

KONRAD WOJCIECHOWSKI

ZYGMUNT CIEŚLAK

Instytut Automatyki  
Politechnika ŚląskaWYZNACZANIE ALGORYTMU STEROWANIA W UKŁADZIE OTWARTYM ZE SPRZĘŻENIEM  
W PRZYPADKU SYSTEMU WODNO-GOSPODARCZEGO

Streszczenie. W poniższym artykule przedstawiono sposób wyznaczania strategii optymalnej, wykorzystujący jawną postać rozwiązania dyskretnego równania liniowego, co przy kwadratowym wskaźniku jakości prowadzi do zadania programowania kwadratowego rozwiązywanego algorytmem Wolfe'a. Przedstawiona metoda pozwala na rozwiązanie systemów zawierających wiele zbiorników, zaś jedynym ograniczeniem jest wymiar równoważnego zadania programowania liniowego.

1. Wprowadzenie.

Rozwiązywany problem podstawowy dotyczy rozdziału zasobów w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej i, elastycznym powiązaniu zmiennych decyzyjnych poziomu dolnego i górnego. W poniższych rozważaniach badano wpływ wprowadzenia dynamiki odbiorców na zmianę reguł decyzyjnych, jak również przyjęto odmienny sposób wykorzystania dostępnej informacji, mianowicie w strukturze otwartej ze sprzężeniem.

Wykorzystując analityczną postać rozwiązania dla dolnego poziomu rozpatrywane zagadnienie można sprowadzić do postaci

$$\min_{\left\{ \begin{matrix} q_n \\ v_n \end{matrix} \right\}} E \sum_{n=1}^N (\hat{z}_n - q_n)^T (\hat{z}_n - q_n) \quad /1/$$

Przy ograniczeniach

$$h_{n+1} = h_n + \begin{bmatrix} G & G_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ v_n \end{bmatrix} + G(w_n - \bar{w}_n) + Fd_n \quad /2/$$

$$\hat{z}_{n+1} = \bar{w}_{n+1} + A(\hat{z}_n - q_n) \quad /3/$$

$$q_{\min} \leq q_n \leq q_{\max} \quad /4/$$

$$v_{\min} \leq v_n \leq v_{\max} \quad /5/$$

$$h_{\min} \leq h_n \leq h_{\max} \quad /6/$$

dla  $n=1, \dots, N$

gdzie:

$N$  - horyzont optymalizacji,

$z_n$  - ocena zapotrzebowania na wodę w chwili  $n$ -tej,

$h_n$  - wektor określający ilości (poziomy) wody w zbiornikach systemu,

$v_n$  - wektor odpływów ze zbiorników i przepływów międzyzbiornikowych,

$w_n^T = [w_n^1, \dots, w_n^M]$  - wektor zapotrzebowań nominalnych dla poszczególnych odbiorców,

$\bar{w}_n^T = [\bar{w}_n^1, \dots, \bar{w}_n^M]$  - wektor średnich zapotrzebowań nominalnych dla odbiorców,

$G$  - macierz struktury połączeń dla zmiennych  $q_n$ ,

$G_0$  - macierz struktury dla przepływów  $v_n$ ,

$F$  - macierz struktury dla dopływów  $d_n$ ,

$\hat{z}_n^T = [\hat{z}_n^1, \dots, \hat{z}_n^M]$  - wektor ocen zapotrzebowań na wodę dla poszczególnych odbiorców,

$A = \text{diag} [\alpha_1, \dots, \alpha_M]$  - macierz "dynamiki" odbiorców.

Praca została oparta na opracowaniu wykonanym w Zespole Teorii Sterowania w ramach Problemu Rządowego PR-7 pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Ryszarda Gessinga.

## 2. Sformułowanie rozwiązywanego problemu.

Do rozważań przyjęto przesuwany horyzont optymalizacji wraz z chwilą bieżącą. Dla  $n=k$  wynosi on  $[k, k+\Delta]$ , gdzie  $\Delta$  jest stałe. Założenie takie prowadzi do straty optymalności. W pracy [1] pokazano jednak, że dla problemu liniowo-kwadratowego stratę tę można uczynić dowolnie małą przez dobór odpowiednio dużej wartości  $\Delta$ . Stanowi to przesłankę do przyjęcia omawianego założenia. W przyjętym horyzoncie zadanie optymalizacji można rozwiązać w strukturze zamkniętej lub otwartej ze sprzężeniem. Polega ona na tym, że rozwiązując, np. w kroku  $k$ -tym zadanie optymalizacji w horyzoncie  $[k, k+\Delta]$  zakładamy stale tę samą informację  $m_k$ , podczas gdy w układzie zamkniętym zależałoby uwzględnić  $m_n, n \in [k, k+\Delta]$ , tj. informacja zmieniałaby się w poszczególnych chwilach rozpatrywanego horyzontu.

Uwzględniając przyjęte założenia można problem optymalizacji rozpatrywany w chwili  $k$ -tej przedstawić w poniższej postaci

$$\min_{[q_k, v_k]} E \sum_{n=k}^{k+\Delta} (\hat{z}_n - q_n)^T (\hat{z}_n - q_n)$$

Przy ograniczeniach

$$h_{n+1} = h_n + [G, G_0] \begin{bmatrix} q_n \\ v_n \end{bmatrix} + G(w_n - \bar{w}_n) + Fd_n \quad /8/$$

$$\hat{z}_{n+1} = \bar{w}_{n+1} + A (\hat{z}_n - q_n) \quad /9/$$

$$\begin{bmatrix} h_k \\ z_k \end{bmatrix} \text{ -- dane}$$

$$q_{\min} \leq q_n \leq q_{\max} \quad /10/$$

$$v_{\min} \leq v_n \leq v_{\max} \quad /11/$$

$$h_{\min} \leq h_n \leq h_{\max} \quad /12/$$

$n=k, \dots, k+\Delta$  -dotyczy wszystkich ograniczeń.

Kolejne przekształcenie rozpatrywanego problemu polega na wyeliminowaniu ograniczenia /9/ przez uwzględnienie go we wskaźniku /7/. Mamy

$$\begin{aligned} z_k - q_k &= z_k - q_k \\ z_{k+1} - q_{k+1} &= A z_k - A q_k - q_{k+1} + \bar{w}_{k+1} \\ &\vdots \\ z_{k+\Delta} - q_{k+\Delta} &= A z_k - A q_k - \dots - q_{k+\Delta} + \bar{w}_{k+\Delta} \end{aligned}$$

To samo w zapisie macierzowym ma postać

$$\begin{bmatrix} z_k - q_k \\ z_{k+1} - q_{k+1} \\ \vdots \\ z_{k+\Delta} - q_{k+\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ A & I & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_{k+\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & & & \\ A & I & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k \\ q_{k+1} \\ \vdots \\ q_{k+\Delta} \end{bmatrix} \quad /13/$$

Przyjmując ograniczenia

$$\begin{aligned} \hat{z}_{sk}^T &= [z_k^T, \bar{w}_{k+1}^T, \dots, \bar{w}_{k+\Delta}^T] \\ q_{sk}^T &= [q_k^T, q_{k+1}^T, \dots, q_{k+\Delta}^T] \\ v_{sk}^T &= [v_k^T, v_{k+1}^T, \dots, v_{k+\Delta}^T] \end{aligned} \quad /14/$$

$$B = \begin{bmatrix} I & & & \\ A & I & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A & & & I \end{bmatrix}$$

Można przedstawić wyrażenie /7/ w postaci

$$\min \{ z_{sk} - q_{sk} / B^T B / z_{sk} - q_{sk} / \quad /15/ \}$$

$$\begin{bmatrix} q_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix}$$

Można również odpowiednio przekształcić układ ograniczeń wstawiając /8/ do /12/ dla  $n=k, \dots, k+\Delta$ , zaś w ograniczeniach /10/ i /11/ wprowadzić oznaczenia  $q_{sk}, v_{sk}$ .

Wynika stąd następująca postać ograniczeń

$$q_s \min \leq q_{sk} \leq q_s \max \quad /16/$$

$$v_s \min \leq v_{sk} \leq v_s \max \quad /17/$$

$$\begin{aligned} h_s \min - h_{sk} - G^* / w_{sk} - \bar{w}_{sk} / - F^* d_{sk} \leq - [G, G_0] \begin{bmatrix} q_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix} \leq \\ h_s \max - h_{sk} - G^* / w_{sk} - \bar{w}_{sk} / - F^* d_{sk} \end{aligned} \quad /18/$$

gdzie:  $q_s \min, v_s \min, h_s \min$  są wektorami wartości minimalnych odpowiednich zmiennych w horyzoncie  $k, k+\Delta$ . Podobna uwaga dotyczy wartości maksymalnych

$$h_{sk}^T = [h_k^T \dots h_k^T]$$

$$G^* = \begin{bmatrix} G & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ G & \dots & \dots & \dots & G \end{bmatrix}$$

$$G_0^* = \begin{bmatrix} G_0 & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ G_0 & \dots & \dots & \dots & G_0 \end{bmatrix}$$

$$F^* = \begin{bmatrix} F & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ F & \dots & \dots & \dots & F \end{bmatrix}$$

W dalszych rozważaniach będzie również używana bardziej zwarta postać zapisu ograniczenia /18/ mianowicie

$$l_d - h_{sk} \leq - [G, G_0] \begin{bmatrix} q_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix} \leq l_g - h_{sk} \quad /19/$$

gdzie:

$$l_d = h_s \min - G^* / w_{sk} - \bar{w}_{sk} / - F^* d_{sk}$$

$$l_g = h_s \max - G^* / w_{sk} - \bar{w}_{sk} / - F^* d_{sk}$$

W rozpatrywanym sformułowaniu ograniczenie /18/ jest losowe ponieważ zmienne  $w_{sk}, d_{sk}$  są zmiennymi losowymi.

Przyjęto, że ograniczenie /18/ zastępuje się ograniczeniem deterministycznym przyjmując w miejsce  $w_{sk}, d_{sk}$  ich oceny  $\hat{w}_{sk}, \hat{d}_{sk}$

$$l_{d \min} = h_{s \min} - G / \hat{w}_{sk} - \bar{w}_{sk} / - F \hat{d}_{sk}$$

$$l_{g \max} = h_{s \max} - G / \hat{w}_{sk} - \bar{w}_{sk} / - F \hat{d}_{sk}$$

Otrzymało ograniczenie deterministyczne na postać

$$l_{\text{dmin}} - h_{\text{sk}} \leq -[G, G_o] \begin{bmatrix} q_{\text{sk}} \\ v_{\text{sk}} \end{bmatrix} \leq l_{\text{gmax}} - h_{\text{sk}} \quad /20/$$

Ostatecznie, zadanie optymalizacji przeformułowane do potrzeb proponowanej metody rozwiązania ma postać /15/ przy ograniczeniach nierównościowych /16/ dotyczących decyzji  $q_{\text{sk}}$ , /17/ dotyczących decyzji  $v_{\text{sk}}$ , oraz ograniczeniu /20/ wynikającym z dopuszczalnych ilości wody w zbiornikach.

W wyniku rozwiązania powyższego zadania otrzymujemy ciągi decyzji

$$\begin{aligned} q_{\text{sk}}^T &= [q_k^T, \dots, q_{k+\Delta}^T] \\ v_{\text{sk}}^T &= [v_k^T, \dots, v_{k+\Delta}^T] \end{aligned}$$

Ciągi te zależą od wektora informacji na poziomie górnym w chwili  $k$ -tej, tj. od  $h_k, \hat{z}_k$  oraz od danych apriory, tj. parametrów procesów dopływów i zapotrzebowań nominalnych.

Przy podejmowaniu decyzji w chwili  $k$ -tej znane są wartości liczbowe  $h_k, \hat{z}_k$ , co pozwala na wyznaczenie  $q_{\text{sk}}, v_{\text{sk}}$  i podjęcie decyzji  $q_k, v_k$ . W chwili  $k+1$  dysponujemy nową informacją  $h_{k+1}, \hat{z}_{k+1}$  wyznaczamy  $q_{s,k+1}, v_{s,k+1}$ , podejmujemy decyzje  $q_{k+1}, v_{k+1}$ .

Rozwiązanie zadania minimalizacji /15/ przy ograniczeniach /16/, /17/, /20/ może być uzyskane na drodze numerycznej /dla danych  $h_k, \hat{z}_k$  oraz  $d_{\text{sk}}, w_{\text{sk}}/$  przy zastosowaniu któregośkolwiek z algorytmów programowania kwadratowego. W opracowaniu korzystano z algorytmu Wolfe'a prowadzącego do zadania programowania liniowego o odpowiednio zwiększonej wymiarowości.

### 3. Agregacja odbiorców.

W sformułowaniu w p.2 nie precyzowano szczegółowo struktury połączeń odbiorców ze zbiornikami systemu. Strukturę tę w sposób ogólny określała macierz  $G$  w równaniu /8/. Ta sama macierz występuje w ograniczeniu /20/. Obecnie rozpatrzmy tę sprawę szczegółowo.

Elementami macierzy  $G$  są zawsze jedynki. W najprostrzym przypadku  $G$  jest macierzą diagonalną, co oznacza, że z każdym zbiornikiem związany jest jeden odbiorca.

W przypadku bardziej ogólnym w poszczególnych wierszach macierzy  $G$  może występować więcej niż jedna jedynka, przy czym w kolumnach tej macierzy występuje dokładnie jedna jedynka. Oznacza to, że z jednym zbiornikiem może być związana większa liczba odbiorców, jednak żaden z nich nie korzysta

sta równocześnie z dwu zbiorników.

W najbardziej ogólnym przypadku liczba jedynek w wierszach i kolumnach macierzy  $G$  nie jest ograniczona.

Po powyższych wyjaśnieniach rozpatrzmy jeszcze raz problem /15/, /16/, /20/ przy następujących dodatkowych założeniach:

- brak ograniczeń na zmienne  $q_{sk}$  /nieaktywne ograniczenie /16//,
  - z danym zbiornikiem jest połączona większa liczba odbiorców.
- brak odbiorców korzystających równocześnie z dwu zbiorników.

W dalszych zapisach przyjmuje się również, że składowe wektora  $q_n, n=k, \dots, k+\Delta$  są uporządkowane wg. powiązania kolejno z 1 i następnymi zbiornikami.

Łatwo zauważyć, że obecnie można wprowadzić nową zmienną określoną następująco:

$$G q_n = e_n \quad n = k, \dots, k+\Delta \quad /21/$$

Fizycznie zmienną  $e_n$  interpretujemy jako decyzję o sumarycznym poborze z poszczególnych zbiorników systemu. Podstawienie /21/ można zapisać również w bardziej zwartej postaci

$$G_s q_{sk} = e_{sk} \quad /22/$$

gdzie:

$$q_{sk}^T = [q_k^T, \dots, q_{k+\Delta}^T]$$

$$e_{sk}^T = [e_k^T, \dots, e_{k+\Delta}^T]$$

$$G_s = \text{diag} [G, \dots, G]$$

Podstawiając /22/ do ograniczenia /20/ wyrażamy je przez nową zmienną  $e_{sk}$ . Mamy

$$l_{\min}^{-h_{sk}} \leq -T e_{sk} - G_o^* v_{sk} \leq l_{\max}^{-h_{sk}} \quad /23/$$

gdzie:

$$T = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ I & \dots & I & & \end{bmatrix}$$

$I$  - macierz jednostkowa.

Powstały obecnie problem minimalizacji ma postać

$$J = \min_{\begin{bmatrix} q_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix}} / \hat{z}_{sk} - q_{sk} / T B^T / \hat{z}_{sk} - q_{sk} /$$

$$G_s q_{sk} = e_{sk}$$

$$v_{smin} \leq v_{sk} \leq v_{smax}$$

$$l_{dmin} - h_{sk} \leq -Te_{sk} - G_o^* v_{sk} \leq l_{gmax} - h_{sk}$$

Problem ten można rozwiązać analitycznie ze względu na zmienną  $q_{sk}$ . Otrzymujemy w ten sposób problem częściowy nazywany dalej problemem agregacji. Ma on postać

$$J_1 = \min_{q_{sk}} \hat{z}_{sk}^{-q_{sk}} / {}^T B^T B / \hat{z}_{sk}^{-q_{sk}} \quad /24/$$

$$G_s^{-1} q_{sk} = e_{sk} \quad /25/$$

Rozwiązując analitycznie problem /24/, /25/ określimy funkcję

$$q_{sk}^0 = f/e_{sk}$$

Pozostanie do rozwiązania problem

$$J = \min_{\begin{matrix} e_{sk} \\ v_{sk} \end{matrix}} \hat{z}_{sk}^{-f/e_{sk}} // {}^T B^T B / \hat{z}_{sk}^{-f/e_{sk}} // \quad /26/$$

$$v_{smin} \leq v_{sk} \leq v_{smax} \quad /27/$$

$$l_{dmin} - h_{sk} \leq -Te_{sk} - G_o^* v_{sk} \leq l_{gmax} - h_{sk} \quad /28/$$

Porównując problem /15/ przy ograniczeniach /16/, /17/, /20/ z otrzymanym powyżej /26/, /27/, /28/ widzimy, że różnią się one wymiarowością. W pierwszym z nich występuje minimalizacja względem zmiennej  $q_{sk}$  mającej  $N_1 \Delta$  składowych, w drugim względem zmiennej  $e_{sk}$  o  $N_2 \Delta$  składowych. Ponieważ zawsze  $N_2 \ll N_1$ , a w praktyce  $N_2 \ll N$  agregacja odbiorców pozwala na znaczną redukcję wymiarowości rozwiązywanego numerycznie problemu programowania kwadratowego.

#### 4. Rozwiązanie problemu agregacji

Problem agregacji polegający na minimalizacji /24/ przy ograniczeniu /25/ rozwiązuje się w sposób klasyczny przy użyciu mnożników Lagrange'a. Mamy

$$J_2 = \min_{q_{sk}} \hat{z}_{sk}^{-q_{sk}} / {}^T B^T B / \hat{z}_{sk}^{-q_{sk}} / + \lambda_{sk}^T / G_s^{-1} q_{sk} - e_{sk} /$$

Stąd

$$q_{sk} = \hat{z}_{sk} + / B^T B /^{-1} G_s \lambda_{sk}$$

gdzie

$$\lambda_{sk} = [G_s^T / B^T B / -1 G_s]^{-1} / e_{sk} - G_s^T \hat{z}_{sk} /$$

ostatecznie

$$q_{sk}^0 = \hat{z}_{sk} - / B^T B / -1 G_s^T [G_s^T / B^T B / -1 G_s]^{-1} / G_s^T \hat{z}_{sk} - e_{sk} / \quad /29/$$

Uwzględniając /19/ można minimalizowany wskaźnik /26/ przedstawić w postaci formy kwadratowej zmiennej  $e_{sk}$ . Ma ona postać następującą

$$J_0 = / \hat{z}_{sk}^z - e_{sk} / G_s^T / B^T B / -1 G_s^{-1} / \hat{z}_{sk}^z - e_{sk} / \quad /30/$$

gdzie  $\hat{z}_{sk}^z$  jest zagregowaną postacią wektora  $z_{sk}$  tj.

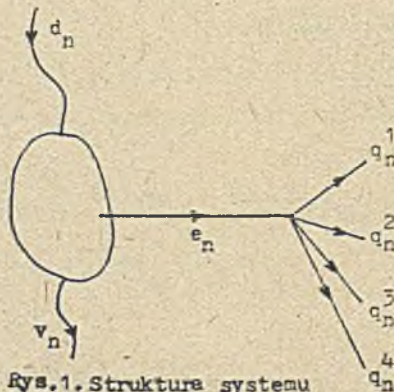
$$\hat{z}_{sk}^z = G_s^T \hat{z}_{sk}$$

Dalsza część problemu, tj. minimalizacja formy kwadratowej /30/ przy ograniczeniach /27/, /28/ może być rozwiązana już tylko na drodze numerycznej.

Podobnie jak w problemie bez agregacji wyznaczono optymalne wielkości zmiennych decyzyjnych  $e_{sk}, v_{sk}$  w chwili  $k$ , które zależą od wektore inform. bieżącej w chwili  $k$  tj.  $h_k, \hat{z}_k$ . Wektor  $h_k$  oddziałuje poprzez ograniczenie /28/, natomiast  $\hat{z}_k$  występuje w wektorze  $\hat{z}_{sk}$ .

### 5. Przykład.

System rozpatrywany w przykładzie ma strukturę przedstawioną na rys.1. Zawiera on jeden zbiornik o dopływie  $d_n$ , odpływie  $v_n$ . Ze zbiornika korzysta czterech odbiorców o zmiennych koordynujących  $q_n^1, q_n^2, q_n^3, q_n^4$ . Każdy z odbiorców posiada zbiornik wyrównawczy.



Rys.1. Struktura systemu



Rozszerzenie rozpatrywanego przykładu na przypadek systemu zawierającego kilka zbiorników nie stanowi ograniczenia dla badanej aktualnie metody.

Przykład jest podzielony na dwa fragmenty. W części analitycznej dokonuje się agregacji zmiennych koordynujących  $q^i$  według zależności z p.3.

W drugim fragmencie przykładu przytacza się wyniki obliczeń numerycznych.

### 5.1. Agregacja

Odpowiednio do struktury systemu i wzorów z p.2. kolejne postacie minimalizowanego wskaźnika jakości są następujące:

wskaźnik dla całego systemu w horyzoncie  $\Delta$

$$J = E \sum_{n=k}^{k+\Delta} \sum_{i=1}^4 |z_n^i - u_n^i|^2$$

wskaźnik po uwzględnieniu prawa sterowania na poziomie dolnym

$$J_g = \sum_{n=k}^{k+\Delta} \sum_{i=1}^4 |\hat{z}_n^i - q_n^i|^2$$

$$J_g = \sum_{n=k}^{k+\Delta} \left( \hat{z}_n^T - q_n^T \right)^T \left( \hat{z}_n - q_n \right)$$

$$\hat{z}_n^T = [\hat{z}_n^1, \dots, \hat{z}_n^4]$$

$$q_n^T = [q_n^1, \dots, q_n^4]$$

wskaźnik po uwzględnieniu ograniczeń równościowych - równania dynamiki odbiorców

$$J_g = \hat{z}_{sk}^T - q_{sk}^T B^T B \hat{z}_{sk} - q_{sk}^T$$

gdzie:

$$z_{sk} = \begin{bmatrix} z_k^1, \dots, z_k^4 & | & w_{k+1}^1, \dots, w_{k+1}^4 & | & \dots & | & w_{k+\Delta}^1, \dots, w_{k+\Delta}^4 \\ q_k^1, \dots, q_k^4 & | & q_{k+1}^1, \dots, q_{k+1}^4 & | & \dots & | & q_{k+\Delta}^1, \dots, q_{k+\Delta}^4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} I & & & & \\ A & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & I \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

np. dla  $\Delta = 3$

$$B_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ A & I & 0 & 0 \\ A^2 & A & I & 0 \\ A^3 & A^2 & A & I \end{bmatrix}$$

Zagregowaną zmienną decyzyjną wyraża się zależnością

$$G^T q_n = e_n \quad n=k, \dots, k+\Delta \\ G^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

lub w zapisie dla całego horyzontu  $\Delta$

$$G_s^T q_{sk} = e_{sk} \\ G_s^T = \begin{bmatrix} G^T & & & \\ & G^T & & \\ & & G^T & \\ & & & \ddots \\ & & & & G^T \end{bmatrix} \\ G_{s3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Optymalne decyzje  $q_{sk}^0$  w zależności od zmiennych zagregowanych  $e_{sk}$  wyrażają się zależnością /por. z/29//.

$$q_{sk}^0 = \hat{z}_{sk} - /B^T B /^{-1} G_s [G_s^T /B^T B /^{-1} G_s]^{-1} /z_{sk}^z - e_{sk} /$$

gdzie:  $\hat{z}_{sk}^z = G_s^T \hat{z}_{sk}$

lub w zapisie bardziej szczegółowym

$$\hat{z}_{sk}^z = \left[ \sum_{i=1}^4 \hat{z}_k^i, \sum_{i=1}^4 w_{k+1}^i, \dots, \sum_{i=1}^4 w_{k+\Delta}^i \right]$$

Wskaźnik po wykonaniu agregacji ma postać

$$J_9 = /z_{sk}^z - e_{sk} /^T [G_s^T /B^T B /^{-1} G_s]^{-1} /z_{sk}^z - e_{sk} /$$

Dla możliwości porównania wyżeń na decyzje koordynujące w zależności od zmiennej zagregowanej, uzyskane w układzie zamkniętym i otwartym ze sprzężeniem należy wyznaczyć macierz

$$/B^T B /^{-1} \text{ oraz } [G_s^T /B^T B /^{-1} G_s]^{-1}.$$

Dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się w tej części przykładu  $\Delta=1$  oraz dwu odbiorców o zmiennych koordynujących  $q_n^1, q_n^2 \quad n=k, \dots, k+\Delta$ .

Mamy

$$B_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$$

$$B_1^T B = \begin{bmatrix} I & A \\ A & A^2 + I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & 1+\alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 1+\alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$/B_1^T B_1 /^{-1} = \begin{bmatrix} A^2 + I & -A \\ -A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2^2 & 0 & -\alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{s1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{s1}^T /B_1^T B_1 /^{-1} G_{s1} = \begin{bmatrix} 1+\alpha_1^2+1+\alpha_2^2 & -\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$/G_{s1}^T /B_1^T B_1 /^{-1} G_{s1} /^{-1} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & 1+\alpha_1^2+1+\alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$m = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4$$

$$G_{s1} /G_{s1}^T /B_1^T B_1 /^{-1} G_{s1} /^{-1} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2 \end{bmatrix}$$

$$/B_1^T B_1 /^{-1} G_{s1} /G_{s1}^T /B_1^T B_1 /^{-1} G_{s1} /^{-1} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \alpha_1^2 - \alpha_1 & \alpha_2 + 2 & /-\alpha_1 + \alpha_2 / / 1 - \alpha_1 \alpha_2 / \\ \alpha_2^2 - \alpha_1 & \alpha_2 + 2 & / \alpha_1 - \alpha_2 / / 1 - \alpha_1 \alpha_2 / \\ -\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 2 & \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 2 & \end{bmatrix}$$

Przyjmując, że w rozpatrywanym przypadku

$$\hat{z}_{sk}^z = \begin{bmatrix} \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 \\ \hat{w}_{k+1}^1 + \hat{w}_{k+1}^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{z}_{sk} = \begin{bmatrix} \hat{z}_k^1 \\ \hat{z}_k^2 \\ \hat{w}_{k+1}^1 \\ \hat{w}_{k+1}^2 \end{bmatrix}$$

$$q_{sk} = \begin{bmatrix} 1 \\ q_k \\ 2 \\ 1 \\ q_{k+1} \\ 2 \\ q_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$e_{s1} = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy następującą postać szczegółową wzoru na optymalne zmienne decyzyjne  $q_k^1, q_{k+1}^1$   $i=1,2$  wyrażoną w funkcji  $e_{sk}, z_{sk}^2$

$$q_k^{01} = \hat{z}_k^1 - \frac{1}{m} \left\{ \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 2 / \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 - e_k / + / - \alpha_1 + \alpha_2 / / 1 - \alpha_1 \alpha_2 / / \bar{w}_{k+1}^1 + \bar{w}_{k+1}^2 - e_{k+1} / \right\}$$

$$q_k^{02} = \hat{z}_k^2 - \frac{1}{m} \left\{ \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 2 / \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 - e_k / + / \alpha_1 - \alpha_2 / / 1 - \alpha_1 \alpha_2 / / \bar{w}_{k+1}^1 + \bar{w}_{k+1}^2 - e_{k+1} / \right\}$$

$$q_{k+1}^{01} = \bar{w}_{k+1}^1 - \frac{1}{m} \left\{ / - \alpha_1 + \alpha_2 / / \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 - e_k / + / \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 2 / / \bar{w}_{k+1}^1 + \bar{w}_{k+1}^2 - e_{k+1} / \right\}$$

$$q_{k+1}^{02} = \bar{w}_{k+1}^2 - \frac{1}{m} \left\{ / \alpha_1 - \alpha_2 / / \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 - e_k / + / \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 2 / / \bar{w}_{k+1}^1 + \bar{w}_{k+1}^2 - e_{k+1} / \right\}$$

W przypadku gdy odbiorcy mają jednakowe współczynniki dynamiki, tj.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  otrzymujemy

$$q_k^{01} = \hat{z}_k^1 - \frac{1}{2} / \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 - e_k /$$

$$q_k^{02} = \hat{z}_k^2 - \frac{1}{2} / \hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 - e_k /$$

$$q_{k+1}^{01} = \bar{w}_{k+1}^1 - \frac{1}{2} / \bar{w}_{k+1}^1 + \bar{w}_{k+1}^2 - e_{k+1} /$$

Oznacza to, że optymalna decyzja  $q_k^{0i}$   $i=1,2$  zależy tylko od decyzji zagregowanej  $e_k$ , a nie od ich ciągu w rozpatrywanym horyzoncie.

## 5.2. Założenia do obliczeń numerycznych.

Po wykonaniu agregacji pozostaje do rozwiązania zadanie optymalizacji w postaci

$$J = \min / z_{sk}^2 - e_{sk} /^T [ G_s^T / B^T B /^{-1} G_s ]^{-1} / z_{sk}^2 - e_{sk} /$$

$$\begin{bmatrix} q_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix}$$

Przy ograniczeniach, które w rozpatrywanym przykładzie zapisane w formie nierówności pojedynczych są następujące /porównaj z /23//

$$\begin{bmatrix} -I & -I \\ I & I \\ 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} l_{dmin} - h_{sk} \\ -l_{dmax} + h_{sk} \\ v_{smin} \\ -v_{smax} \end{bmatrix}$$

Ograniczenia te upraszczają się dalej, jeżeli przyjąć istnienie zbiorników wyrównawczych z których jest pokrywana różnica pomiędzy  $w_n$  i  $\bar{w}_n$  /patrz /19/ i dalsze./ w połączeniu ze strukturą systemu z rys.1. mamy

$$l_{dmin} = h_{smin} - T d_{sk}^{min}$$

$$l_{q\max} = h_{s\max} - T d_{sk}^{\max}$$

Danymi apriori są parametry procesów dopływów  $d_n$ ,  $n = \dots, k + \Delta$  i zagregowanych zapotrzebowań nominalnych  $\sum_{i=1}^4 w_n^i$ ,  $n = k, \dots, k + \Delta$ . Procesy te przyjęto tak samo jak w przykładach z prac [2], [3]. Dla okresu pierwszego roku i bilansów miesięcznych przedstawiono je pracy [4].

Na podstawie tab. 1, 2 z pracy [4] określono interesujące parametry tych procesów. Dla dopływów  $d_n$  są to wartości graniczne w horyzoncie  $\Delta$ , tj. ciągi  $d_{sk}^{\min}$ ,  $d_{sk}^{\max}$ . Dla procesu zagregowanego zapotrzebowania minimalnego jest to jego wartość średnia, równa przy założeniu niezależności, potrzebnej sumie wartości średnich zapotrzebowań nominalnych poszczególnych odbiorców.

Również danymi apriori są wielkości ograniczeń dla zmiennych  $v_n$  i poziomów wody  $h_n$ . W rozpatrywanym przykładzie założono, że ograniczenia te nie zależą od chwili bieżącej. Wobec powyższego ciągi  $v_{s\min}$ ,  $v_{s\max}$ ,  $h_{s\min}$ ,  $h_{s\max}$  mają równe wszystkie wyrazy. Konkretne wartości liczbowe ograniczeń przyjmowano jak w przykładzie z pracy [2].

Danymi bieżącymi są  $h_k$ ,  $z_k^z$ . W obliczeniach przyjmowano je następująco: dla  $h_k$  przyjmowano  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$ ,  $\frac{1}{2}(h_{\min} + h_{\max})$ ; dla  $z_k^z$  wybrano wartości liczbowe z przedziału  $0.2 \div 1.2$ .

### 5.3. Rozwiązanie numeryczne i jego dyskusja.

Rozwiązanie numeryczne problemu optymalizacji

$$J_y = \min \left[ z_{sk}^z - e_{sk} / T \left[ C_s^T / B^T B / C_s \right]^{-1} / z_{sk}^z - e_{sk} / \begin{bmatrix} e_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix} \right]$$

przy ograniczeniach

$$\begin{bmatrix} -T & -T \\ T & T \\ 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} h_{s\min} - T d_{sk}^{\min} \\ -h_{s\max} + T d_{sk}^{\max} \\ v_{s\min} \\ -v_{s\max} \end{bmatrix}$$

wyrażono w postaci reguł decyzyjnych

$$e^0 = e_{sk}^0 / h_k, \quad z_k^z /$$

$$v^0 = v_{sk}^0 / h_k, \hat{z}_k /$$

gdzie:  $h_k = 0.0, 1.1, 2.2$

$$z_k = 0.4, 0.8$$

$$\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0.1, \alpha_4 = 0.2$$

Ze względu na skończoną liczbę wartości argumentów, funkcje te mogą być przedstawione tabelarycznie.

Reguły te są porównywane z uzyskanymi metodą siatek w [2] dla takiego samego przykładu, przy tych samych danych. Przed porównaniem przypomnijmy, że reguły /31/ otrzymano przy istotnie zmienionej metodzie optymalizacji i związanych z nią następujących założeniach:

1. Optymalne decyzje wyznaczone są w strukturze otwartej ze sprzężeniem.
2. Horyzont optymalizacji ma stałą długość  $\Delta$  chwil i związany jest z chwilą bieżącą.
3. Dynamika odbiorcy zagregowanego jest zależna od współczynników dynamiki poszczególnych zagregowanych odbiorców.

Założenia te umożliwiają proste rozwiązanie postawionego zadania optymalizacji, mogą jednak powodować stratę optymalności.

Występowanie takiej straty można zauważyć przez porównanie reguł decyzyjnych otrzymanych obecnie ze ściśle optymalnymi uzyskanymi w [2].

Porównania przeprowadza się tak by uchwycić wpływy założeń 1,2 na stratę optymalności.

### 5.3.1. Stany zabronione.

W tablicach decyzyjnych wyznaczonych w [2] występowały stany zabronione, rozumiane jako te wartości  $h_k, \hat{z}_k$ , dla których, przy założonych ocenach dla procesu dopływów nie mogą być spełnione ograniczenia w którymś z etapów z horyzontu  $[k, N]$ . Dla wartości  $h_k$  bliskich zeru występowanie tych stanów było konsekwencją pośredniego ograniczenia na wartość minimalną  $p_k$ . W rozwiązywanym obecnie przykładzie nie założono ograniczenia na wartość  $e_k$  /odpowiada ona  $p_k$ /, co spowodowało nie wystąpienie stanów zabronionych. Stąd porównanie reguł decyzyjnych w tych punktach odpowiednich tablic decyzyjnych nie jest możliwe.

### 5.3.2. Wpływ zmiany struktury z zamkniętej na otwartą ze sprzężeniem

Dla pokazania wpływu zmiany struktury na ewentualną stratę optymalności porównywano reguły decyzyjne uzyskane w [2] w etapie  $N - \Delta$  z uzyskanymi obecnie dla  $k=11$  i  $\Delta=1$  oraz  $k=10$  i  $\Delta=2$ . Powyższy dobór numerów porównywanych etapów wynika z dążenia do usunięcia ubocznego wpływu ruchomego horyzontu optymalizacji.

Dla  $\Delta=1$  tj.  $k=11$  obie porównywane tablice mają identyczne wartości dla  $h_k = 0.0, 1.1, 2.2$   $\hat{z}_k = \hat{z}_k^z = 0.4, 0.8$ .

Dla  $\Delta=2$  tj.  $k=10$  w tablicy uzyskanej w [2] dla  $h_k = 0.0$  i  $\hat{z}_k = 0.4, 0.8$  występują stany zabronione. W pozostałych punktach tj.  $h_k = 1.1, 2.2$ ,  $\hat{z}_k = 0.4, 0.8$  obydwie tablice mają identyczne wartości.

Oznacza to, że dla rozpatrywanego przykładu i przyjętych w nim danych zmiana struktury nie spowodowała straty optymalności przy założeniu, że trajektoria nie rozpoczyna się stanem zabronionym, bowiem wtedy porównanie nie jest możliwe.

### 5.3.3. Wpływ ruchomego horyzontu optymalizacji.

W porównywanych regułach decyzyjnych efekt pochodzący od horyzontu optymalizacji pojawia się jedynie w tych etapach, w których przyznana ilość wody  $e_k, /p_k/$  jest mniejsza od  $\hat{z}_k = \hat{z}_k^z$ .

W takiej sytuacji w etapach 1-5 ilości przyznawanej wody zależą od długości horyzontu. Patrz, np. etap 2  $h_2 = 0.0$ ,  $\hat{z}_2^z$ , podobnie etap 4  $h_4 = 0.0$ ,  $\hat{z}_4^z = 0.4$ . Największa ilość przyznawana jest przy  $\Delta=1$ , najmniejsza dla pełnego horyzontu stosowanego w [2]. Występujące różnice nie są zbyt wielkie i wynoszą około 10 - 15%.

Ten efekt można wytłumaczyć biorąc pod uwagę, że w etapach 1 - 5 następuje stały wzrost dopływu przekraczający nominalne zapotrzebowanie stąd "krótkowzroczne" horyzonty  $\Delta=1, 2$  prowadzą do zwiększenia ilości przyznawanej wody. Natomiast "dalekowzroczny" horyzont dla chwili  $N$  uwzględnia już spadek dopływu występujący po etapie 5.

### LITERATURA

- [1] Jessing B., Latarnik M. Sterowanie optymalne przy horyzoncie skończonym. Archiwum Automatyki i Teletechniki, 1975, t. XX, z. 1.

- [2] Gessing R. i inni : Metoda syntezy stochastycznie optymalnych reguł decyzyjnych rozdziału zasobów w strukturze hierarchicznej . Praca zlecona przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1981.
- [3] Gessing R. i inni : Metoda i algorytmy sterowania stochastycznie optymalnego zbiorów obiektów w systemie wodno-gospodarczym. Cz.II. Badania teoretyczne i symulacyjne. Praca zlecona przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1980
- [4] Błachuta K., Cieślak Z., Duda Z. : Sterowanie stochastycznie optymalne przy różnym sposobie wykorzystywania informacji pomiarowej w prostym systemie wodno-gospodarczym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Z.59.Gliwice 1981 .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ В РАЗОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ**

/ Резюме /

В работе представлен способ определения оптимальной стратегии, использующий в явном виде решение дискретного линейного уравнения. При введенном квадратном показателе качества это приводит к задаче квадратного программирования, решаемой алгоритмом Вольфа. Представленный метод позволяет на решение водохозяйственной системы, состоящей из многих водохранилищ. Единственным ограничением в этом случае является размерность тождественного задания линейного программирования.

**CONTROL ALGORITHM DESIGN IN OPEN-LOOP FEEDBACK SYSTEM FOR WATER SUPPLY SYSTEM**

Summary. The problem of optimal strategy design is considered. The explicit form of the solution for discrete linear equation is used and enables to apply the Wolf algorithm for quadratic programming when the performance index is considered. This method allows to solve systems with many reservoirs and the dimension of an equivalent linear programming problem is the only limitation.