

WOJCIECH CHMIEŁOWSKI
PIOTR MIZGAŁEWICZ
INSTYTUT INŻYNIERII
I GOSPODARKI WODNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

KRÓTKOTERMINOWE STEROWANIE OPTYMALNE ZBIORNIKIEM ALIMENTACYJNYM

Streszczenie. W referacie omówiono problemy sterowania optymalnego zbiornikiem alimentacyjnym dla dekadowego horyzontu optymalizacji. Optymalizację przeprowadzono dla dwóch wskaźników jakości zapewniających realizację różnych celów sterowania. Zadanie rozwiązano w oparciu o zasadę maksimum Pontriagina.

1. Wprowadzenie

Występujący deficyt wody stwarza konieczność racjonalnego wykorzystania istniejących zapasów wodnych oraz sieci zbiorników zaopatrujących w wodę makroregiony gospodarstwo kraju.

Zbiornik retencyjny jako podstawowy obiekt systemu wodno - gospodarczego spełnia w tej dziedzinie pierwszorzędne zadanie i dlatego też wymagane jest jak najlepsze wykorzystanie jego pojemności użytkowej.

Czynności układu sterowania zbiornikiem można podzielić ze względu na rodzaj podejmowanych decyzji i horyzont czasu jakiego te decyzje dotyczą na trzy zasadnicze warstwy /6/

- A - warstwa planowania długoterminowej retencji zbiornika,
- B - warstwa planowania krótkoterminowej retencji zbiornika,
- C - warstwa sterowania operacyjnego /bieżącego/.

Planowanie długoterminowej retencji zbiornika /1/ z uwagi na brak odpowiednio dokładnych długoterminowych modeli prognostycznych, stwarza konieczność przechodzenia na krótkie horyzonty czasowe dla których rozwiązywane zadania optymalizacyjne korzystając z parametrów uzyskanych w warstwie A, stosują własne wystarczająco dokładne modele prognoz.

Obliczone sterowanie odpływem ze zbiornika jest sterowaniem optymalnym w sensie minimalizacji wyznaczonych wskaźników jakości.

Przyjęto, że przepływ wody w zbiorniku jest grawitacyjny, nie uwzględniono zmian objętości wody wynikających z parowania filtracji i infiltracji oraz pominięto konwekcyjne ruchy mas wodnych. Jednocześnie znane są podstawowe parametry fizyczne zbiornika.

Wykaz podstawowych oznaczeń

T	- horyzont optymalizacji	s
Q/t/	- prognozowany dopływ do zbiornika	m ³ /s
AZ/t/	- zapotrzebowanie na wodę	m ³ /s
x/t/	- stan zbiornika	m ³
x/0/	- początkowy stan zbiornika	m ³
y/t/	- sterowany odpływ ze zbiornika	m ³ /s
TMP/0/	- początkowy stan zbiornika uzyskany z wyższej warstwy optymalizacji /A/	m ³
TMP/T/	- końcowy stan zbiornika uzyskany z wyższej warstwy optymalizacji /A/	m ³
TMP/t/	- stan zbiornika w chwili t ∈ /0, T/ uzyskany z wyższej warstwy optymalizacji /A/	m ³
g ₁ /t/	- dolne ograniczenie sterowania	m ³ /s
g ₂ /t/	- górne ograniczenie sterowania	m ³ /s
a ₁ , a ₂ , a ₃	- współczynniki wagi	
H	- funkcja Hamiltona	
η /t/	- zmienna sprzężona	
F	- wskaźnik jakości.	

2. Rozwiązanie zadania optymalizacji

2.1. Przyjmujemy wskaźnik jakości w postaci

$$F = 0.5 \left\{ a_1 \left[\text{TMP}/T/ - x/t/ \right]^2 + \int_0^T a_2 \left[\text{AZ}/t/ - y/t/ \right]^2 dt \right\}, \quad /1/$$

który realizuje takie cele sterowania, jak zapewnienie wypełnienia /spracowania/ zbiornika do żądanej wartości obliczonej na wyższym poziomie /warstwa A/ dla końca horyzontu optymalizacji oraz maksymalne pokrycie zapotrzebowania na wodę. Rozwiązując zadanie optymalizacji staramy się uzyskać sterowanie, które zapewni minimum przyjętego wskaźnika jakości dla równania stanu zbiornika w postaci :

$$\dot{x}/t/ = Q/t/ - y/t/ \quad /2/$$

przy początkowym wypełnieniu zbiornika

$$x/0/ = x_0 \quad x_0 \in R \quad /3/$$

przy ograniczeniach sterowania

$$g_2/t/ \geq y/t/ \geq g_1/t/ \quad /4/$$

Tworzymy funkcję Hamiltona

$$H = -\Psi_0 + \eta\Psi$$

$$H = -\{0.5 \cdot a_2 [AZ/t/ - y/t/]^2\} + \eta/t/ \cdot [Q/t/ - y/t/] \quad /5/$$

oraz układ kanoniczny

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad a_2 \cdot [AZ/t/ - y/t/] - \eta/t/ = 0 \quad /6/$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \dot{x} \quad \dot{x}/t/ = Q/t/ - y/t/ \quad /7/$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\eta} \quad \dot{\eta}/t/ = 0 \quad /8/$$

$$\eta/T/ = -\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{t=T} \quad \eta/T/ = a_1 \cdot [TMP/T/ - x/T/] \quad /9/$$

Rozwiązując układ równań /6/ - /9/ otrzymujemy sterowanie optymalne w postaci

$$\hat{y}/t/ = \begin{cases} g_1/t/ & s/t/ < g_1/t/ \\ s/t/ & g_2/t/ \geq s/t/ \geq g_1/t/ \\ g_2/t/ & s/t/ > g_2/t/ \end{cases} \quad /10/$$

gdzie :

$$s/t/ = AZ/t/ - \frac{a_1 [TMP/T/ - x_0/ - \int_0^T [Q/\xi/ - AZ/\xi/] d\xi]}{a_2 + a_1 T}$$

oraz optymalną trajektorię stanu zbiornika

$$\hat{x}/t/ = x_0 + \int_0^t [Q/\xi/ - \hat{y}/\xi/] d\xi \quad /11/$$

Jak wynika ze wzoru /10/ aby zrealizować sterowanie optymalne w przedziale $t \in /0, T/$ musimy oprócz warunku dotyczącego końcowego wypełnienia zbiornika znać prognozę dopływów i funkcję zapotrzebowania w całym rozpatrywanym horyzoncie czasu.

Przykład : celem ilustracji niniejszego zagadnienia przedstawiony jest przykład obliczeniowy ukazujący realizację sterowania optymal-

nego przy obowiązującej prognozie dopływów dobowych w okresie jednej dekady, znanej funkcji zapotrzebowania na wodę jak również przyjętego początkowego i żadanego końcowego wypełnienia zbiornika. Przykład rozwiązano dla różnych wariantów wartości współczynników wag, które w decydujący sposób wpływają ostatecznie na przebieg sterowania a w konsekwencji na stan zbiornika w przyjętym horyzoncie optymalizacji. Dla początkowego wypełnienia zbiornika $x_0 = 50 \times 10^6 \text{ m}^3$ i żadanego wypełnienia na koniec dekady $x_k = 51 \times 10^6 \text{ m}^3$ przy zdeterminowanej prognozie i określonej funkcji zapotrzebowania przyjęcie odpowiednich wag powoduje odchylenie od stanu końcowego oraz deficyt wody określony procentowo i podany w tabeli

a_1, a_2	deficyt zapotrzebowania	deficyt wypełnienia
1, 1×10^5	62,16 %	1,6 %
1, 1×10^6	8,84 %	2,06 %
1, 1×10^7	0,986 %	2,13 %

Przebiegi trajektorii sterowania i stanu zbiornika przedstawiono na rys. 1

2.2. W obecnym zadaniu przyjmiemy wskaźnik jakości w postaci

$$F = 0.5 \left\{ a_1 \left[\frac{TMP}{T} - \frac{x}{T} \right]^2 + \int_0^T a_2 \left[\frac{\dot{x}}{t} - \frac{TMP}{t} \right]^2 + a_3 \left[\frac{\Delta Z}{t} - \frac{y}{t} \right]^2 dt \right\} \quad /12/$$

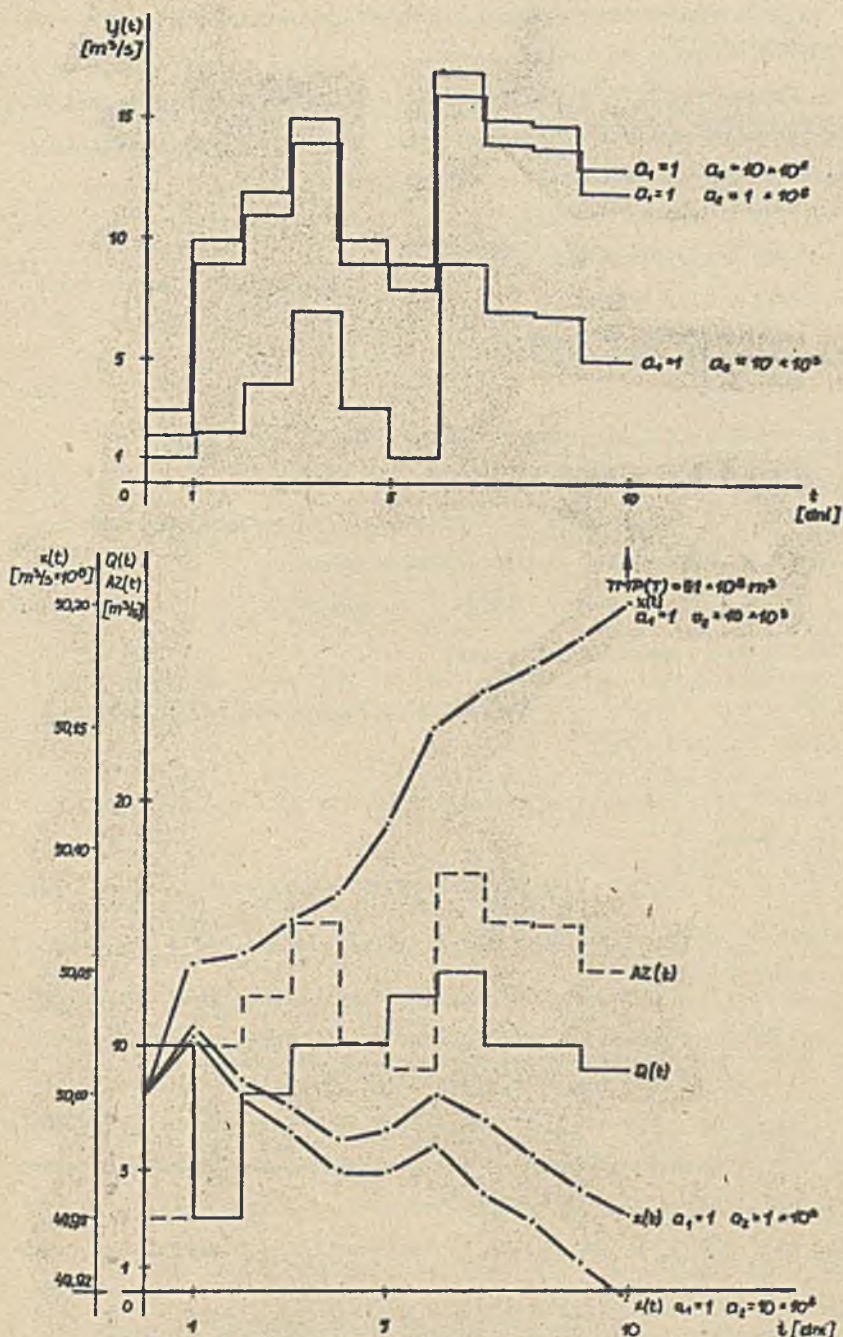
który zapewnia sterowanie minimalizujące straty powstałe na skutek a/ odejścia trajektorii stanu na koniec horyzontu optymalizacji od żadanego wypełnienia TMP/T ,

b/ odejścia trajektorii stanu w trakcie przebiegu $t \in /0, T/$ od wyznaczonej wcześniej w warstwie Δ trajektorii stanu TPM/t ,

c/ niespełnienia zapotrzebowania na wodę $\Delta Z/t$.

Poszczególnym, w w. składnikom wskaźnika jakości przyporządkowane są współczynniki wag kształtujące odpowiednie proporcje między nimi.

Równanie stanu zbiornika pozostaje bez zmian i wyraża się równaniem różniczkowym w postaci /2/ z warunkiem początkowym /3/.



Rys. 1 Optymalne trajektorie sterowania i stanu zbiornika

Przyjęto również ograniczenia sterowania w postaci /4/.

Tworzymy funkcję Hamiltona

$$H = \left\{ 0.5 \left[a_2 \left[\dot{x}/t - \text{TMP}/t \right]^2 + a_3 \left[\dot{y}/t - y/t \right]^2 \right\} + \eta/t \cdot \left[Q/t - y/t \right] / 13/$$

Po zróżniczkowaniu hamiltonianu względem zmiennych obowiązujący układ równań przedstawia się następująco:

$$\dot{y}/t = \dot{y}/t - \dot{y}/t / a_3 \quad /14/$$

$$\dot{\eta}/t = a_2 \left[\dot{x}/t - \text{TMP}/t \right] \quad /15/$$

$$\dot{z}/t = Q/t - \dot{y}/t \quad /16/$$

$$\eta/T = a_1 \left[\text{TMP}/T - x/T \right] \quad /17/$$

$$x/0 = x_0 \quad /18/$$

Różniczkując /15/ względem "t" uzyskujemy

$$\ddot{\eta} = a_2 \left[\ddot{x}/t - \dot{\text{TMP}}/t \right] \quad /19/$$

Podstawiając /14/ do /16/ oraz wynik do /19/ otrzymujemy równanie

liniowe drugiego rzędu niejednorodne w postaci

$$\ddot{\eta} = a_2 \left[\ddot{Q}/t - \dot{A}Z/t - \dot{\text{TMP}}/t \right] + a_2 \dot{\eta}/t / a_3 \quad /20/$$

Całka ogólna równania /20/ wynosi

$$\dot{\eta}/t = C_1 e^{a_4 t} + C_2 e^{-a_4 t} + \int_0^T a_2 \left[\ddot{Q}/\xi - \dot{A}Z/\xi - \dot{\text{TMP}}/\xi \right] \text{sh} \left[a_4 / t - \xi \right] d\xi / a_4$$

gdzie : $a_4 = \sqrt{a_2/a_3}$ /21/

W dalszej kolejności różniczkując wyrażenie /21/ względem "t"

otrzymujemy

$$\dot{\eta}/t = -a_4 C_1 e^{a_4 t} - a_4 C_2 e^{-a_4 t} + \int_0^T a_2 \left[\ddot{Q}/\xi - \dot{A}Z/\xi - \dot{\text{TMP}}/\xi \right] \text{ch} \left[a_4 / t - \xi \right] d\xi \quad /22/$$

Porównując /15/ z /22/ dla $t = 0$ oraz /17/ z /21/ dla $t = T$

wyliczamy stałe C_1 i C_2

$$C_1 = \frac{a_1 \left[\text{TMP}/T - x/T \right] + a_6 \left[\dot{x}/0 - \text{TMP}/0 \right] e^{-a_4 T} - \int_0^T \text{FP}/t, \xi / d\xi / a_4}{e^{a_4 T} + e^{-a_4 T}} \quad /23/$$

$$C_2 = \frac{a_1 \left[\text{TMP}/T - x/T \right] - a_6 \left[\dot{x}/0 - \text{TMP}/0 \right] e^{a_4 T} - \int_0^T \text{FP}/t, \xi / d\xi / a_4}{e^{a_4 T} - e^{-a_4 T}}$$

gdzie : $a_6 = \sqrt{a_2 a a_3}$

$$\text{FP}/t, \xi = a_2 \left[\ddot{Q}/\xi - \dot{A}Z/\xi - \dot{\text{TMP}}/\xi \right] \text{sh} \left[a_4 / t - \xi \right]$$

Podstawiając /23/ do /21/ a następnie wynik do /14/ otrzymujemy

sterowanie optymalne w funkcji końcowego stanu trajektorii $x/T/$

$$\hat{y}/t/ = AZ/t/ - \hat{q}[t, x/T/] / a_3 \quad /24/$$

Stan końcowy trajektorii $x/T/$ wyliczamy z zależności /16/ po scałkowaniu względem czasu "t"

$$\hat{x}/t/ = x_0 + \int_0^t [\bar{Q}/\xi/ - \hat{y}/\xi/] d\xi \quad /25/$$

Po podstawieniu /24/ do /25/ oraz stosownych przekształceniach otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} x/T/ = & \left[x_0 + a_1 \text{TMP}/T/ \cdot \text{tgh}/a_4 T/ / a_6 + \frac{[\bar{x}_0 - \text{TMP}/0/] [2 - e^{a_4 T} - e^{-a_4 T}]}{e^{a_4 T} + e^{-a_4 T}} + \right. \\ & - \text{tgh}/a_4 T/ \cdot \int_0^T [\bar{Q}/\xi/ - AZ/\xi/ - \text{TMP}/\xi/] \text{sh}[a_4 (T - \xi)/] d\xi + \\ & \left. + \int_0^T [\bar{Q}/\alpha/ - AZ/\alpha/ + a_4 \int_0^\alpha [\bar{Q}/\gamma/ - AZ/\gamma/ - \text{TMP}/\gamma/] \text{sh}[a_4 (\alpha - \gamma)/] d\gamma] d\alpha \right] / \\ & [1 + a_1 \text{tgh}/a_4 T/ / a_6] \quad /26/ \end{aligned}$$

Kończąc wracamy przez /23/ do /21/ a następnie /24/ otrzymujemy sterowanie optymalne w postaci

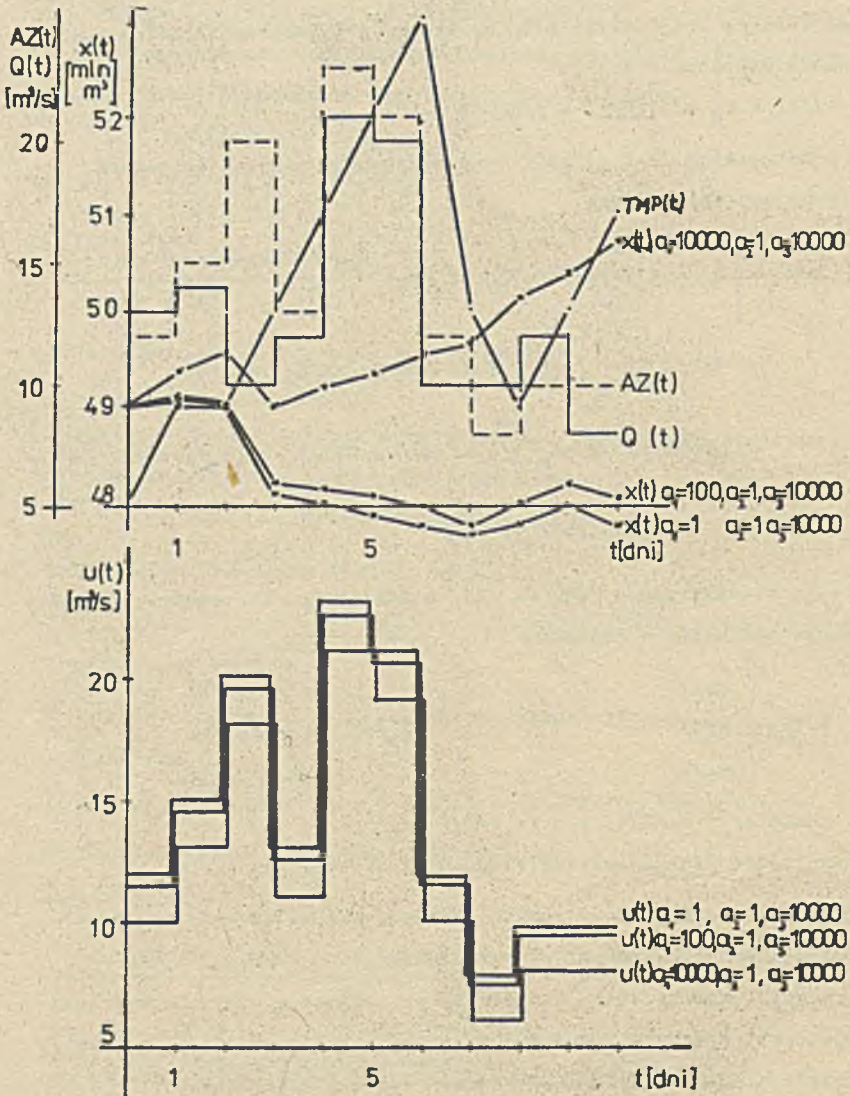
$$\hat{y}/t/ = \begin{cases} g_1/t/ & s/t/ < g_1/t/ \\ s/t/ & g_2/t/ \leq s/t/ \leq g_1/t/ \\ g_2/t/ & s/t/ > g_2/t/ \end{cases} \quad /27/$$

gdzie $s/t/ = AZ/t/ - \hat{q}[t, x/T/] / a_3$

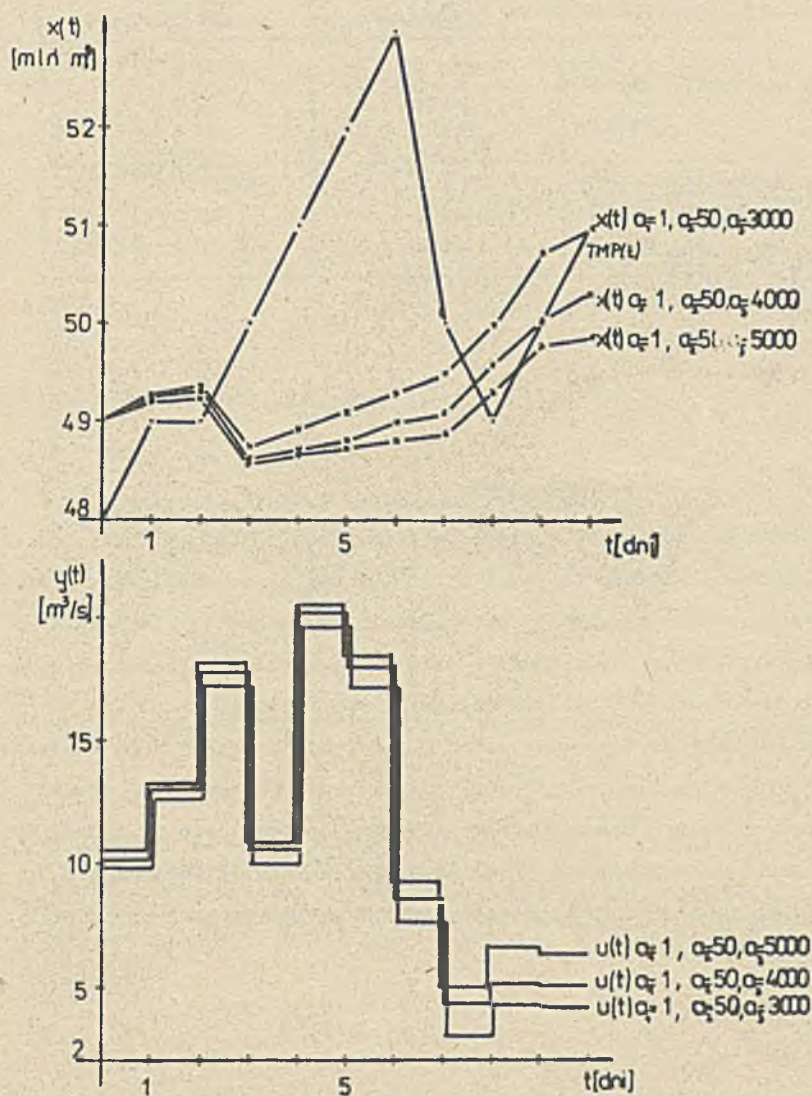
zapewniające minimum wskaźnika jakości określonego w /12/.

Przykład : przedstawione poniżej rozwiązanie ma na celu ilustrację działania dodatkowego członu wprowadzonego do wskaźnika jakości, który jest odpowiedzialny za straty wynikające z odejścia bieżącej trajektorii stanu od pożądaney wyznaczonej we wspomnianej wcześniej warstwie planowania długoterminowej retencji zbiornika.

Obecnie jak w poprzednim zadaniu wzajemne relacje między poszczególnymi składnikami wskaźnika jakości ustalane są przez współczynniki wag. Przyjęto 6 różnych zestawów współczynników. Przebieg trajektorii sterowania i stanu zbiornika dla każdego zestawu przedstawione są na rys. 2.3 a procentowe odchylenia od żądanych wartości zestawione są



Rys. 2 Trajektorie sterowania i stanów zbiornika



Rys. 3 Trajektorie sterowań i stanów zbiornika

w tabeli.

a_1, a_2, a_3	deficyt zapotrzebowania	odchylenie od stanu końcowego
$10^4, 1, 10^4$	23,3 %	0,61 %
$10^2, 1, 10^4$	2,3 %	5,74 %
$1, 1, 10^4$	0,0 %	6,3 %
$1, 50, 5 \times 10^3$	16,8 %	2,19 %
$1, 50, 4 \times 10^3$	20,6 %	1,26 %
$1, 50, 3 \times 10^3$	28,8 %	0,01 %

3. Zakończenie

Problemy opisane w niniejszym referacie wynikają z konieczności dysponowania modelem sterowania zbiornikiem alimentacyjnym w krótkim horyzoncie czasowym. Model taki umożliwia powiązanie sterowania długoterminowego i bieżącego w celu kompleksowego ustalenia gospodarki wodnej na pojedynczym zbiorniku retencyjnym.

Przykłady liczbowe przedstawione w referacie rozwiązane są dla zdefiniowanej prognozy dopływów. Wprowadzenie prognozy w postaci procesu stochastycznego stanowi następną odrębną etap prac związanych z wyznaczeniem obszaru sterowania bieżącego dla optymistycznej, średniej /najbardziej prawdopodobnej/ i pesymistycznej prognozy dopływów.

Literatura

- [1] W.Chmielowski - " The Storage Reservoirs Optimal Control with Considering the Restrictions on the States Trajectory " Konferencja AMSE, Paryż 1982.
W.Indyk
- [2] W.Chmielowski - " Opracowanie zasad i algorytmów sterowania zbiornikiem wodnym Dobczyce dla celów alimentacyjnych ".
W.Indyk
Cz. 2 1982 IIIGW PK

- [3], W.Findeisen - "Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji" PWN, Warszawa 1974.
- [4], K.Malinowski
K.Nowosad - "Wybrane zagadnienia sterowania dyspozytorskiego w systemach wodnych". Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Z. 59 1981 rok.
- [5], A.Niemiec - "Zagadnienia sterowania optymalnego w systemie współpracujących zbiorników retencyjnych". Archiwum Hydrotechniki Z. 1 1980 r.
- [6], K.A.Salewicz
T.Terlikowski - "Układ sterowania rozdzielaniem wody na bieżąco w systemie wielozbiornikowym". Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Z.59 1981 r.
- [7], B.Słota - "Długoterminowe i krótkoterminowe modele sterowania systemami wodno - gospodarczymi". Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Z. 59 1981 r.

SHORT-RANGE OPTIMAL CONTROL OF STORAGE RESERVOIR

S u m m a r y

Optimal control of storage reservoir is analysed for a decade horizon of optimization. A method is presented for two different forms of cost functional, relevant to the different control objectives. The Pontriagin maximum principle is used for determination of the optimum control.

Проблема краткосрочного управления водозадерживающего водохранилища

Резюме

Представляется метод определения оптимального управления для десятилетнего горизонта оптимизации. Оптимизацию проведено для двух показателей качества обеспечивающих выполнение разных целей управления. Для нахождения оптимального управления употребляется принцип максимума Понтрягина.