ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria : AUTOMATYKA z.68 Nr kol.767

KONRAD WOJCIECHOWSKI

ZDZISŁAW DUDA

Instytut Automatyki
Politechnika Śląska, Gliwice

OPTYMALNY ROZDZIAŁ ZASOBÓW WODY W SYSTEMIE : PRZYPADEK ODBIORCÓW STATYCZNYCH

Streszczenie. W pracy rozpatruje się problem optymalnego rozdziału wody pomiędzy odbiorców powiązanych połączeniami transportowymi ze zbiornikami systemu. Zewnętrzny dopływ wody do zbiorników jest zmienną niepewną. Zakłada się ograniczenia pojemności zbiorników, ograniczenia przepustowości połączeń transportowych oraz statykę odbiorców. Pokazuje się, że przy takich założeniach ciąg optymalnych decyzji o rozdziale, minimalizujący straty w systemie dla przyjętego horyzontu optymalizacji posiada tę własność, że każda z decyzji dekomponuje się na dwie decyzje częściowe. Pierwsza z nich dotyczy optymalnego rozdziału zasobów w statycznej części systemu przy parametrze określającym pobór wody ze zbiornika, druga określa optymalne decyzje o tym poborze.

1. Wprowadzenie

W złożonych systemach wodno-gospodarczych poszczególni odbiorcy powiązani są ze zbiornikami głównymi systemu skomplikowaną siecią zawierającą rurociągi transportowe, stacje uzdatniania, przepompownie oraz sieciowe zbiorniki wyrównawcze. Dla potrzeb pracy będziemy dalej zakładać, że istotną cechą powyższej sieci jest ograniczona od dołu i góry przepustowość poszczególnych dróg transportowych oraz, że zbiorniki wyrównawcze sieci pracują ze stałym poziomem wody. Standardowo, problem optymalnego rozdziału wody pomiędzy poszczególnych odbiorców jest rozwiązywany poprzez minimalizację względem wszystkich zmiennych niezależnych wskaźnika jakości wyrażającego sumaryczne straty w systemie wynikające z niedostarczenia wymaganych przez odbiorców ilości wody.

Wadą takiego podejścia w połączeniu z metodą programowania dynamicznego jest uwzględnianie w każdej z chwil dyskretnych ograniczeń wnoszonych przez sieć i jawne wyznaczanie wartości wszystkich zmiennych niezależnych w funkcji ilości wody w zbiornikach głównych. Podejście proponowane w pracy polega na jednorazowym wyznaczeniu optymalnego rozdziału wody dla części statycznej sieci w funkcji parametrów wyrażających wielkości poborów ze zbiorników głównych i zapotrzebowania odbior-

ców . Ten etap rozwiązania nosi nazwę optymalnego rozdziału przestrzennego.

W etapie drugim, dysponując stratami w funkcji poborów wody ze zbiorników głównych rozwiązuje się problem optymalnego rozdziału czasowego. w funkcji mierzonych ilości wody w zbiornikach głównych.

2. Sformułowanie problemu

2.1 Struktura systemu

Struktura rozpatrywanego systemu wyraża się przez graf zorientowany. Wierzchołki grafu reprezentują zbiorniki lub węzły sieci rurociągów. Gałęzie grafu odpowiadają połączeniom transportowym.
Opis analityczny systemu ma postać :

$$\frac{d}{dt} x^* = A \cdot q^* \qquad /1/$$

gdzie :

$$x^{*T}_{1\times(d+s)} \triangleq \left[x^T_{1\times d} , 0^T_{1\times s} \right]$$

Składowe wektora x^* wyrażają ilości wody zgromadzonej w poszczególnych węzłach systemu. Zakłada się, że tylko d węzłów może gromadzić wodę. Węzłom tym odpowiadają zbiorniki główne.

$$q^{*T}_{1\times(p+r+t)} \triangleq \left[q^T_{1\,1\times p} , q^T_{2\,1\times r} , q^T_{3\,1\times t} \right]$$

Składowe wektora e^* przedstawiają wartości natężeń przepływu w poszczególnych rurociągach. Wśród składowych wektora q^*, p pierwszych reprezentuje przepływy w gałęziach związanych z węzłami-zbiornikami, kolejne r składowych przedstawia przepływy w gałęziach związanych z pozostałymi węzłami systemu. Ostatnie t składowych to przepływy, których natężenia są zmiennymi niepewnymi.
Dla potrzeb dalszych zapisów oznaczmy dodatkowo :

$$q^T \triangleq \left[q_1^T , q_2^T \right]$$

Macierz A ma następującą postać blokową :

$$A_{(d+s)\times(p+r+t)} \triangleq \begin{bmatrix} A_{11\,d\times p} & 0_{d\times r} & A_{12\,d\times t} \\ A_{21\,s\times p} & A_{22\,s\times r} & A_{23\,s\times t} \end{bmatrix}$$

2.2 Ograniczenia

W rozpatrywanym systemie obowiązują następujące ograniczenia :

$$\underline{q} \leq q \leq \bar{q} \qquad /2/$$

Ograniczenie $\bar{q}$ odpowiada maksymalnej projektowej przepustowości rurociągu lub stacji. Ograniczenie $\underline{q} = 0$ może wyrażać niedopuszczalność inwersji kierunku przepływu.

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \qquad /3/$$

Ograniczenie $\bar{x}$ oznacza maksymalną możliwą do zgromadzenia ilość wody. Wielkość $\bar{x} - \underline{x}$ odpowiada pojemności roboczej zbiornika.

2.3. Wskaźnik jakości

Każdy z odbiorców występujących w systemie deklaruje wymagane przez siebie natężenie poboru. Straty wynikają z niemożności dostarczenia odbiorcy wymaganego natężenia dopływu. Stąd, straty sumaryczne dla wszystkich odbiorców w horyzoncie czasu [0, T] wyraża wskaźnik :

$$I_2 = \int_0^T \| C \cdot q - z \|_W^2 \, dt \quad . \qquad /4/$$

gdzie :

$z^T_{1\times n}$ - wektor wymaganych natężeń poboru,

$C_{n\times(p+r)}$ - macierz odbiorców,

$W_{n\times n}$ - istotnie dodatnio określona macierz wag.

3. Dyskretyzacja

Model o postaci (1) jest wynikiem bilansu ilości wody w węzłach systemu. Bilans taki musi zachodzić w każdej chwili.

Dla celów podejmowania decyzji a następnie ich przekazywania i realizacji korzystniejszy jest model dyskretny o okresie próbkowania T_i .

Równanie (1) przyjmuje po dyskretyzacji postać :

$$x^*[(k+1)T_i] = x^*[k\,T_i] + A \cdot \int_{kT_i}^{(k+1)T_i} q^*(t)\,dt \qquad /5/$$

co w uproszczeniu można zapisać :

$$x^*_{k+1} = x^*_k + A \cdot Q^*_k \qquad /6/$$

gdzie :

$$Q^*_k = T_i \cdot q^*$$

$$q^*(t) = \text{const} \quad t \in [kT_i\,,\ (k+1)\,T_i]$$

Przy powyższych założeniach ograniczenia (2) przyjmują postać :

$$\underline{Q} \leqslant Q_k \leqslant \bar{Q} \qquad /7/$$

Wskaźnik jakości przybiera formę :

$$I_1 = \mathcal{L} \sum_{i=1}^{N} \| C\,Q_i - Z_i \|^2_W \qquad /8/$$

gdzie :

$$\mathcal{L} = 1 / T_i\,, \quad N = \text{ent}\ T/T_i$$

4. Zmienne niepewne i pomiary

Zakłada się, że w rozpatrywanym systemie zmiennymi niepewnymi są : dopływy zewnętrzne do systemu, (t ostatnich składowych wektora q^* lub Q^*) oraz zapotrzebowania odbiorców Z . Dla zmiennych tych przyjmuje się losowy model niepewności. Występowanie zmiennych losowych powoduje, że wskaźnik o postaci (8) jest również zmienną losową . Stąd dla celów optymalizacji przyjmuje się wskaźnik o postaci :

$$I = \mathcal{L} E \sum_{i=1}^{N} \| C \cdot Q_i - Z_i \|_W^2 \qquad /9/$$

5. Minimalizacja wskaźnika

Ciąg optymalnych decyzji, będących z założenia o strukturze sterowania funkcjami ilości x_i wody w zbiornikach głównych systemu, wyznaczany jest z warunku minimalizacji wskaźnika /8/. Mamy :

$$I^o = \min_{\{Q_i(x_i)\}} E \sum_{i=1}^{N} \| C Q_i - Z_i \|_W^2 =$$

$$= \min_{Q_1(x_1)} E_{|x_1} \{ \| C Q_1 - Z_1 \|_W^2 + \min_{Q_2(x_2)} E_{|x_2} \{ \| CQ_2 - Z_2 \|_W^2 + \ldots$$

$$+ \min_{Q_N(x_N)} E_{|x_N} \{ \| C Q_N - Z_N \|_W^2 \} \ldots \} \} \qquad /10/$$

Odpowiednio do postaci /10/ równanie rekurencyjne wiążące optymalne wartości wskaźnika w chwilach n, $n+1$ ma postać :

$$S_n(x_n) = \min_{Q_n(x_n)} E_{|x_n} \{ \| C Q_n - Z_n \|_W^2 + S_{n+1}(x_{n+1}) \} \qquad /11/$$

gdzie : x_{n+1}, x_n - spełniają ograniczenia wynikające z postaci /6/ .
Przypominając oznaczenie :

$$Q_n^T = \left[Q_{1n}^T , Q_{2n}^T \right]$$

oraz to, że jedynie składowe wektora Q_{1n} mają wpływ na stan systemu można równanie /11/ przepisać w postaci :

$$S_n(x_n) = \min_{Q_n(x_n)} E_{|x_n} \{ \| CQ_n - Z_n \|_W^2 + S_{n+1}(x_{n+1}) \} =$$

$$= \min_{Q_{1n}^T(x_n),\, Q_{2n}^T(x_n)} E\left\{ \| C\, Q_n - Z_n \|_W^2 + S_{n+1}(x_{n+1}) \right\} =$$

$$= \min_{Q_{1n}(x_n)} \min_{Q_{2n} | Q_{1n}(x_n)} E\left\{ \| C\, Q_n - Z_n \|_W^2 + S_{n+1}(x_{n+1}) \right\} =$$

$$= \min_{Q_{1n}(x_n)} \left\{ \min_{Q_{2n} | Q_{1n}(x_n)} E\left\{ \| CQ_n - Z_n \|_W^2 \right. + E_{|x_n} \left. S_{n+1}(x_{n+1}) \right\} \right. \qquad /12/$$

Zadanie minimalizacji o postaci :

$$\min_{Q_{2n} | Q_{1n}(x_n)} E_{|x_n} \| C\, Q_n - Z_n \|_W^2$$

można również przedstawić, pomijając indeksy chwil czasu, jako :

$$R(Q_1, Z) = \min_{Q_2 | Q_1} E \| C\, Q - Z \|_W^2 \qquad /13/$$

przy ograniczeniach w postaci :

$$A_{21}\, Q_1 + A_{22}\, Q_2 + A_{23}\, Q_3 = 0 \qquad /14/$$

$$\underline{Q} \leqslant Q \leqslant \overline{Q} \qquad /15/$$

Rozwiązanie zadania /13/ ma postać :

$$Q_2^o = Q_2^o(Q_1, Z)$$

Zadanie to nazywać będziemy optymalnym przestrzennym rozdziałem zasobów.

Funkcje $R(Q_1, Z)$, $Q_2^o(Q_1, Z)$ otrzymane w wyniku jego rozwiązania mogą być przedstawione analitycznie lub tabelarycznie przez swoje wartości w węzłach ustalonej siatki. Zależność wartości tych funkcji od argumentu Z, który wcześniej zadeklarowany został jako zmienna losowa należy rozumieć jako zależność od parametrów określających rozkład tej zmiennej.

Wyznaczenie funkcji $R(Q_1, Z)$, $Q_2^o(Q_1, Z)$ kończy pierwszy etap rozwiązania zadania ogólnego. W etapie drugim dokonuje się optymalnego rozdziału czasowego wykorzystując wyznaczoną funkcję $R(\cdot)$. Powracając do indeksacji dyskretnych chwil czasu mamy :

$$S_n(x_n) = \min_{Q_{1n}(x_n)} \left\{ R(Q_{1n}, Z_n) + E_{|x_n} S_{n+1}(x_{n+1}) \right\} \qquad /16/$$

przy ograniczeniach :

$$x_{n+1} = x_n + A_{11} Q_{1n} + A_{12} Q_{3n}$$

$$\underline{Q}_1 \leq Q_{1n} < \overline{Q}_1$$

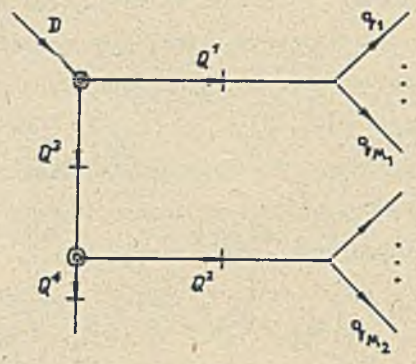
Rozwiązanie tego zadania minimalizacji określa optymalną politykę retencyjną zbiorników głównych wyrażającą się ciągiem decyzji:

$$\{ Q_{1k}(x_k) \} \qquad k = 1, \ldots, N$$

W fazie realizacji decyzji o rozdziale, znając aktualne ilości wody x w zbiornikach systemu, określamy wartość Q_1 wykorzystując wyznaczone funkcje $Q_1(x)$. Następnie określamy dla znanych parametrów zapotrzebowania Z wartość Q_2^o według funkcji $Q_2^o(Q_1, Z)$. Czynności te powtarzamy w każdej z chwil dyskretnych.

6. Przykład

Rozpatrzmy system, którego struktura jest dana grafem przedstawionym na rys.1



Rys.1. Strukura przykładowego systemu

Węzły oznaczone podwójnym kółkiem odpowiadają zbiornikom, gałęzie przekreślone posiadają ograniczenia przepustowości. D jest dopływem zewnętrznym do systemu, $q_1, \ldots, q_{M_1}, \ldots, q_{M_2}$ są przepływami do odbiorców.

Analityczny opis systemu ma postać :

$$\begin{bmatrix} H^1_{n+1} \\ H^2_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} D + \begin{bmatrix} H^1_n \\ H^2_n \end{bmatrix} \qquad /17/$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_k \end{bmatrix}$$

Ograniczenia pojemności zbiorników mają postać :

$$H^1_{min} \leqslant H^1 \leqslant H^1_{max} \qquad /18/$$

$$H^2_{min} \leqslant H^2 \leqslant H^2_{max}$$

Ograniczenia przepustowości połączeń mają postać :

$$Q^1_{min} \leqslant Q^1 \leqslant Q^1_{max} \qquad /19/$$

$$Q^2_{min} \leqslant Q^2 \leqslant Q^2_{max}$$

$$Q^3_{min} \leqslant Q^3 \leqslant Q^3_{max}$$

$$Q^4_{min} \leqslant Q^4 \leqslant Q^4_{max}$$

Zmiennymi losowymi są zapotrzebowania odbiorców z_j, z_k, $j=1, \ldots, M_1$, $k=1,\ldots, M_2$ oraz dopływ D do systemu . Wskaźnik jakości ma postać :

$$I = E \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{M_1} (z_{ji} - q_{ji})^2 + \sum_{k=1}^{M_2} (z_{ki} - q_{ki})^2 \right\}$$

Korzystając z braku ograniczeń na q zadanie optymalnego rozdziału przestrzennego można rozwiązać analitycznie. Mamy :

$$R(Q^1, Q^2,) = \min_{[q_j, q_k] | Q^1, Q^2} E\left[\sum_{j=1}^{M_1} (z_j - q_j)^2 + \sum_{k=1}^{M_2} (z_k - q_k)^2\right]$$

przy ograniczeniach :

$$Q^1 = \sum_{j=1}^{M_1} q_j$$

$$Q^2 = \sum_{k=1}^{M_2} q_k$$

Rozwiązanie tego zadania ma postać :

$$R(Q^1,Q^2) = \mathcal{L}_1\left(Q^1 - \sum_{j=1}^{M_1} \bar{z}_j\right)^2 + \mathcal{L}_2\left(Q^2 - \sum_{k=1}^{M_2} \bar{z}_k\right)^2 + R_o$$

gdzie :

$$R_o = \sum_{j=1}^{M_1}\left(\overline{z_j^2} - \bar{z}_j^2\right) + \sum_{k=1}^{M_2}\left(\overline{z_k^2} - \bar{z}_k^2\right)$$

$$\bar{z}_j = E\, z_j, \quad \overline{z_j^2} = E\, z_j^2, \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{M_1}$$

$$\bar{z}_k = E\, z_k, \quad \overline{z_k^2} = E\, z_k^2, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{M_2}$$

Optymalne funkcje $q_j^o\ (Q_1, \cdot)$, $q_k^o\ (Q_1, \cdot)$ wyrażają się wzorami :

$$q_j^o = \mathcal{L}_1\left(Q^1 - \sum_{j=1}^{M_1} \bar{z}_j\right) + \bar{z}_j$$

$$q_k^o = \mathcal{L}_2\left(Q^2 - \sum_{k=1}^{M_2} \bar{z}_k\right) + \bar{z}_k$$

Zadanie optymalnego rozdziału przestrzennego ma postać :

$$I^o = \min_{\{Q_n^1,\, Q_n^2,\, Q_n^3,\, Q_n^4\}} E \sum_{n=1}^{N} R\left(Q_n^1,\, Q_n^2\right)$$

przy ograniczeniach /17/, /18/, /19/.

7. Wnioski

Metoda dekompozycji uzasadniona w pracy umożliwia efektywne rozwiązanie problemu optymalnego rozdziału wody w sieci. Jej efektywność w porównaniu z innymi metodami nie zakładającymi dekompozycji wzrasta wraz ze złożonością sieci,

LITERATURA

[1] Duda Z., Wojciechowski K. : Optymalny rozdział wody w przykładowym systemie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej.Zeszyt 59,1981.

[2] Findeisen W. : Wielopoziomowe układy sterowania.PWN,Warszawa 1974.

[3] Gessing R. : Zasada minimalizacji i warunkowego uśredniania jako metoda strategii optymalnej. Archiwum Automatyki i Telemechaniki. T.XXI. Z.4, 1976.

OPTIMAL WATER ALLOCATION IN A SYSTEM : STATICAL CUSTOMERS CASE

S u m m a r y

The problem of optimal water allocation among customers is considered. It is assumed, that an inflow to the reservoir is a stochastic variable. The transport constraints, the constraints of the reservoirs capacity are taken into account. The statical model of the customers is discussed. It is shown, that the decisions about the water allocation consists of two decisions. The former one determines the optimal allocation at the statical part of the system as a function of the water consumption from the reservoir. The latter determines optimal decision of this consumption.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОДНОГО РЕСУРСА В СИСТЕМЕ : СЛУЧАЙ СТАТИЧЕСКИХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

/ Резюме /

В работе рассматривается проблема оптимального распределения воды между потребителями соединенными транспортными связями с водосистемой. Внешний приток воды к водохранилищам является переменной неуверенной. Принимаются ограничения по объёму водохранилищ, пропускной способности транспорта а также постоянных потребителей. Показывается, что при таких условиях, последовательность оптимальных решений о распределении, минимизирующая потери в системе для принятого уровня оптимизации имеет ту особенность, что каждое решение декомпонируется на два составных решения. Первое кассается отимального распределения ресурсов для статической части системы с параметром определяющим расход воды из водохранилища, второе - определяет оптимальное решение для данного расхода.