

Walery SZUŚCIK
Bronisław RADZIK

METODA OKREŚLANIA STAŁYCH MATERIAŁOWYCH MATERIAŁÓW ORTOTROPOWYCH
W OPARCIU O TENSOMETRYCZNE BADANIA PRÓBEK PROSTOPADŁOŚCIENNYCH,
ŚCISKANYCH JEDNOKIERUNKOWO

Streszczenie. Podana w pracy metoda określania stałych materiałowych materiałów ortogonalnie anizotropowych oparta jest na badaniach laboratoryjnych trzech prostopadłościennych próbek. Próbki należy wyciąć z materiału według odpowiednich orientacji. Z pomiarów składowych stanu naprężenia i stanu odkształcenia uzyskujemy wartości, które wstawione do podanych wzorów pozwalają wyznaczyć szukane stałe materiałowe.

1. Wstęp

Jeżeli w dowolnym punkcie danego ciała można wyróżnić trzy prostopadłe do siebie płaszczyzny symetrii sprężystej, to ciało takie nazywamy ciałem ortogonalnie anizotropowym albo ortotropowym. Ten rodzaj anizotropii jest często spotykany wśród skał osadowych [1].

Równania uogólnionego prawa Hooke'a dla tego typu ciała napisane w układzie współrzędnych ortokartezjańskich O, x, y, z , którego osie są równoległe do płaszczyzn symetrii sprężystej, mają postać (1) ÷ (6), [2]:

$$\epsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z \quad (1)$$

$$\epsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z \quad (2)$$

$$\epsilon_z = a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{33} \sigma_z \quad (3)$$

$$\tau_x = a_{44} \tau_x \quad (4)$$

$$\tau_y = a_{55} \tau_y \quad (5)$$

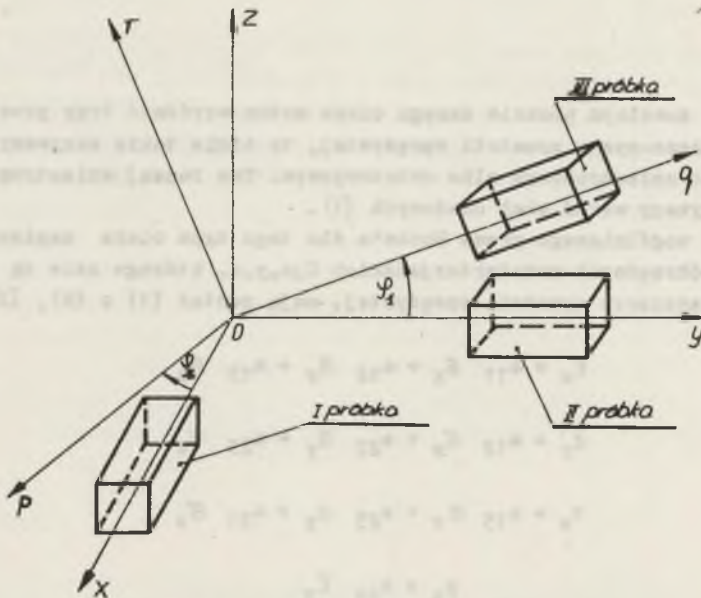
$$\tau_z = a_{66} \tau_z \quad (6)$$

Występuje w nich 9 stałych materiałowych a_{ij} , gdzie: wskaźniki sumacyjne $i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$.

Jedną z metod określania stałych występujących w równaniach (1) ÷ (6) może być metoda podana w niniejszej pracy, która jest oparta o wyniki badań tensometrycznych uzyskane przy jednokierunkowym ściskaniu trzech prostopadłościennych próbek, wyciętych w "punkcie" ciała wzdłuż odpowiednich orientacji.

2. Przestrzenna orientacja próbek i określenie stałych materiałowych

Jeżeli układ współrzędnych ortokartezjańskich O, x, y, z zorientujemy w ten sposób, że jego osie będą równoległe do trzech płaszczyzn symetrii sprężystej ciała i dwie próbki wytniemy z calizny skalnej wzdłuż osi x oraz y , a trzecią wzdłuż osi q , należącej do układu współrzędnych O, p, q, r (rys. 1), powstałego przez obrót układu O, x, y, z wokół osi x o kąt φ_1 i wokół nowego położenia osi y o kąt φ_2 , to ilość danych uzyskanych z badań tensometrycznych próbek pozwoli nam wyznaczyć wszystkie stałe materiałowe.



Rys. 1. Przestrzenna orientacja próbek

Ściany boczne próbek I i II muszą być równoległe do płaszczyzn układu O, x, y, z a ściany próbki III muszą być równoległe do płaszczyzn, które stanowią osie układu O, p, q, r .

Położenie układu O, p, q, r względem układu O, x, y, z określają cosinusy kierunkowe, które zestawiono w tabelicy 1.

Tablica 1

Cosinusy kierunkowe kątów
zawartych między osiami układów:
0, x, y, z i 0, p, q, r

	x	y	z
p	l_1	m_1	n_1
q	0	m_2	n_2
r	l_3	m_3	n_3

Tablica 2

Składowe stanu naprężenia i odkształcenia uzyskane z pomiarów próbek:
I, II, III

Próbka I	$\sigma_{x_1}, \epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}, \delta_{x_1} = 0, \delta_{y_1} = 0, \delta_{z_1} = 0$
Próbka II	$\sigma_{y_2}, \epsilon_{x_2}, \epsilon_{y_2}, \epsilon_{z_2}, \delta_{x_2} = 0, \delta_{y_2} = 0, \delta_{z_2} = 0$
Próbka III	$\sigma_{q_3}, \epsilon_{p_3}, \epsilon_{q_3}, \epsilon_{r_3}, \delta_{p_3}, \delta_{q_3} = 0, \delta_{r_3}$

Dane, które uzyskamy z pomiarów trzech próbek podano w tablicy 2.

Podstawiając do równań (1) ÷ (4) wartości uzyskane z pomiarów próbek I i II otrzymujemy:

$$\epsilon_{x_1} = a_{11} \sigma_{x_1} \quad (7)$$

$$\epsilon_{y_1} = a_{12} \sigma_{x_1} \quad (8)$$

$$\epsilon_{z_1} = a_{13} \sigma_{x_1} \quad (9)$$

próbka II

$$\epsilon_{x_2} = a_{12} \sigma_{y_2} \quad (\text{równanie kontrolne}) \quad (10)$$

$$\epsilon_{y_2} = a_{22} \sigma_{y_2} \quad (11)$$

$$\epsilon_{z_2} = a_{23} \sigma_{y_2} \quad (12)$$

Z równań (8), (9), (10), (12), (13) wyznaczamy pięć stałych materiałowych:

$$a_{11} = \frac{\epsilon_{x_1}}{\sigma_{x_1}} \quad (13)$$

$$a_{12} = \frac{\epsilon_{y_1}}{\sigma_{x_1}} \quad (14)$$

$$a_{13} = \frac{\epsilon_{z_1}}{\sigma_{x_1}} \quad (15)$$

$$a_{22} = \frac{\epsilon_{y_2}}{\sigma_{y_2}} \quad (16)$$

$$a_{23} = \frac{\epsilon_{z_2}}{\sigma_{y_2}} \quad (17)$$

Aby wyznaczyć pozostałe stałe materiałowe zawarte w równaniach (1) ÷ (6) uogólnionego prawa Hooke'a, należy wartości składowych stanu naprężenia i stanu odkształcenia zmierzone na próbce III, zorientowanej według układu O,p,q,r, transformować do układu O,x,y,z.

Wzory transformacyjne [3,4] po wprowadzeniu danych z tablic 1 i 2 mają postać:

$$\epsilon_{x_3} = \epsilon_{p_3} l_1^2 = \epsilon_{q_3} m_1^2 + \epsilon_{r_3} n_1^2 + \gamma_{p_3} m_1 n_1 + \gamma_{r_3} l_1 m_1 \quad (18)$$

$$\epsilon_{y_3} = \epsilon_{q_3} m_2^2 + \epsilon_{r_3} n_2^2 + \gamma_{p_3} m_2 n_2 \quad (19)$$

$$\epsilon_{z_3} = \epsilon_{p_3} l_3^2 + \epsilon_{q_3} m_3^2 + \epsilon_{r_3} n_3^2 + \gamma_{p_3} m_3 n_3 + \gamma_{r_3} l_3 m_3 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x_3} = 2 (\epsilon_{q_3} m_2 m_3 + \epsilon_{r_3} n_2 n_3) + \gamma_{p_3} (m_2 n_3 + m_2 n_3 + m_3 n_2) + \\ + \gamma_{r_3} l_3 m_2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta_{y_3} = 2 (\epsilon_{p_3} l_3 l_1 + \epsilon_{q_3} m_3 m_1 + \epsilon_{r_3} n_3 n_1) + \gamma_{p_3} (m_3 n_2 + m_1 n_3) + \\ + \gamma_{r_3} (l_3 m_1 + l_1 m_3) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta_{z_3} = 2 (\epsilon_{q_3} n_1 m_2 + \epsilon_{r_3} n_1 n_2) + \delta_{p_3} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \\ + \delta_{r_3} l_1 m_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\sigma_{x_3} = \sigma_{q_3} m_1^2 \quad (24)$$

$$\sigma_{y_3} = \sigma_{q_3} m_2^2 \quad (25)$$

$$\sigma_{z_3} = \sigma_{q_3} m_3^2 \quad (26)$$

$$\tau_{x_3} = \sigma_{q_3} m_2 m_3 \quad (27)$$

$$\tau_{y_3} = \sigma_{q_3} m_1 m_3 \quad (28)$$

$$\tau_{z_3} = \sigma_{q_3} m_1 m_2 \quad (29)$$

Podstawiając do równania (3) wzory (15), (17), (20) oraz (24), (25), (26) otrzymamy:

$$m_{33} = \frac{\epsilon_{p_3} l_3^2 + \epsilon_{q_3} m_3^2 + \epsilon_{r_3} n_3^2 + \gamma_{p_3} m_3 n_3 + \delta_{r_3} l_3 m_3}{\sigma_{q_3} m_3^2} + \quad (30)$$

$$- \frac{\sigma_{q_3} \left(\frac{\epsilon_{x_1}}{\sigma_{x_1}} m_1^2 + \frac{\epsilon_{y_2}}{\sigma_{y_2}} m_2^2 \right)}{\sigma_{q_3} m_3^2}$$

Po podstawieniu do równania (4) wzorów (21) i (27):

$$a_{44} = \frac{2(\epsilon_{q_3} m_2 m_3 + \epsilon_{r_3} n_2 n_3) + \delta_{p_3} (m_2 n_3 + m_3 n_2)}{\delta_{q_3} m_2 m_3} + \frac{\delta_{r_3} l_3 m_2}{\delta_{q_3} m_2 m_3} \quad (31)$$

Z równań (5), (22) i (28):

$$a_{55} = \frac{2(\epsilon_{p_3} l_3 l_1 + \epsilon_{q_3} m_3 m_1 + \epsilon_{r_3} n_3 n_1) + \delta_{p_3} (m_3 n_1 + m_1 n_3)}{\delta_{q_3} m_1 m_3} + \frac{\delta_{r_3} (l_3 m_1 + l_1 m_3)}{\delta_{q_3} m_1 m_3} \quad (32)$$

oraz z równań (6), (23) i (29):

$$a_{66} = \frac{2(\epsilon_{q_3} m_1 m_2 + \epsilon_{r_3} n_1 n_2) + \delta_{p_3} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \delta_{r_3} l_1 m_2}{\delta_{q_3} m_1 m_2} \quad (33)$$

Jeżeli kąty obrotu układu współrzędnych O, p, q, r względem układu O, x, y, z będą równe $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$, to cosinusy kierunkowe będą miały wartości (tablica 3):

Tablica 3

Wartości cosinusów kierunkowych dla kątów

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$$

	x	y	z
p	+ 0,7071	- 0,7071	+ 0,7071
q	0	+ 0,7071	+ 0,7071
r	- 0,7071	- 0,7071	+ 0,7071

Wzory (30), (31), (32), (33) przyjmą wówczas postać:

$$a_{33} = \frac{\epsilon_{r3} + \epsilon_{q3} + \delta_{r3} - \delta_{p3}}{\delta_{q3}} - \left(\frac{\epsilon_{z1}}{\delta_{x1}} + \frac{\epsilon_{z2}}{\delta_{y2}} \right) \quad (34)$$

$$a_{44} = 2 \frac{\epsilon_{q3} - \epsilon_{r3} + \frac{1}{2} \delta_{r3}}{\delta_{q3}} \quad (35)$$

$$a_{55} = 2 \frac{\epsilon_{q3} + \epsilon_{r3} - \epsilon_{p3} - \delta_{p3}}{\delta_{q3}} \quad (36)$$

$$a_{66} = 2 \frac{\epsilon_{q3} - \epsilon_{r3} - \frac{1}{2} \delta_{r3}}{\delta_{q3}} \quad (37)$$

Równania (1) i (2) po uwzględnieniu (14), (15), (17) oraz (18), (19), (24), (25), (26) pozwalają uzyskać dodatkowe dwa wzory, które mogą posłużyć jako kontrolne dla stałych a_{11} i a_{22} .

Ze względów praktycznych stałe materiałowe a_{ij} można zastąpić technicznymi stałymi materiałowymi według następujących związków [4]:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1} \quad (38)$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_2} \quad (39)$$

$$a_{33} = \frac{1}{E_3} \quad (40)$$

$$a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} \quad (41)$$

$$a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{31}}{E_1} \quad (42)$$

$$a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_2} = -\frac{\nu_{23}}{E_3} \quad (43)$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad (44)$$

$$a_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad (45)$$

$$a_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (46)$$

3. Zakończenie

1. Z powyższych rozważań wynika, że dla wyznaczenia dziewięciu stałych materiałowych materiału ortotropowego za pomocą odpowiednio zorientowanych, prostopadłościennych próbek, badanych w jednokierunkowym stanie naprężenia wystarczy pobranie trzech próbek.
2. Przy odpowiednim doborze orientacji osi podłużnych tych próbek (ze względów obliczeniowych i technologicznych) podane wzory, służące do wyznaczenia stałych materiałowych (13) do (17) i (34) do (37) mają prostą postać.
3. Równania kontrolne pozwolą na ocenę poprawności zakwalifikowania danego materiału jako ortogonalnie anizotropowego.

LITERATURA

- [1] Gimm W. i inni: Gebirgsmechanik, 1. und 2. Lehrbrief. Bergakademie Freiberg Fernstudium 1968 und 1970.
- [2] Lechnicki S.G.: Anizotropnyje płastinki. Moskwa, Leningrad 1950.
- [3] Niewiadomski J.: Teoria sprężystości i plastyczności, Politechnika Śląska, Gliwice 1958.
- [4] Rabinowicz A.Ł.: Ob uprugich postojannyh i procznosti anizotropnyh materiałow. Trudy CAGI. Nr 582. 1946.
- [5] Radzik B., Szuścik W.: Określenie stałych materiałowych materiałów anizotropowych dla obliczenia wyężenia węgla i skał otaczających. Referaty. Część I.IV, Zimowa Szkoła Mechaniki Górników. Wisła-Jawornik, luty 1977.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ОПИРАЯСЬ НА ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАЗЦОВ ИМЛЕЮЩИХ ФОРМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА СЖИМАЕМЫХ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Резюме

В работе даны методы определения материальных постоянных материалов ортогонально изотропических, опирается на лабораторных исследованиях трёх образцах имеющих форму параллелепипеда. Образцы следует вырезать из материала по соответствующему ориентиру. Из измерений составных состояния напряжения

и состояния деформации получаем величины, которые внесены в поданные формулы дают возможность определить материальные постоянные.

A METHOD FOR THE DETERMINING OF MATERIAL CONSTANTS FOR ORTHOTROPIC MATERIALS AS BASED ON TENSOMETRIC CUBICOIDAL SAMPLE TESTING BY UNIDIRECTIONAL COMPRESSION

S u m m a r y

The method presented in the paper is based on laboratory testing of three cubocoidal samples which have to be cut away from the material along three orientations. From the stress components and the defect states adequate values are obtained which applied in the given formulas allow for the determination of the material constants.