

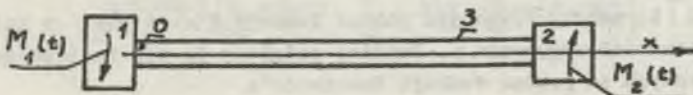
KONFERENCJA: MODELOWANIE GÓRNICZYCH MASZYN WYCIĄGOWYCH
9-10.XII.1977WŁADYSŁAW NADOLSKI
AMALIA PIELORZ
IPPT PAN
WARSZAWABADANIE PRZEMIESZCZEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W WYBRANYCH
ELEMENTACH MASZYN GÓRNICZYCH

W pracy rozpatrzono wybrane układy maszyn górniczych obciążone siłami zewnętrznymi krótkotrwałymi. Wyprowadzono wzory analityczne dla przemieszczeń i odkształceń. Wykresy przemieszczeń i odkształceń podano dla wybranych przekrojów rozważanych elementów.

1. Uwagi wstępne i założenia

W literaturze technicznej istnieje znaczna liczba prac opublikowanych i poświęconych analizie procesów dynamicznych występujących w różnych maszynach, w tym również w maszynach górniczych. Mimo dużego zainteresowania tymi maszynami, nadal nie zostały odpowiednio wyjaśnione i opisane zjawiska występujące, w czasie rozruchu jak i normalnej pracy, w wyniku obciążeń nieokresowych.

W pracy rozpatrywane są układy maszyn górniczych, które można badać za pomocą modelu o parametrach rozłożonych w sposób ciągły, przedstawionego na rys.1. Do takich układów maszyn górniczych zaliczyć można między innymiciąg-przewód górniczy i napęd linowy.



rys.1

Model, przedstawiony na rys.1 składa się z dwóch brył nieodkształcalnych (1), (2), połączonych sztywno elementem sprężystym (3), o przekroju symetrycznym względem osi x . W przypadku odkształceń skrętnych, np. wyciągu-przewodu górniczego, przyjmujemy, że bryła (1) jest obciążona momentem $M_1(t)$, a bryła (2) momentem $M_2(t)$, opisanymi za pomocą funkcji Heaviside'a lub Diraca. Momenty bezwładności brył (1), (2) względem osi symetrii wynoszą odpowiednio J_1, J_2 , $[\text{kgm}^2]$. Łącznik sprężysty scharakteryzowany jest następującymi parametrami: G $[\text{kN/m}^2]$ - moduł sprężystości poprzecznej, ρ $[\text{kg/m}^3]$ - gęstość materiału, J_0 $[\text{m}^2]$ - biegunowy moment bezwładności pola przekroju prostokątnego względem osi x , l $[\text{m}]$ - długość łącznika.

2. Przemieszczenia i odkształcenia wyciągu-przewodu górniczego

Wyznaczanie przemieszczeń i odkształceń przekrojów wyciągu-przewodu górniczego w czasie trwania obciążeń $M_1(t)$ i $M_2(t)$, sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$M_1(t) - J_1 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + G J_0 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x=0, \quad (2)$$

$$-M_2(t) - J_2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - G J_0 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x=l, \quad (3)$$

i z warunkami początkowymi

$$\theta(x,t) = \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{dla } t=0, \quad (4)$$

gdzie $\theta(x,t)$ jest przemieszczeniem kątowym przekrojów łącznika (3).

Do rozwiązania powyższego problemu zastosowano metodę, przedstawioną w pracy [2]. Rozwiązanie równania (1) ma postać

$$\theta(x,t) = f(ct-x) + g(ct+x). \quad (5)$$

Po uwzględnieniu (5) w związkach (2), (3) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu dla funkcji $f(z)$ i $g(z)$

$$\begin{aligned} g'(z) + \frac{M_1}{I} g'(z) &= -\frac{M_1}{G J_0} H_1\left(\frac{z-l}{c}\right) - f'(z-2l) + \frac{M_2}{I} f'(z-2l) \\ f'(z) + \frac{M_2}{I} f'(z) &= \frac{M_2}{G J_0} H_1\left(\frac{z}{c}\right) - g'(z) + \frac{M_1}{I} g'(z), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $M_i = \frac{J_i \rho l}{J_0}$, $i=1,2$.

Z równań (6) możemy wyznaczyć postać funkcji $f(z)$ i $g(z)$ w kolejnych przedziałach zmienności argumentu z . Poniżej podajemy je dla następujących momentów rys.2., opisanymi za pomocą funkcji Heaviside'a

$$M_1(t) = \sum_{k=0}^{n_1} M_{1k} H(t-t_{1k}) \quad (7)$$

$$M_2(t) = \sum_{k=0}^{n_2} M_{2k} H(t-t_{2k}).$$

$$I_1: 0 < \frac{z}{l} < 1,$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} g_1\left(\frac{z}{l}\right) = 0,$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} f_1\left(\frac{z}{l}\right) = \sum_{k=0}^{n_1} \frac{M_{1k}}{M_{0,l}} H\left(\frac{z-ct_{1k}}{l}\right) \left[\frac{1}{x_1} e^{-x_1 \frac{z-ct_{1k}}{l}} + \frac{z-ct_{1k}}{l} - \frac{1}{x_1} \right], \quad (8)$$

$$I_2: 1 < \frac{z}{l} < 2,$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} g_2\left(\frac{z}{l}\right) = - \sum_{k=0}^{n_2} \frac{M_{2k}}{M_{0,l}} H\left(\frac{z-ct_{2k}}{l} - 1\right) \left[\frac{1}{x_2} e^{-x_2 \frac{z-ct_{2k}-l}{l}} + \frac{z-ct_{2k}-l}{l} - \frac{1}{x_2} \right], \quad (9)$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} f_2\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{GJ_0}{M_{0,l}} f_1\left(\frac{z}{l}\right) - \sum_{k=0}^{n_2} \frac{M_{2k}}{M_{0,l}} H\left(\frac{z-ct_{2k}}{l} - 1\right) \left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} \right) e^{-\frac{z-ct_{2k}-l}{l} x_1} + \frac{x_1+x_2}{x_2(x_1-x_2)} e^{-x_2 \frac{z-ct_{2k}-l}{l}} - \frac{z-ct_{2k}-l}{l} + \frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} + \frac{1}{x_1} + \frac{x_1+x_2}{x_2(x_1-x_2)} \right], \quad (10)$$

$$I_3: 2 < \frac{z}{l} < 3,$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} g_3\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{GJ_0}{M_{0,l}} g_2\left(\frac{z}{l}\right) + \sum_{k=0}^{n_1} \frac{M_{1k}}{M_{0,l}} H\left(\frac{z-ct_{1k}}{l} - 2\right) \left[\frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} e^{-x_1 \frac{z-ct_{1k}-2l}{l}} + \left(\frac{1}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_2(x_1-x_2)} \right) \cdot e^{-x_2 \frac{z-ct_{1k}-2l}{l}} + \frac{z-ct_{1k}-2l}{l} + \frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} - \frac{x_1+x_2}{x_2(x_1-x_2)} - \frac{1}{x_2} \right], \quad (11)$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} f_3\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{GJ_0}{M_{0,l}} f_2\left(\frac{z}{l}\right) + x_1 \sum_{k=0}^{n_1} \frac{M_{1k}}{M_{0,l}} H\left(\frac{z-ct_{1k}}{l} - 2\right) \left\{ e^{-x_1 \frac{z-ct_{1k}-2l}{l}} \left[2 \frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} \frac{z-ct_{1k}-2l}{l} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{x_1+x_2}{x_1^2(x_1-x_2)} + \frac{1}{x_1^2} - 2 \frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} \right] + 2 \frac{x_1+x_2}{x_2(x_1-x_2)} e^{-x_2 \frac{z-ct_{1k}-2l}{l}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{x_2} \frac{z-ct_{1k}-2l}{l} + \frac{1}{x_2^2} + 2 \frac{x_1+x_2}{x_1^2(x_1-x_2)} + 2 \frac{x_1+x_2}{x_1(x_1-x_2)} - 2 \frac{x_1+x_2}{x_2(x_1-x_2)} \right\}, \quad (12)$$

$$I_4: 3 < \frac{z}{l} < 4,$$

$$\frac{GJ_0}{M_{0,l}} g_4\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{GJ_0}{M_{0,l}} g_3\left(\frac{z}{l}\right) + x_2 \sum_{k=0}^{n_2} \frac{M_{2k}}{M_{0,l}} H\left(\frac{z-ct_{2k}}{l} - 3\right) \left\{ \frac{D_2}{x_2} e^{-x_2 \frac{z-ct_{2k}-3l}{l}} + \frac{1}{x_2} \frac{z-ct_{2k}-3l}{l} + \right. \\ \left. + e^{-x_2 \frac{z-ct_{2k}-3l}{l}} \left(\frac{D_1}{x_2} \frac{z-ct_{2k}-3l}{l} + \frac{D_1}{x_2^2} + \frac{D_2}{x_2} \right) - \frac{D_1}{x_2^2} - \frac{D_2}{x_2} - \frac{D_2}{x_1} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{N_1} f_4(z) = & \frac{G_1}{N_1} f_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{1k}}{N_1} H\left(\frac{z-cl_{1k}}{l} - 3\right) \left\{ e^{-N_1 \frac{z-cl_{1k}-3l}{l}} \left[C_3 \frac{z-cl_{1k}-3l}{l} + \frac{C_2}{N_2} + \frac{C_1}{N_1} \right] + \right. \\ & \left. + e^{-N_2 \frac{z-cl_{1k}-3l}{l}} \left[\frac{C_1}{N_2} \frac{z-cl_{1k}-3l}{l} + \frac{C_2}{N_2} + \frac{C_1}{N_1} \right] + \frac{1}{N_2} \frac{z-cl_{1k}-3l}{l} - \frac{C_1}{N_2} - \frac{C_2}{N_2} - \frac{C_3}{N_1} - \frac{C_4}{N_1} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

I₅: $4 < \frac{z}{l} < 5$,

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{N_1} g_5(z) = & \frac{G_1}{N_1} g_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{1k}}{N_1} H\left(\frac{z-cl_{1k}}{l} - 4\right) \left\{ e^{-N_1 \frac{z-cl_{1k}-4l}{l}} \left[\frac{D_1}{N_1} \frac{z-cl_{1k}-4l}{l} - \frac{D_1}{N_2} - \frac{D_5}{N_1} \right] + \right. \\ & \left. + e^{-N_2 \frac{z-cl_{1k}-4l}{l}} \left[-\frac{D_1}{N_2} \frac{z-cl_{1k}-4l}{l} - \frac{D_1}{N_2} - \frac{D_2}{N_2} \right] + \frac{1}{N_2} \frac{z-cl_{1k}-4l}{l} + \frac{D_4}{N_2} + \frac{D_5}{N_1} + \frac{D_6}{N_2} + \frac{D_7}{N_2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{N_1} f_5(z) = & \frac{G_1}{N_1} f_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{1k}}{N_1} H\left(\frac{z-cl_{1k}}{l} - 4\right) \left\{ e^{-N_1 \frac{z-cl_{1k}-4l}{l}} \left[-\frac{C_5}{N_1} \left(\frac{z-cl_{1k}-4l}{l}\right)^2 - \frac{z-cl_{1k}-4l}{l} \left(\frac{2C_5}{N_2} + \frac{C_6}{N_1}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2C_5}{N_2} - \frac{C_6}{N_2} - \frac{C_7}{N_1} \right] + e^{-N_2 \frac{z-cl_{1k}-4l}{l}} \left[-\frac{C_5}{N_2} \frac{z-cl_{1k}-4l}{l} - \frac{C_5}{N_2} - \frac{C_9}{N_2} \right] + \frac{1}{N_1} \frac{z-cl_{1k}-4l}{l} + \right. \\ & \left. + \frac{2C_5}{N_1} + \frac{C_6}{N_2} + \frac{C_9}{N_1} + \frac{C_8}{N_2} + \frac{C_0}{N_2} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie

$$C_1 = \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2}, \quad C_2 = 4 \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2} 2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)} + \frac{N_1 + N_2}{N_2(N_1 - N_2)}, \quad C_3 = 4N_1 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 + N_2)^2}, \quad C_4 = -C_3 + \frac{1}{N_1}, \quad C_5 = -2N_1 \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2},$$

$$C_6 = 2 \frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2} + 2 \left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2} \right)^2 - 4N_1 \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2} - 8N_1 N_2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)^2}, \quad C_7 = -C_9 - \frac{1}{N_1}, \quad C_8 = -4N_2 \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2},$$

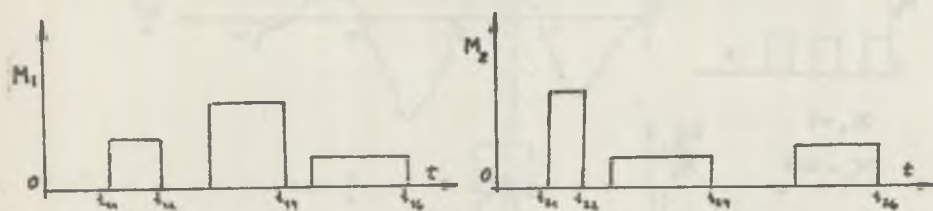
$$C_9 = -\frac{1}{N_1 - N_2} \left[-C_5 - 1 - \frac{N_1}{N_2} + 4N_2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)^2} - \frac{(N_1 + N_2)^2}{N_2(N_1 - N_2)} + 2 \left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2} \right)^2 + 4N_2 \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2} \right],$$

$$D_1 = 2 \frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2}, \quad D_2 = -2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)^2} + \frac{1}{N_2}, \quad D_3 = 2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)^2}, \quad D_4 = -2 \left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2} \right)^2,$$

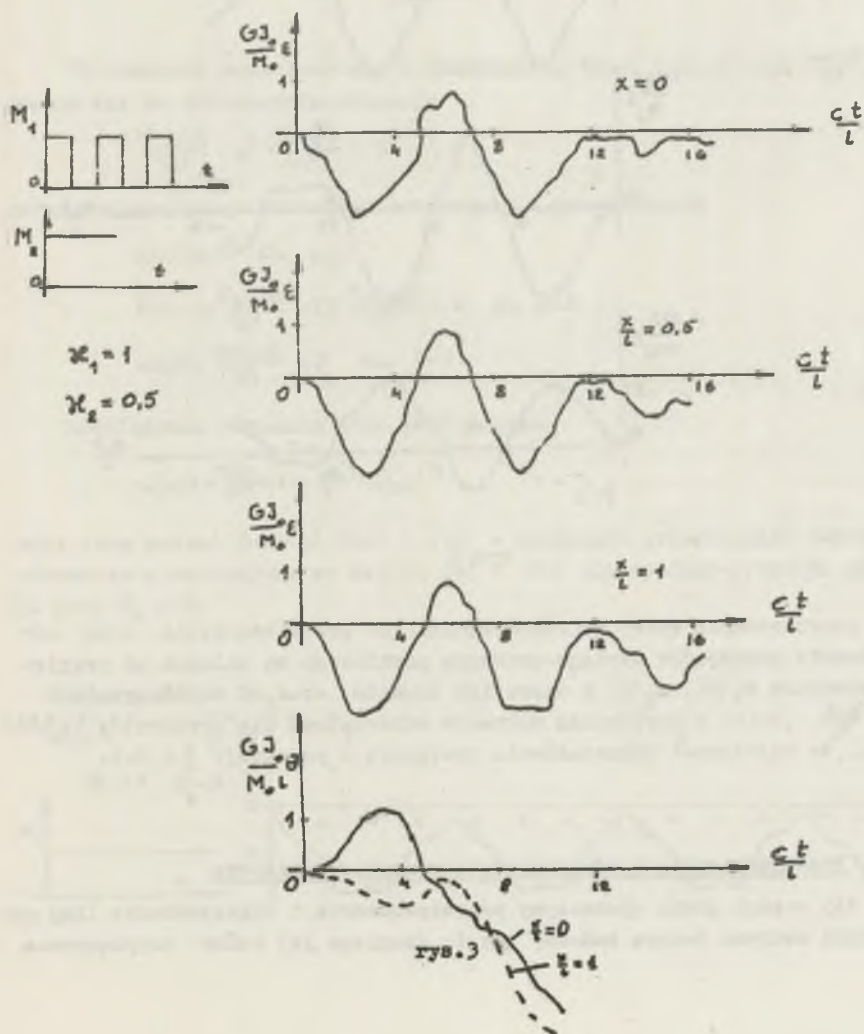
$$D_5 = \frac{N_1 + N_2}{N_1(N_1 - N_2)} - 2 \frac{(N_1 + N_2)^2}{(N_1 - N_2)^2} - 4N_2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)^2}, \quad D_6 = -4N_2 \frac{N_1 + N_2}{(N_1 - N_2)^2}, \quad D_7 = -D_5 - \frac{1}{N_1}.$$

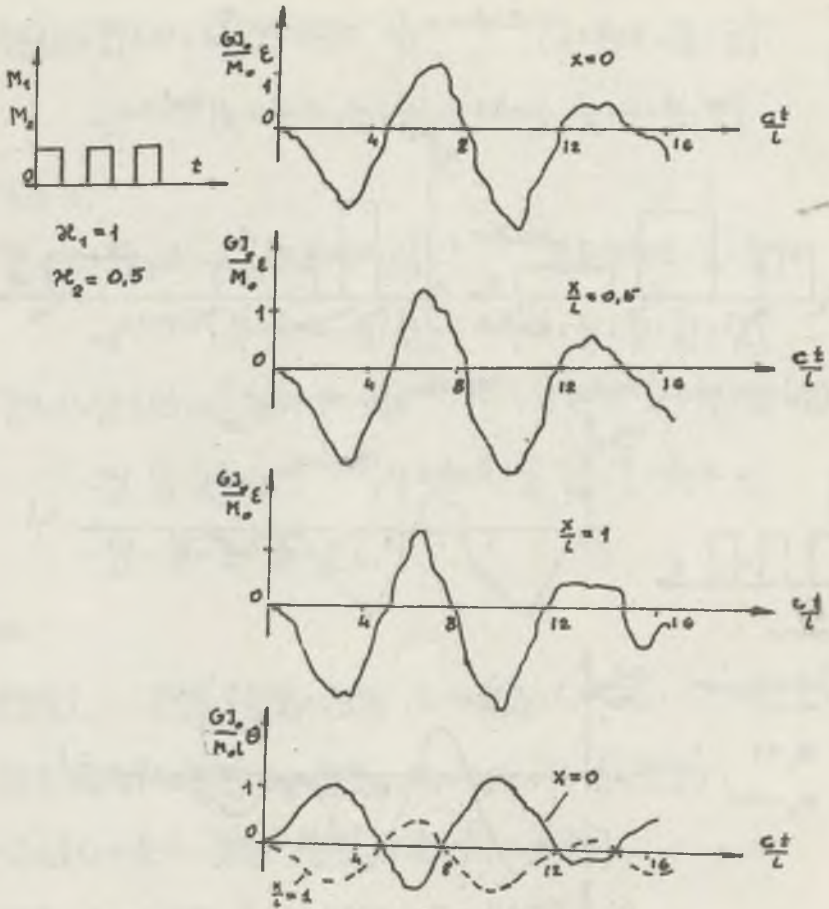
Znajomość funkcji $f(z)$ i $g(z)$ oraz ich pochodnych w kolejnych przedziałach zmienności argumentu z pozwala znaleźć wartości przemieszczeń i odkształceń przekrojów wyciągu-przewodu górniczego.

Wykresy przemieszczeń dla $\frac{z}{l} = 0,1$ oraz wykresy odkształceń dla $\frac{z}{l} = 0,0,5,1$ podano we współrzędnych bezwymiarowych na rysunkach 3 i 4 przy $N_1 = 1, N_2 = 0,5$ dla dwóch przypadków obciążeń zewnętrznych. W obu przypadkach przebieg w czasie momentu $M_1(t)$ ma taką samą postać. Moment $M_2(t)$, dla wyników umieszczonych na rys.3, jest stały dla $t > 0$, a w drugim przypadku $M_2(t) = M_1(t)$.



rys.2





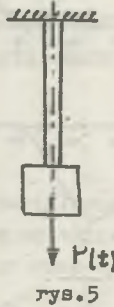
rys. 4

Z przytoczonych wyżej wylresów wynika, że przemieszczenia oraz odkształcenia przekrojów wyciągu-przewodu górniczego są zależne od przyjętych momentów $M_1(t)$, $M_2(t)$ i czasu ich trwania, oraz od współczynników $\xi_1 = \frac{\xi_1 t}{\xi_2}$, i, t, ξ . Z porównania wykresów odkształceń dla przekrojów $\frac{x}{L} = 0,5, 1$ wynika, że największe odkształcenia występują w przekroju $\frac{x}{L} = 0,5$.

3. Przemieszczenia i odkształcenia w napędzie linowym

W tej części pracy wyznaczmy przemieszczenia i odkształcenia liny zamocowanej sztywno jednym końcem, gdy do drugiego jej końca przymocowana

jest bryła sztywna o masie m . Model układu linowego przedstawiony jest na rys.5. Masa m jest obciążona siłą nieokresową, opisaną za pomocą funkcji Heaviside'a, podobnie jak moment $M_1(t)$ na rys.2.



Wyznaczenie przemieszczeń i odkształceń liny, $u(x,t)$ oraz $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

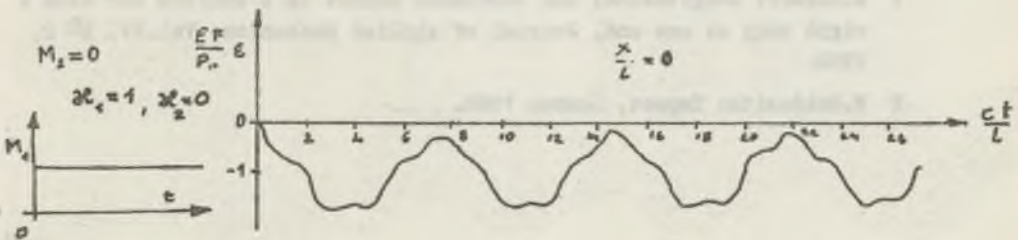
przy następujących warunkach brzegowych i początkowych

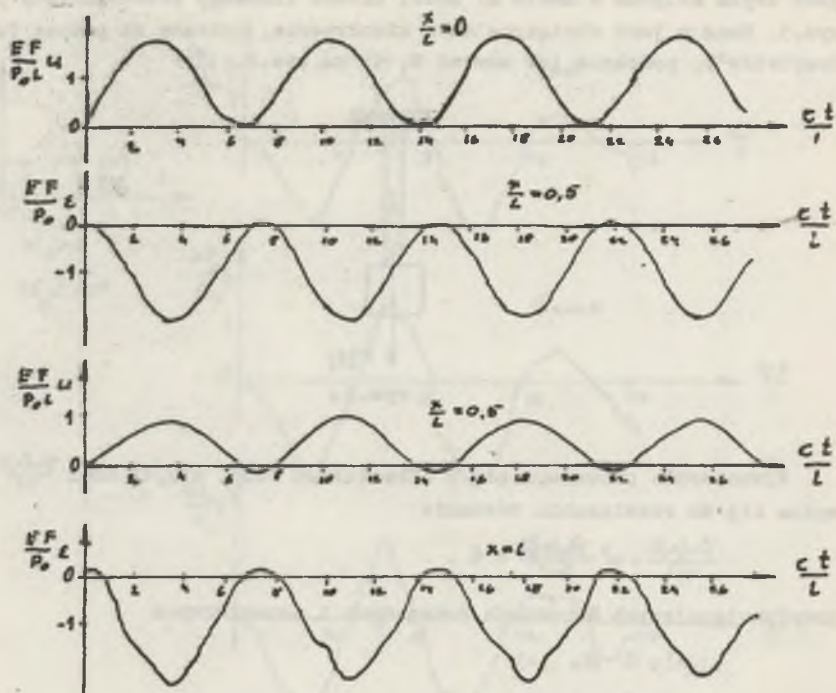
$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 \quad \text{dla } x=l \\ P(t) - m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + EF \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= 0 \quad \text{dla } x=0 \\ u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= 0 \quad \text{dla } t=0. \end{aligned} \quad (18)$$

Rozwiązanie równania (14) jest postaci

$$u(x,t) = f(\alpha t - x) + g(\alpha t + x), \quad (19)$$

przy czym postać funkcji $f(z)$ i $g(z)$ w kolejnych przedziałach zmienności argumentu z uzyskujemy ze wzorów (8) - (16) dla wyciągu-przewodu górniczego przy $\lambda_2 = 0$.





rys.6

Wykresy przemieszczeń dla $\frac{x}{L} = 0,0,5$ oraz wykresy odkształceń dla $\frac{x}{L} = 0,0,5,1$, we współrzędnych bezwymiarowych, podano na rys.6. Z przytoczonych wykresów wynika, że największe przemieszczenia występują w przekroju, w którym zamocowana jest bryła o masie m , natomiast największe odkształcenia występują w miejscu zamocowania liny.

Literatura

- 1 A.H.Burr: Longitudinal and torsional impact in a uniform bar with a rigid body at one end, Journal of Applied Mechanics, Vol.17, № 2, 1950.
- 2 W.Goldsmith: Impact, London 1960.

DISPLACEMENTS AND DEFORMATIONS IN ELEMENTS
OF MINING-MACHINES

This report takes into consideration systems of mining-machines with application of short-time lasting exterior forces. Analytical formulas for displacements and deformations for some cross-sections of considered elements of machines are made.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ВЫБРАННЫХ
ЭЛЕМЕНТАХ ПОДЪЕМНЫХ МАШИН

В работе рассмотрены выбранные системы подъемных машин, нагруженных короткодействующими внешними силами. Выведены аналитические формулы для перемещений и деформаций. Для избранных поперечных сечений рассматриваемых элементов приводятся графики перемещений и деформаций.