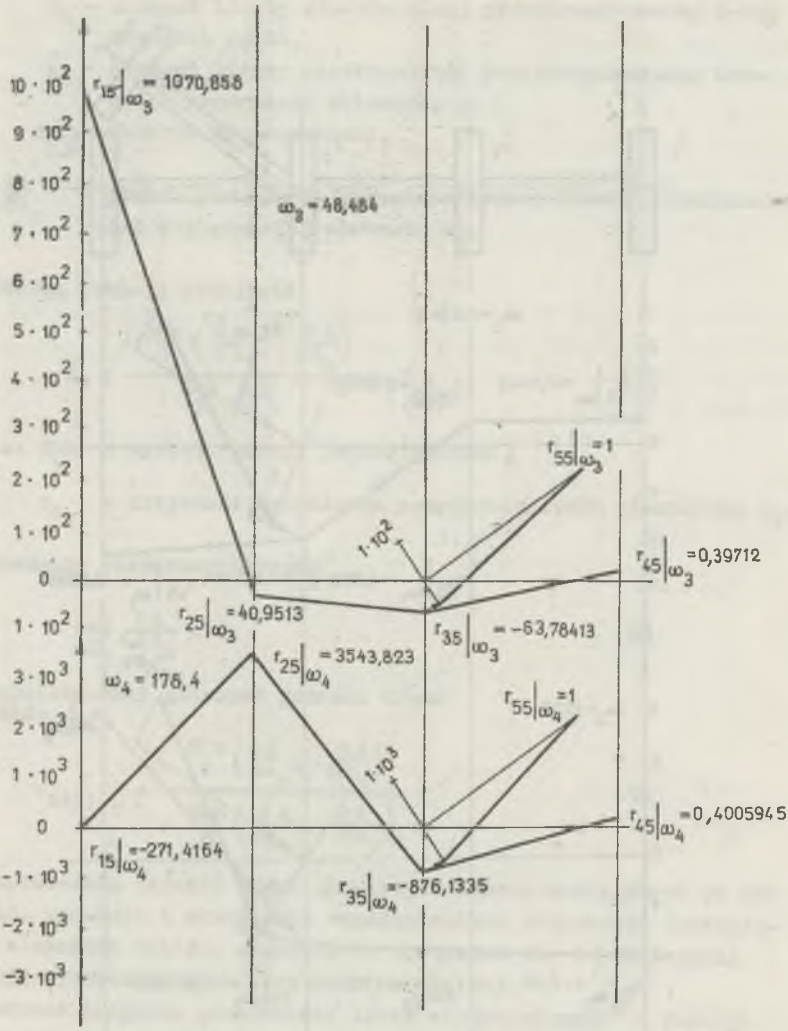
---

[*] Por. np. [5].

[**] Por. [5] str. 85.




Rys.5 Główne postacie drgań dla wartości $\omega_1$ i $\omega_2$




Rys.6 Główne postacie drgań dla wartości $\omega_3$ i $\omega_4$

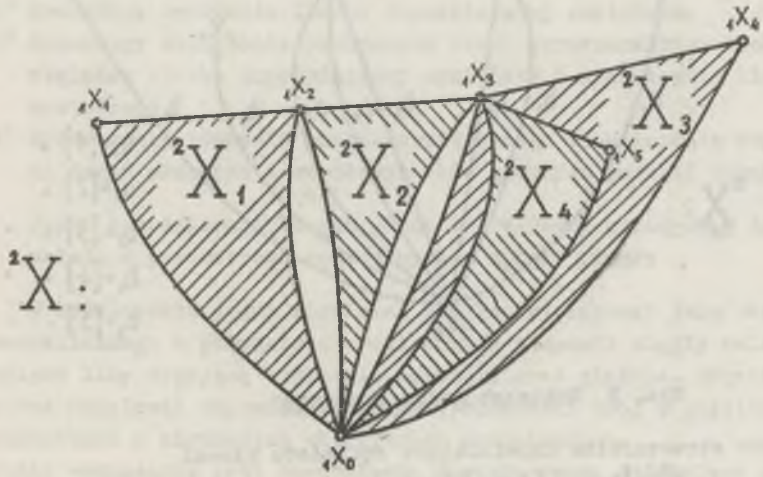
$$A^b = \left\{ \bar{a}^b_{j_2} : \bar{a}^b_{j_2} = \left( \sum_{j_1=1}^{n_k} 2^{a_{j_1 j_2} - 1} \right) \right\}, \; j_2 = 1,2,\ldots,k, \quad (10)$$

gdzie: $\bar{a}^b_{j_2}$ - $j_2$ kolumna liczby strukturalnej binarnej $A^b$.

Stosując program ANALIZA WIDMOWA I MODALNA generowano binarną postać liczby strukturalnej i wyznaczono widmo częstości i główne postacie drgań układu opisanego grafem pokazanym na rys. 2. Wyniki zestawiono na rys. 5 i 6.

## 6. Badanie drgań maszyn za pomocą liczb strukturalnych drugiej kategorii

Modelując górniczą maszynę wyciągową grafem blokowym $^2X$ /rys. 7/ można znacznie uprościć analizę widmową i modalną.




Rys. 7. Graf blokowy górniczej maszyny wyciągowej

Dzięki równości strukturalnej $^2A \overset{e}{=} A$ 1 podane wzory w rozdziale 5 są również słuszne w reprezentacji liczb strukturalnych drugiej kategorii.

Aby wyznaczyć liczbę strukturalną $^2A$ grafu blokowego obliczamy liczbę strukturalną dopełniającą szkieletu $_0A^d$.

Następnie wykorzystując prawa cykliczne grafów liczbą strukturalną grafu blokowego $^2A$ wyrażamy przez liczby strukturalne jego bloków $_1A$, $_2A$,...,$_nA$ czyli

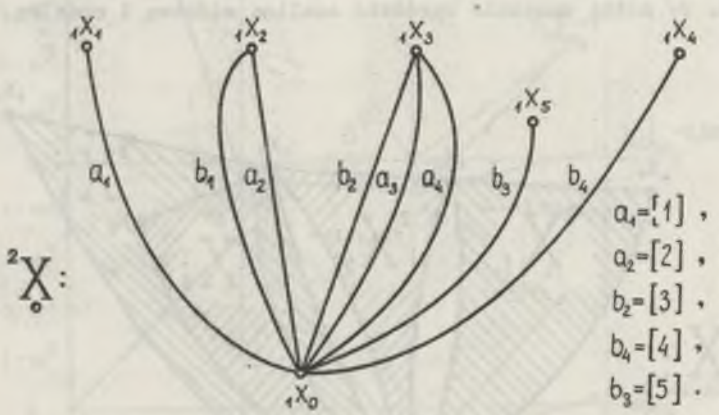
$$ {}^{2}A = \frac{\partial \prod_{1}^{n} {}_{j}A}{\partial\, {}_{o}A^{d}} = \left[{}_{o}A^{d}\right] \downarrow \begin{bmatrix} {}_{1}A \\ {}_{2}A \\ \vdots \\ {}_{n}A \end{bmatrix} ; \qquad (11) $$

gdzie: ${}_{o}A^{d}$ jest liczbą strukturalną dopełniającą szkieletu grafu blokowego,

n - jest liczbą bloków,

$\downarrow$ - oznacza operację przeniesienia wskaźników dolnych.

W rozpatrywanym przypadku szkielet grafu blokowego /rys. 8/ wybrano w ten sposób, że wykorzystano wyłącznie krawędzi odniesienia.




Rys. 8 Szkielet grafu blokowego

Liczba strukturalna dopełniająca szkieletu wynosi

$$ A^{d} = [b_1 a_2]\,[b_2 a_3]\,[b_2 a_4] $$

natomiast liczba strukturalna ${}^{2}A$ grafu blokowego ${}^{2}X$ przyjmie postać

$$ {}^{2}A = \left[{}_{o}A^{d}\right]\downarrow \begin{bmatrix} {}_{1}A \\ {}_{2}A \\ {}_{3}A \\ {}_{4}A \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial[b_1 a_2]} \left( \frac{\partial}{\partial[b_2 a_3]} \left( \frac{\partial}{\partial[b_2 a_4]} \begin{bmatrix} {}_{1}A \\ {}_{2}A \\ {}_{3}A \\ {}_{4}A \end{bmatrix} \right) \right) \qquad (12) $$

albo ostatecznie

$$
{}^{2}A = \begin{bmatrix} {}^{1}A_b & {}^{1}A_b & {}^{1}A_b & {}^{1}A & {}^{1}A & {}^{1}A \\ {}^{2}A_b & {}^{2}A_b & {}^{2}A & {}^{2}A_{ab} & {}^{2}A_{ab} & {}^{2}A_a \\ {}^{3}A & {}^{3}A_a & {}^{3}A_a & {}^{3}A & {}^{3}A_a & {}^{3}A_a \\ {}^{4}A_a & {}^{4}A & {}^{4}A_a & {}^{4}A_a & {}^{4}A & {}^{4}A \end{bmatrix}.
$$

Wyrażenie (12) uwidacznia kolejność zwierania wierzchołków bloków.

Aby określić funkcje wyznacznikowe liczby strukturalnej ${}^{2}A$ wykonujemy działania na funkcjach wyznacznikowych jej elementów. Po uporządkowaniu tak otrzymanego wielomianu i przyrównaniu do zera uzyskujemy równanie częstości.

Algorytm opracowanego programu zawiera:

1° Wczytanie macierzy incydencji sztywności dynamicznych i liczb strukturalnych bloków,

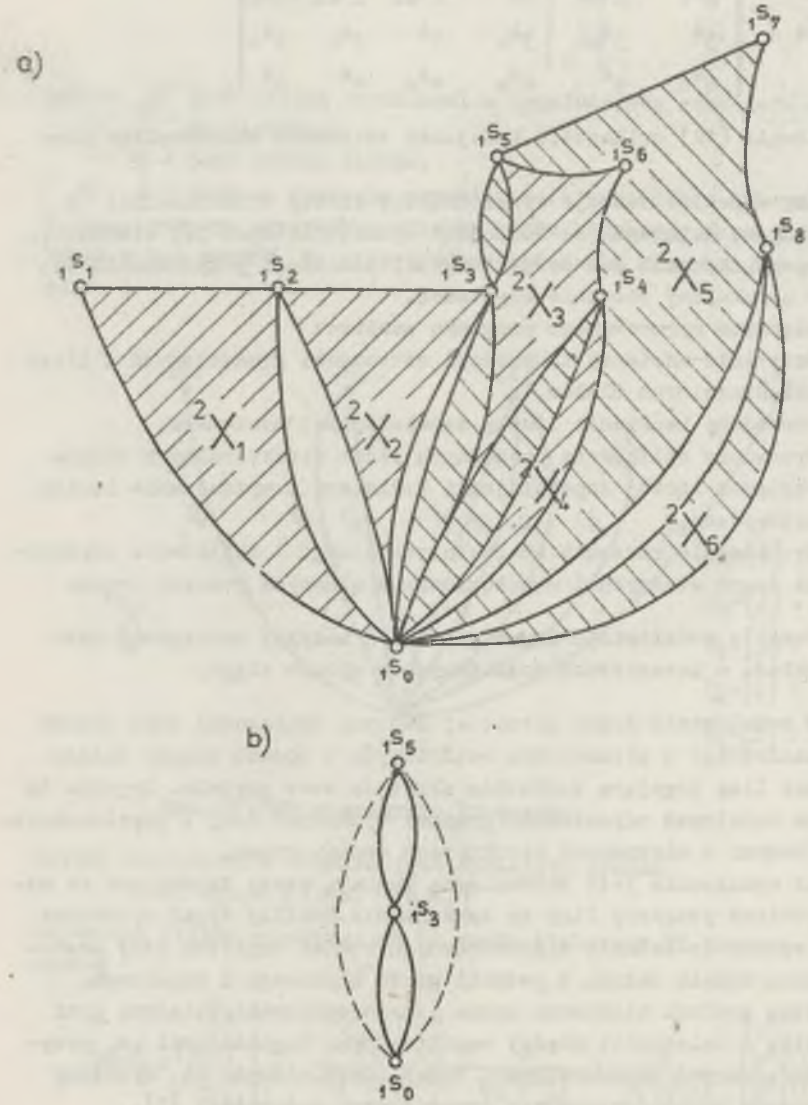
2° Procedurę tworzenia liczby dopełniającej szkieletu,

3° Procedury obliczania pochodnych liczb strukturalnych bloków względem liczby dopełniającej szkieletu i wyznaczania liczby zastępczej,

4° Wyznaczanie równania charakterystycznego i obliczanie częstości drgań własnych i współczynników głównych postaci drgań.

## 7. Uwagi o modelowaniu drgań górniczej maszyny wyciągowej jako układu o parametrach rozłożonych w sposób ciągły

W modelowaniu drgań górniczej maszyny wyciągowej jako układu mechanicznego o parametrach rozłożonych w sposób ciągły należy opisać linę drgającą wzdłużnie skrętnie oraz giętnie. Drgania te można modelować odpowiednio grafami blokowymi trój i pięcio-wierzchołkowymi o nieznanych strukturach wewnętrznych.
Jeśli wymuszenie jest harmoniczną funkcją czasu działająca na wyodrębniony przekrój liny to zagadnienie analizy drgań sprowadza się wprost do badania algebraicznych równań amplitud przy zastosowaniu modelu układu w postaci grafu blokowego i zupełnego.
Każdemu grafowi blokowemu można przyporządkować obciążony graf zupełny a zależności między współrzędnymi uogólnionymi ${}_{1}s_j$ przyporządkowanymi wierzchołkom i siłami uogólnionymi ${}_{2}s_j$ wyrażamy za pomocą stabelaryzowanych dynamicznych podatności [2].
W takim przypadku wszystkie krawędzie grafu zupełnego są opisane wagami $y_i$ ze zbioru podatności dynamicznych($y_i \in Y$).
Uwzględniając ciągły rozkład mas lin, górniczą maszynę wyciągową /rys. 1/ modelujemy grafem pokazanym na rys. 9. Graf ten opisuje drgania maszyny z uwzględnieniem wzdłużno-skrętnych drgań lin.




Rys. 9 Graf blokowy (a) układu wyciągowego modelujący drgania wzdłużno skrętne lin nośnych i zupełny (b) do wyznaczania wag dendrytowych.

Pełną algorytmizację analizy drgań uzyskujemy stosując algebrę liczb strukturalnych wyższej kategorii i zupełnych [1,5]. Wyznaczając funkcję wyznacznikową grafu blokowego określamy widmo częstości drgań modelu górniczej maszyny wyciągowej

$$\det_{Z}({}^{2}A) = \det_{D_{ij} \in D} \mathcal{A} = 0, \qquad A \overset{s}{=} {}^{2}A,$$

gdzie: $\mathcal{A}$ - liczba strukturalna zupełna,

D - det Z jest wyznacznikiem charakterystycznym rozpatrywanego złożonego układu drgającego,

$\overset{s}{=}$ - oznacza równość strukturalną,

$D_{ij}$ - wyznaczniki odpowiadające równaniom amplitud podukładów prostych dla różnych warunków brzegowych.

## 8. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda badania drgań górniczych maszyn wyciągowych odznacza się pełną algorytmizacją obliczeń.
Jest ona szczególnie wygodna, gdy w procesie modelowania układ dyskretyzujemy do większej liczby stopni.
Istotną zaletą metody grafów i liczb strukturalnych jest to, że prowadzi się działania na funkcjach wyznacznikowych, które są rozwiniętymi wyznacznikami macierzy sztywności lub podatności dynamicznej i uzyskuje się bezpośrednie wyniki bez potrzeby wykonywania pracochłonnych rozwiązań wyznaczników macierzy.
Jeśli wziąć pod uwagę, również to, że działania na liczbach strukturalnych zasadniczo ograniczają się do wykonywania operacji na wskaźnikach będących oznaczeniami elementów grafu a reprezentowanych w maszynie cyfrowej przez liczby naturalne lub binarne, to łatwo zauważyć, że prowadzenie eksperymentu numerycznego tą metodą pozwala znacznie skrócić czas obliczeń.

## LITERATURA

[1] Bellert S., Woźniacki H.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.

[2] Gladwell G.M.L., Bishop R.E.D.: Interior receptances of beams, I.Mech.Engng.Sci., 2 nr 1 /1960/, 1-15.

[3] Praca zbiorowa pod red. J.Wojnarowskiego: Pewne problemy modelowania wielolinowych układów wyciągowych. Zeszyt nauk. Inst.Podst.Konstr. Maszyn z. 25/59 Gliwice 1976.

[4] Syc C.: Generowanie drzew i multidrzew multigrafów opisanych metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych, Rozpr. Elektrot., Vol. 3, /1969/, 495-513.

[5] Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych, Politechnika Śląska - PTMTiS Oddział Gliwice, z. 38, Gliwice 1977.

[6] Wojnarowski J., Świder J.: Wyznaczanie funkcji podatności dynamicznej górniczej maszyny wyciągowej metodą grafów. Konferencja Modelowanie górniczych maszyn wyciągowych (1977), (w tym zbiorze mat.).

[7] Wojnarowski J., Buchacz A.: Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych wyższej kategorii w modelowaniu układów mechanicznych. Sympozjon - Modelowanie w mechanice, zbiór referatów PTMTS Oddział Gliwice (1976), 507-517.

[8] Woźniak Cz.: Dyskretyzacja fizyczna a dyskretyzacja numeryczna w mechanice konstrukcji. III Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice, Referaty Problemowe t. 3, Opole maj (1977), 69-91.

## APPLICATIONS OF GRAPHS AND STRUCTURAL NUMBERS IN INVESTIGATIONS OF THE VIBRATIONS OF HAULING MACHINES

By means of graphs and structural numbers the problem of investigating the vibrations hauling machines has been formulated. Using the concept of a cutset matrix of a graph and a matrix of dynamical stiffnesses, the method of spectrum analysis has been represented.
Applying the method of the coding of graphs by means of structural numbers it has been shown that it is possible to find the algorithms of the dynamical characteristics. The practical applications of the methods described have been demonstrated on examples.

## Применение графов и структурных чисел в исследованиях колебаний подъёмных горных машин

Задача исследований колебаний была сформулирована с помощью графов и структурных чисел.используя понятие матрицы отсечений графа и матрицы динамических жёсткостей был разработан метод спектрочастотного анализа.Применяя кодирование графов с помощью структурных чисел,была указана возможность полной алгоритмизации расчётов динамических систем.
Практическое применение описываемых методов демонстрируется на примерах.